УДК 511.11

М. Д. Юдин

О НОРМАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ[3]

Интродукция. Будем рассматривать дробные части чисел, записанных в разложении по базису d, т. е. числа из отрезка [0, 1]. Каждое число будем определять в виде бесконечной дроби с ненулевым хвостом. Например, в десятичной системе 0,100… будет представлено как 0,0999… Это обеспечит единственность записи каждого числа.

Пусть $x = 0, b_1\, b_2 \ldots b_i \ldots$ – разложение числа $x \in [0, 1]$ по базису d и m – число d-ичной цифры k, $0 \le k \le d-1$, в первых n членах этого разложения. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$ называется частотой появления цифры k в d-ичном разложении числа x.

Определение 1. Число $x \in [0, 1]$ называется нормальным по базису d, если частота появления каждой цифры в d-ичном разложении числа x одна и та же, т. е. равна $\frac{1}{d}$.

Определение 2. Число $x \in [0, 1]$ называется нормальным, если оно нормально по любому базису d.

Определение 3. Число x называется нормальным, если нормальна его дробная часть $x - E(x)$.

Ненормальные числа будем называть ненормальными.

Пример. Число $\frac{1}{3}$ нормально по базису 2, т. к. его двоичное разложение имеет вид 0,010101… ; но ненормально по базису 3, т. к. его разложение в 3-ичной системе имеет вид $\frac{1}{3}$ = 0,0222… . Поэтому число 3 ненормальное.

Ниже будет показано, что почти все числа нормальные.

Выражение «почти все» понимается в вероятностном смысле. Если полученное случайное число интерпретировать как бросание наугад точки на числовую прямую, причем попадание в любую точку прямой считать равновозможным, то с вероятностью, равной единице,

---

[1] В данной работе автор использовал материалы консультаций студентов-дипломников

мы попадем в нормальное число, т. е. если N – множество нормальных чисел и x – случайное число, то вероятность $\mathrm{P}(x \in N) = 1$.

Следовательно, по определению вероятности, мера («длина») множества нормальных чисел каждого отрезка единичной длины равна е д и н и ц е. Поэтому мера множества ненормальных чисел равна нулю.

Также будет показано, что если зашифровать буквы, например английского алфавита, 26-ричными цифрами, то в 26-ричном разложении любого нормального числа встретятся тексты всех когда-либо написанных книг и всех книг, которые будут написаны, причем встретятся сколько угодно раз. Об этом удивительном свойстве нормальных чисел говорил еще Э. Борель [1], правда без доказательства. Тем самым, нормальные числа позволяют выявить удивительные глубины бесконечности.

Определения 1–3 позволяют в наших рассуждениях ограничиться отрезком [0, 1], не нарушая общности.

1. Пусть $x \in (0, 1]$ – случайное число и

$$x = 0, b_1 b_2 \ldots b_i \ldots \qquad (1)$$

его разложение по базису d. Очевидно, $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots$ – случайные величины.

Теорема 1. *В d-ичном разложении* (1) *случайного числа* $x \in (0, 1]$ *для любой d-ичной цифры k,* $0 \le k \le d-1$

$$\mathrm{P}(b_i = k) = \frac{1}{d}, \; i = \overline{1, \infty}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Числа вида $0, kb_2 \ldots b_i \ldots$ заполняют промежуток $\left(\frac{k}{d}, \frac{k+1}{d}\right]$, длина которого равна $\frac{1}{d}$. Поэтому $\mathrm{P}(b_1 = k) = \frac{1}{d}$.

Нетрудно видеть, что числа вида $0, b_1 b_2 \ldots b_{i-1} kb_i \ldots$ заполняют промежуток длины $\frac{1}{d^i}$ в каждом промежутке длины $\frac{1}{d^{i-1}}$. Общая длина заполненных промежутков равна $d^{i-1}\frac{1}{d^i} = \frac{1}{d}$.

