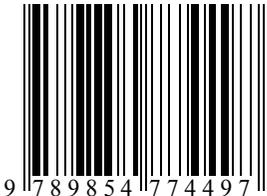


Е. М. Овсюк, В. В. Кисель, Г. Г. Крылов, В. М. Редьков

*Квантовая механика
в однородном магнитном поле:
новые задачи*

ISBN 978-985-477-449-7



9 789854 774497

МГТУ им. И.П.Шамкина

Мозырь
2011

УО «Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

УО «Белорусский государственный педагогический университет
имени М. Танка»

Белорусский государственный университет

Институт физики имени Б. И. Степанова

Национальной академии наук Беларуси

Е. М. Овсюк, В. В. Кисель, Г. Г. Крылов, В. М. Редьков

**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ:
НОВЫЕ ЗАДАЧИ**

МОНОГРАФИЯ

Мозырь
2011

УДК 539.12
ББК 22.31
К32

Авторы:

Е. М. Овсюк, В. В. Кисель, Г. Г. Крылов, В. М. Редьков

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
УО «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»
О. М. Бояркин;
доктор физико-математических наук, профессор
УО «Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого»
А. А. Панков.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»

Квантовая механика в однородном магнитном поле:
К32 новые задачи : монография / Е. М. Овсюк [и др.]. – Мозырь : УО МГПУ
им. И. П. Шамякина, 2011. – 232 с.
ISBN 978-985-477-449-7.

Изложен тетрадный рецепт Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко обобщения уравнения Дирака с целью учета внешних гравитационных полей, описываемых геометрически как искривление пространства-времени. На основе применения тетрадного формализма развит общий подход к исследованию поведения квантовомеханических частиц спина ноль, половина и единица в присутствии внешнего однородного магнитного поля в пространстве Минковского и на фоне его простейших обобщений с неевклидовой геометрией: пространств Лобачевского и Римана. Найдены точные решения уравнений Шредингера и Дирака в двух пространствах постоянной кривизны в присутствии магнитного поля, аналога однородного поля в плоском пространстве. На основе тетрадного матричного формализма Даффина – Кеммера найдены точные решения квантовомеханического уравнения для частицы со спином 1 во внешнем однородном поле в пространстве Минковского. Выполнен также анализ этой задачи в нерелятивистском приближении. В присутствии внешнего однородного магнитного поля в пространстве Минковского построены точные решения обобщенных квантовомеханических уравнений для скалярной и векторной частиц, несущих, кроме электрического заряда, дополнительную электромагнитную характеристику – поляризуемость.

Монография предназначена для научных работников, преподавателей высших учебных заведений, а также аспирантов и студентов-старшекурсников, специализирующихся в области теоретической физики.

Библиогр.: 75 назв.

УДК 539.12
ББК 22.31

© Овсюк Е. М., Кисель В. В.,
Крылов Г. Г., Редьков В. М., 2011
© УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2011

ISBN 978-985-477-449-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
Глава 1 Уравнение Дирака в римановом пространстве	9
1.1 Рецепт Тетраде – Вейля – Фока – Иваненко	9
1.2 О биспинорных вращениях в произвольном базисе	13
1.3 Нерелятивистский предел в уравнении Дирака	14
1.4 О калибровочной симметрии уравнения Паули	21
1.5 Уравнение Дирака в ортогональных координатах и тетраде	24
1.6 Уравнение Дирака и коэффициенты вращения Риччи	27
1.7 Майорановское спинорное поле в римановом пространстве	29
Глава 2 Уравнения Клейна – Фока – Гордона и Шредингера во внешних гравитационном и электромагнитном полях	31
2.1 Уравнение Клейна – Фока – Гордона	31
2.2 Нерелятивистский предел на фоне римановой геометрии	32
Глава 3 Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле на фоне пространств Лобачевского и Римана	37
3.1 Специальные системы цилиндрических координат в пространствах S_3 и H_3 и однородное магнитное поле	37
3.2 Уравнение Шредингера в пространствах S_3 и H_3 , разделение переменных в присутствии постоянного магнитного поля	40
3.3 Решение радиального уравнения в пространстве H_3	41
3.4 Анализ дифференциального уравнения для $Z(z)$ в H_3	50
3.5 Анализ радиального уравнения в сферическом пространстве	54
3.6 Анализ дифференциального уравнения для $Z(z)$ в S_3	59
Глава 4 Электрон в магнитном поле, тетрадный формализм в плоском пространстве	63
4.1 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве E_3	63
4.2 Разделение переменных в уравнении Дирака в E_3	64
4.3 Решение уравнений по r -переменной	66

