Э. Ф. ШМИГИРЕВ, А. В. ЯСЬКО
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ОБ *F*-АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Свойства f-абнормальных и, в частности, абнормальных подгрупп, а также их пересечений существенно влияют на строение конечной группы. В качестве исходных условий в работе рассматриваются свойства пересечений пар f-абнормальных подгрупп.

Под всякой группой G, если не будет специальных оговорок, мы будем понимать конечную группу с разрешимым f-корадикалом. Через f в статье обозначается локальная формация конечных групп, содержащая нильпотентные группы.

Определение понятий, использованных в работе, можно найти в монографии Л.А. Шеметкова [1].

Определение 1. f-абнормальную максимальную подгруппу M группы G будем называть f-достижимой максимальной подгруппой, если $M/M_G \in f$. f-абнормальную подгруппу H будем называть -субдостижимой подгруппой, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_n$, в которой H_i является f-достижимой максимальной подгруппой в H_{i-1}. Максимальную цепь f-субдостижимых подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n$ будем называть f-субдостижимой цепью.

Очевидно, что всякая f-субдостижимая цепь может продолжаться только до подгруппы, принадлежащей f. Известно, что минимальным членом всякой такой цепи является -проектор группы. Отсюда, в частности, следует, что f-проектор всякой f-субдостижимой подгруппы является -проектором группы. [1]

Приведем в качестве леммы хорошо известный и очевидный факт.

Лемма 1. Подгруппа H из группы G f-абнормальна в G тогда и только тогда, когда из $H \subseteq U \subseteq G$ следует $HU^f = U$.

Теорема 1. Пусть H f-субдостижимая подгруппа группы G. Тогда всякая -абнормальная подгруппа из H является также f-абнормальной и в группе G.

Доказательство. Пусть G –контрпример минимального порядка и M – f-достижимая максимальная подгруппа из G, содержащая H. Пусть далее L – произвольная f-абнормальна подгруппа из H. Если $H = M$, то H является f-достижимой максимальной подгруппой из G. Пусть $K = M_G$, тогда $M/K \in f$ и, так как L f-абнормальная подгруппа из M, то по лемме 1 $LK = M$. Пусть теперь U – произвольная подгруппа из G, содержащая L. Тогда будем иметь $M/K = LK/K \subseteq UK/K \subseteq GK/K$. Так как M/K – максимальная f-абнормальная подгруппа из G/K и $M/K \in f$, то она является f-проектором в G/K. Теперь из $(UK/K)/(U^f K/K) \cong UK/U^f K \cong U/(U \cap U^f K) \in f$ следует $(M/K)(U^f K/K) = UK/K$. Учитывая, что $M = LK$, получим $UK = MU^f K = LU^f K$ и отсюда $U = LU^f(U \cap K)$. Так как $L(U \cap K) \subset U \cap M$, то $U = (U \cap M)U^f$ ***(1)***.По условию L -абнормальна в M, а следовательно, и в $U \cap M$. Ввиду $(U \cap M)/(M \cap U^f) \cong (M \cap U)U^f/U^f = U/U^f \in f$, имеем с учетом леммы 1: $M \cap U = L(M \cap U^f)$ ***(2)***. Теперь из ***(1)*** и ***(2)*** получим $U = L(M \cap U^f)U^f = LU^f$. То есть, для любой подгруппы U, содержащей L, выполняется равенство $U = LU^f$. А это значит, ввиду леммы 1, что L - абнормальная подгруппа из G. Остается полагать, что $H \neq M$. Очевидно, что H является f-субдостижимой подгруппой из M. То есть, для M условие теоремы выполняется. Так как $|M| < |G|$, то для M теорема верна, то есть L -абнормальна в M. Но, как было доказано выше, всякая f-абнормальная подгруппа f-достижимой максимальной подгруппы f-абнормальна в группе. В частности f-абнормальна в G подгруппа L. Получили противоречие с выбором G. Теорема доказана.

Из приведенной теоремы непосредственно следует, что всякая f - субдостижимая подгруппа группы G f-абнормальна в G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.