Поэтому $\mathrm{P}(b_i = k) = \frac{1}{d}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *В d-ичном разложении* (1) *случайного числа* $x \in (0, 1]$ *случайные величины* $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots$ *независимы в совокупности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим числа $x \in (0, 1]$,

$$x = 0, b_1 b_2 \ldots b_{i-1} kb_{i+1} \ldots$$

в которых $b_i = k$, и найдем вероятность того, что b_{i+1} примет значение m. Легко видеть, что числа, в которых $b_i = k$, $b_{i+1} = m$ занимают $\frac{1}{d}$ часть каждого из промежутков $\left(\frac{p}{d^{i-1}} + \frac{k}{d^i}, \frac{p}{d^{i-1}} + \frac{k+1}{d^i}\right]$, $p = 0, 1, \ldots, d^{i-1} - 1$, общая длина этих частей равна $d^{i-1}\frac{1}{d^i} = \frac{1}{d}$. Поэтому вероятность того, что b_{i+1} примет значение m при условии, что $b_i = k$, $P\left(b_{i+1} = m \big/ b_i = k\right) = \frac{1}{d^2} : \frac{1}{d} = \frac{1}{d}$. По теореме 1, $\mathrm{P}(b_{i+1} = m) = \frac{1}{d}$. Значит, b_i и b_{i+1} – независимые случайные величины.

Нетрудно видеть, что случайные числа $x \in (0, 1]$, у которых приняты значения $d_{j_2} = k_1, b_{j_2}, ..., b_{j_s} = k_s,$ $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_s < I + 1$, заполняют часть промежутка (0, 1], общая длина которого равна $\frac{1}{d^s}$. Числа, у которых, кроме того, b_{i+1} примет значение m, заполнят $\frac{1}{d}$ часть длины каждой из предыдущих частей, т. е. часть промежутка (0, 1], длина которого равна $\frac{1}{d^{s+1}}$. Поэтому условная вероятность

$$\mathrm{P}\left(b_{i+1} = m \middle/ b_{j_1} = k_1,\ b_{j_2} = k_2, \dots, b_{j_s} = k_s \right) = \frac{1}{d^{s+1}} : \frac{1}{d^s} = \frac{1}{d}.$$

Вероятность события $b_{i+1} = m$ снова не изменилась. Значит, случайные величины $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots$ независимы в совокупности. Теорема доказана.

В теории вероятностей справедлив усиленный закон больших чисел. Сформулируем одну из его форм (см., например, [3]).

Теорема. *Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием μ и конечным моментом четвертого порядка. Тогда*

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \right) = 1. \qquad (2)$$

Теорема 3. *Почти все числа нормальны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 3 следует, что теорему достаточно доказать для чисел из отрезка [0, 1]. Следует доказать, что если $x \in [0, 1]$ – случайное число и N – множество нормальных чисел отрезка [0, 1], то $\mathrm{P}(x \in N) = 1$.

Пусть $x = 0, b_1 b_2 \dots b_i \dots$ – разложение случайного числа $x \in (0, 1]$. Как показано в теоремах 1 и 2, случайные величины $b_1, b_2 \dots, b_i \dots$ независимы (в совокупности) и $\mathrm{P}(b_i = k) = \frac{1}{d}, 0 \le k \le d - 1$.

Введем независимые случайные величины

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad b_i = k \\ 0, & \text{если} \quad b_i \ne k \end{cases}, \text{ т. е. } \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{с вер.} \quad \dfrac{1}{d}, \\ 0, & \text{с вер.} \quad \dfrac{d-1}{d}, \end{cases}, i = \overline{1, \infty},$$

k-фиксированная d-ичная цифра, $0 \le k \le d - 1$. Поскольку $\mathrm{MX}_i = \frac{1}{d}$, то по закону (2) больших чисел

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{d} \right) = 1.$$

Последнее означает, что если m – число появлений цифры k в первых n членах разложения числа x, то $\mathrm{P}\left(\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{d} \right) = 1$. Значит, почти все числа нормальны по базису d и мера множества ненормальных чисел по базису d равна нулю. Это справедливо для любого d. Поскольку число базисов счетно и объединение счетного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль, то почти все числа нормальны. Теорема доказана.