Глава 5 Электрон в однородном магнитном поле в пространстве Лобачевского	68
5.1 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве H_3	68
5.2 Решение уравнений по z -переменной	72
5.3 Решение уравнений по r -переменной	74
Глава 6 Электрон в однородном магнитном поле в пространстве Римана	78
6.1 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве S_3	78
6.2 Разделение переменных в уравнении Дирака в S_3	80
6.3 Решение уравнений по z -переменной	83
6.4 Решение уравнений по r -переменной	86
Глава 7 О решениях уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 в однородном магнитном поле	89
7.1 Введение	89
7.2 Разделение переменных	91
7.3 Простой класс решений радиальных уравнений	92
7.4 Общий анализ системы радиальных уравнений	93
Глава 8 О квантовомеханической частице со спином 1 в однородном магнитном поле, нерелятивистский предел	99
8.1 Введение	99
8.2 Разделение переменных	100
8.3 Переход к нерелятивистским уравнениям	100
Глава 9 Заряженная скалярная частица с поляризуемостью в магнитном поле	106
9.1 Введение	106
9.2 Основные обозначения	106
9.3 Разделение переменных	109
9.4 Решение радиального уравнения, спектр энергий	114
Глава 10 Заряженная частица со спином 1 и поляризуемостью в магнитном поле, релятивистский случай	119
10.1 Основные обозначения	119
10.2 Разделение переменных	121
10.3 Решение радиальных уравнений	123

**Глава 11 Частица со спином 1 и поляризуемостью
в магнитном поле, нерелятивистский предел** 133

11.1 Введение	133
11.2 Основные обозначения	133
11.3 Разделение переменных, решение радиальных уравнений	134

**Глава 12 Частица со спином 1/2 в магнитном поле,
нерелятивистский предел в пространствах H_3 и S_3** 146

12.1 Разделение переменных в уравнении Дирака в S_3	146
12.2 Нерелятивистское приближение в уравнениях по z -переменной	148
12.3 Решение уравнений по r -переменной	150
12.4 Об уравнении Паули в магнитном поле на фоне сферической геометрии	153
12.5 Разделение переменных в уравнении Дирака в H_3	156
12.6 Нерелятивистское приближение в уравнениях по z -переменной	158
12.7 Решение уравнений по r -переменной	160
12.8 Об уравнении Паули в магнитном поле в пространстве Лобачевского	163

**Глава 13 Классическая частица в магнитном поле
в пространствах Лобачевского и Римана** 166

13.1 Второй закон Ньютона в пространстве Лобачевского	166
13.2 Частица в однородном магнитном поле в пространстве H_3	168
13.3 Построение решений в пространстве Лобачевского	172
13.4 Интеграл движения – энергия – в пространстве H_3	176
13.5 Лагранжев формализм в пространстве H_3	178
13.6 Все возможные решения в пространстве H_3 , финитные и инфинитные радиальные движения	181
13.7 Уравнение для траектории в форме $F(r, z) = 0$, модель H_3	188
13.8 Уравнение траектории $F(r, \varphi) = 0$, роль поперечных лоренцевских $SO(3,1)$ сдвигов в пространстве Лобачевского	190
13.9 Частица в магнитном поле в сферическом пространстве	194
13.10 Построение простейших решений в пространстве Римана	196
13.11 Интеграл движения – энергия – в пространстве S_3	198
13.12 Частица в магнитном поле и лагранжев формализм в S_3	200
13.13 Общее решение в сферическом пространстве и $SO(4)$ однородность модели S_3	203

13.14	О симметрии магнитного поля в пространстве H_3	208
13.15	О симметрии магнитного поля в сферическом пространстве	215
13.16	Частица в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского при наложении связи между переменными z, r	221
13.17	Частица в пространстве S_3 при дополнительных связях, специальное движение с постоянной угловой скоростью	223
Библиографический список		226

МГТУ им. И.П.Шамякина

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача этой книги – познакомить читателей с некоторыми новыми теоретическими результатами в старой и, казалось бы, устоявшейся области теоретической физики – квантовой механике частиц во внешнем магнитном поле.

Первые результаты в этой области принадлежат Плессету, Раби, Ландау (1929–1930 гг.). В литературе наиболее известны и находят многочисленные применения решения уравнения Шредингера для частицы без спина и уравнений Паули и Дирака для частицы со спином $1/2$. В предлагаемой работе эта задача обобщается по нескольким направлениям.

Первое обобщение и отчасти усовершенствование математических методов анализа состоит в том, что используется не обычная форма квантовомеханических уравнений, изложенная в стандартных курсах квантовой механики, а форма представления этих уравнений, заимствованная из более общего формализма, развитого для описания поведения квантовомеханических частиц в присутствии внешних гравитационных полей (первые работы были выполнены в 1928–1932 гг. Тетроде, Иваненко, Фоком, Вейлем, Шредингером). Как известно, в рамках общей теории относительности гравитационное взаимодействие описывается как псевдориманова (искривленная) геометрия 4-мерного пространства-времени.