Теорема 4. *Все рациональные числа ненормальные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in (0, 1)$ – рациональное число. В десятичной системе его можно представить как отношение двух целых чисел $\frac{p}{q}$, где $0 \le p < q$. Его разложение по базису $d = q$ в q-ичной системе имеет вид:

$$x = 0, (p–1)(q–1)(q–1) \ldots .$$

В это разложение входят лишь две q-ичные цифры, причем частота первой цифры равна нулю, а второй – единице. Теорема доказана.

Теорема 5. *Не все иррациональные числа нормальные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $x \in [0, 1]$ – иррациональное число. Запишем его в двоичной системе: $x = 0, b_1 b_2 \ldots b_i \; \ldots$. Эта двоичная дробь бесконечная и непериодическая и $b_i = 0$ или 1. Очевидно, так записанное число в десятичной системе (уже другое!) иррациональное, но оно ненормальное по базису 10. Теорема доказана.

Теорема 6. *Множество ненормальных чисел имеет мощность континуума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество чисел, записанных в десятичной системе, у которых после запятой стоят только цифры 0 и 1, имеет мощность континуума, но все они ненормальные. С другой стороны, ненормальные числа входят во множество всех чисел, поэтому их множество имеет мощность не больше мощности континуума. Теорема доказана.

Таким образом, обнаружено еще одно множество меры нуль, мощность которого равна мощности континуума. Известны и другие подобные множества. Например, совершенное множество Кантора (см., например, 4). Оказывается, такими точками множества меры нуль можно заполнить действительное линейное пространство R^n любой размерности, в частности, нашу вселенную, т. к. пространство R^n имеет также мощность континуума, т. е. между точками пространства R^n и ненормальными числами можно установить взаимно однозначное соответствие [4]. У Бога, видимо, была возможность образовать вселенную, исходя из «ничего», в смысле меры.

Несмотря на то что почти все числа нормальные, доказать, что данное конкретное число нормально, чрезвычайно трудно. Нормальное число иррациональное, закона образования цифр его разложения мы не знаем ни в каком базисе. С помощью современной техники можно вычислить большое число членов его разложения, но, по сравнению с бесконечностью, это все равно будет ничтожно мало.

2. Алфавит, например, английского языка содержит 26 букв. Пусть x – нормальное число. Разложим его по базису 26. Тогда каждая цифра разложения будет обозначать определенную букву алфавита английского языка. Каждый «отрезок» разложения, любой длины, будет некоторым «текстом», скорее всего, бессмысленным. Как нами уже показано, появление каждой буквы этого текста независимо и равновозможно, т. е. вероятность появления каждой буквы равна $\frac{1}{26}$. Значит, если некоторый текст содержит q букв, то вероятность того, что конкретный «отрезок» разложения числа x, содержащий q цифр, идентичен данному тексту, равна $p = 26^{-q}$.

Например, если книга содержит 1000 страниц, каждая страница – 50 строк, каждая строка – 50 букв, то вероятность того, что «отрезок» разложения из $q = 2{,}5 \cdot 10^6$ цифр идентичен данной книге, равна $25^{-2{,}5 \cdot 10^6}$.

Если q – число букв книги, то вероятность 26^{-q} очень мала, вообще говоря. Но разложение нормального числа содержит бесконечное число отрезков по q цифр в каждом. Если n – число таких отрезков, то при любом $\lambda > 0$ $p = \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Поэтому в данной ситуации применима теорема Пуассона.

Теорема. *Пусть производится n повторных независимых испытаний, при каждом из которых может появиться событие A с вероятностью* $p = \frac{\lambda}{n}$, *где* $\lambda > 0$. *Тогда* $P_n(k)$ –

вероятность того, что при этих испытаниях событие A появится k раз, удовлетворяет соотношению:

$$P_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Ю. В. Прохоров нашел оценку скорости сходимости в теореме Пуассона. А именно [6, 76],

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_n(k)-\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \le \frac{2\lambda}{n}\min(2,\lambda).$$

Мы применим эту оценку при $\lambda \ge 2$. Кроме того, $p=\frac{\lambda}{n}$. Поэтому будем пользоваться оценкой:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_n(k)-\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \le 4p. \qquad (3)$$

Оценим вероятность появления данного текста, состоящего из q букв, не менее одного раза в 26-ричном разложении нормального числа. Число n повторений независимых испытаний – число «отрезков» из q цифр после запятой в разложении x. Независимость этих «отрезков» доказана в теореме 2.

Пусть k – число появлений текста. По теореме Пуассона, имеем для предельных вероятностей

$$\mathrm{P}(k \ge 1) = 1-\mathrm{P}(k=0) = 1-e^{-\lambda},$$

где $\lambda = n_p$, p – вероятность, что «отрезок» из q цифр в разложении x есть данный текст. Применяя оценку (3) к вероятности $\mathrm{P}_n(k \ge 1)$ того, что при проверке n «отрезков» разложения x текст появится не менее одного раза, получим

$$\left|\mathrm{P}_n(k \ge 1)-(1-e^{-\lambda})\right| \le 4p, \qquad (4)$$

поскольку модуль суммы не превосходит сумму модулей.

Число n «отрезков» длины q можно взять любым. Поэтому $\lambda = np$ можно считать настолько большим, что $e^{-\lambda}$ меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, в то же время для текста только, например, из 10 букв $p = 26^{-10}$. Таким образом, вероятность $\mathrm{P}_n(k \ge 1)$ можно сделать при достаточно больших n, сколь угодно близкой к единице. События с такими вероятностями практически достоверны: они обязательно происходят (см. в [1] рассуждения Э. Бореля).

П р и м е р. Пусть $q = 10^3$. Тогда $p = 26^{-10^3}$. Возьмем $n = 26^{-10^3}\cdot 20$. Получим $\lambda = np = 20$. Из неравенства (4) следует, что $\left|\mathrm{P}_n(k \ge 1)-(1-e^{-20})\right| \le 4\cdot 26^{-10^3}$. Здесь $e^{-20} \approx 2\cdot 10^{-7}$, а число 26^{-10^3} можно вообще считать равным нулю.

Заметим, что неравенство (3) можно применить к вероятностям $\mathrm{P}_n(k \ge 2)$, $\mathrm{P}_n(k \ge 3)$. Например, для $\mathrm{P}_n(k \ge 2)$ получим

$$\left|\mathrm{P}_n(k \ge 2)-(1-e^{-\lambda}-\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda})\right| \le 4p.$$

И опять же, беря достаточно большие n, найдем, что каждая из вероятностей $\mathrm{P}_n(k \ge m)$, m = 1, 2, 3, … , будет сколь угодно близкой к единице. Т. е. можно утверждать, что в разложении нормального числа по алфавитному базису текст любой книги встретится бесконечно много раз. Это, кроме того, следует из того, что каждый раз, встретив текст книги, мы после этого текста оказываемся в условии, полностью равносильному начальному.

Приведенные рассуждения показывают, какое необозримое богатство заключено в каждом нормальном числе.

Однако, как не без основания утверждает Э. Борель [1], практическая ценность полученных результатов равна нулю. Добавим к рассуждениям Э. Бореля: если бы нашлось существо, например суперкомпьютер, которое могло бы вычислять и переводить в текст каждый «отрезок» из 1000 цифр разложения нормального числа за одну секунду, то, как нетрудно показать, на получение и просмотр $n = 26^{-10^3} \cdot 20$ (см. предыдущий пример) таких отрезков не хватило бы времени существования солнечной системы.

Литература

1. Борель, Эмиль. Вероятность и достоверность / Эмиль Борель. – М. : Наука, 1969. – 110 с.
2. Полищук, Е. М. Эмиль Борель / Е. М. Полищук. – Л. : Наука, 1980. – 166 с.
3. Ламперти, Дж. Вероятность / Дж. Ламперти. – М. : Наука, 1973. – 189 с.
4. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : ГИТТЛ, 1957. – 552 с.
5. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : ГИТТЛ, 1954. – 412 с.
6. Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1989. – 640 с.

Summary

The studied ensemble normal numbers. It is shown that nearly all numbers normal that power ensemble abnormal numbers is a powers of the continuum, but his lebegs measure is a zero. Confirmed statement Borel: writing the normal number in alphabetical system of the numeration contains all texts.

Поступила в редакцию 29.09.06.