Использование этой более общей математической техники позволило поставить вопрос об обобщении системы Ландау: мы рассматриваем ее на фоне простейших искривленных моделей 3-мерного физического пространства: пространства постоянной отрицательной кривизны – гиперболической модели Лобачевского H_3 и пространства постоянной положительной кривизны – сферической геометрии Римана S_3 . Получены точные решения уравнений Шредингера, Паули и Дирака в обеих геометрических моделях, H_3 и S_3 .

Следующее обобщение состоит в том, что задача Ландау решена точно в плоском пространстве для частицы со спином 1. За основу при этом выбран тетрадный формализм в матричном 10-мерном подходе Даффина – Кеммера. Решены релятивистское уравнение для векторной частицы и его нерелятивистский паулиевский предел.

Еще одно обобщение заключается в том, что найдены точные решения квантовомеханических уравнений во внешнем магнитном поле для скалярной и векторной частиц, несущих, помимо электрического заряда, дополнительную электромагнитную характеристику – поляризуемость. Отметим, что модели, описывающие такие сложные частицы, были предложены также представителями Белорусской школы теоретической физики Ф. И. Федоровым и В. А. Плетуховым, и поэтому обобщение задачи Ландау именно на эти системы не случайно.

Наконец, естественным было обратиться к исследованию классических механических уравнений движения частиц во внешнем магнитном поле в пространствах Лобачевского и Римана. Эта классическая задача оказывается намного более сложной, чем ее прототип в плоском пространстве. Уравнения движения решены точно. Выполнена классификация возможных типов траекторий частиц в магнитном поле в обоих пространствах на основе использования преобразований геометрических симметрий пространств постоянной кривизны: группы $SO(3, 1)$ в пространстве H_3 и группы $SO(4)$ в пространстве S_3 . Показано, что введенные магнитные поля в пространствах постоянной кривизны действительно являются в определенном смысле однородными: поперечные полю сдвиги в пространстве не меняют магнитного поля, генерируя лишь специального вида калибровочные преобразования.

Для удобства читателей укажем на некоторые проверенные временем книги, к которым можно обращаться за дальнейшими сведениями по теории относительности и теории частиц на фоне присутствия гравитационных сил: Паули [1], Эддингтон [2], Вейль [3], Толмен [4], Фок [5], Шредингер [6], Шмутцер [7], Мицкевич [8], Вайнберг [9], Пенроуз [10], Тредер [11], Мизнер – Торн – Уиллер [12], Хокинг – Элис [13], Бирелл – Девис [14], Пенроуз – Риндлер [15], Гальцов [16], Чандрасекхар [17], Девитт [18], Горбацевич [19].

Мы старались придерживаться обозначений, используемых в книгах курса теоретической физики Ландау [20]–[22]. Начинаящим читателям для понимания некоторых деталей изложения можно порекомендовать обращаться за математическими справками к курсу Фихтенгольца [23]–[25] и книгам Бейтмена – Ердейи [26], [27]. Изложение материала в значительной степени базируется на содержании книг одного из авторов [28], [29].

Книга является продолжением и развитием многих исследований, выполненных ранее представителями Белорусской школы теоретической физики, созданной академиком Ф. И. Федоровым [30]. В 2011 году исполняется 100 лет со дня его рождения.

Пользуясь возможностью, выражаем благодарность сотрудникам Института физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси Л. М. Томильчику, Ю. А. Курочкину, Е. А. Толкачеву, Ю. П. Выблomu, И. С. Сацункевичу, В. В. Кудряшову, С. Ю. Саковичу; сотруднице Белорусского государственного университета Г. В. Грушевской; сотрудникам Белорусского государственного педагогического университета им. М. Танка О. М. Бояркину и В. В. Махначу; сотрудникам Мозырского государственного педагогического университета им. И. П. Шамякина И. Н. Кралевич, И. Н. Ковальчук, В. С. Савенко, В. В. Шепелевичу за помощь и советы в процессе подготовки рукописи к изданию.

Авторы

Глава 1

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1 Рецепт Тетраде – Вейля – Фока – Иваненко

Исходное уравнение Дирака в плоском пространстве

$$(i\gamma^a \partial_a - m) \Psi(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

при наличии внешнего гравитационного поля записывается в виде (детали и библиографию работ см. в [28])

$$[i\gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m] \Psi(x) = 0, \quad (1.1.2)$$

где

$$\gamma^\alpha(x) = \gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad e_{(a)}^\alpha(x) \text{ — тетрада,}$$

$$\Gamma_\alpha(x) = \frac{1}{2} \sigma^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b);\beta}^\alpha) \text{ — спинорная связность;}$$

∇_α и α – символы общековариантной производной. В спинорном базисе [22]

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}, \quad \xi(x) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \eta(x) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sigma^a = (I, +\sigma^k)$, $\bar{\sigma}^a = (I, -\sigma^k)$ – матрицы Паули, имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} i \sigma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Sigma_\alpha(x)] \xi(x) &= m \eta(x), \\ i \bar{\sigma}^\alpha(x) [\partial_\alpha + \bar{\Sigma}_\alpha(x)] \eta(x) &= m \xi(x). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Из (1.1.3b), полагая $m = 0$, получаем уравнения Вейля для двухкомпонентных волновых функций нейтрино $\eta(x)$ и антинейтрино $\xi(x)$. В (1.1.3) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha(x) &= \sigma^a e_{(a)}^\alpha(x), & \bar{\sigma}^\alpha(x) &= \bar{\sigma}^a e_{(a)}^\alpha(x), \\ \Sigma_\alpha(x) &= \frac{1}{2} \Sigma^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b);\beta}^\alpha), & \bar{\Sigma}_\alpha(x) &= \frac{1}{2} \bar{\Sigma}^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b);\beta}^\alpha), \\ \Sigma^a &= \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^a \sigma^b - \sigma^b \bar{\sigma}^a), & \bar{\Sigma}^a &= \frac{1}{4} (\sigma^a \bar{\sigma}^b - \bar{\sigma}^b \sigma^a), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

где $\Sigma_\alpha(x)$ и $\bar{\Sigma}_\alpha(x)$ – известные связности Инфельда – ван дер Вердена.

Обратимся к исследованию свойств симметрии уравнений (1.1.3). Для этого совершим над волновой функцией $\Psi(x) = (\xi(x), \eta(x))$ локальное (зависящее от координат x^α) спинорное преобразование:

$$\xi'(x) = B(k(x)) \xi(x), \quad \eta'(x) = B^+(\bar{k}(x)) \eta(x). \quad (1.1.5)$$

Здесь $B(k)$ – матрица из группы $SL(2, C)$. Будем использовать параметризацию этой группы с помощью 4-мерного комплексного вектора с дополнительным условием:

$$B(k) = \sigma^a k_a, \quad \det B = k_0^2 - k_j^2 = +1,$$

$$B^+(k) = B(k^*), \quad B^{-1}(k) = B(\bar{k}), \quad \bar{k} = (k_0, -k_j).$$

После подстановки в уравнения (1.1.3) функций $\xi'(x)$ и $\eta'(x)$ получаем:

$$iB(k)\sigma^\alpha B(k) [\partial_\alpha + B(k) \Sigma_\alpha B(\bar{k}) + B(k)\partial_\alpha B(\bar{k})] \xi'(x) = m\eta'(x),$$

$$iB(k)\bar{\sigma}^\alpha B(k^*) [\partial_\alpha + B(\bar{k}^*)\bar{\Sigma}_\alpha B(k)^* + B(\bar{k}^*)\partial_\alpha B(k^*)] \eta'(x) = m\xi'(x).$$

Если теперь воспользоваться соотношениями

$$B(\bar{k}^*(x)) \sigma^a B(\bar{k}(x)) = \sigma^b L_b^a(x),$$

$$B(k(x)) \bar{\sigma}^a B(k^*(x)) = \bar{\sigma}^b L_b^a(x), \quad (1.1.6)$$

где $L_b^a(x)$ – 4-мерная матрица, определяемая равенствами

$$\begin{aligned} L_b^a(x) &= \frac{1}{2} \text{Sp} [\bar{\sigma}_b B(\bar{k}) \sigma^a B(\bar{k})] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} [\sigma_b B(k(x)) \bar{\sigma}^a B(k^*(x))] = L_b^a(k(x), k^*(x)), \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

то приходим к уравнениям

$$i\sigma'^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Sigma'_\alpha(x) + \Delta_\alpha(x)] \xi'(x) = m\eta'(x),$$

$$i\bar{\sigma}'^\alpha(x) [\partial_\alpha + \bar{\Sigma}'_\alpha(x) + \bar{\Delta}_\alpha(x)] \eta'(x) = m\xi'(x). \quad (1.1.8)$$

Здесь штрихованные матрицы $(\sigma'^\alpha, \bar{\sigma}'^\alpha, \Sigma'_\alpha, \bar{\Sigma}'_\alpha)$ построены по тому же самому правилу, что и матрицы $(\sigma^\alpha, \bar{\sigma}^\alpha, \Sigma_\alpha, \bar{\Sigma}_\alpha)$, но с использованием штрихованной тетрады $e'^\alpha_{(a)}(x)$, связанной с исходной преобразованием Лоренца:

$$e'^\alpha_{(b)}(x) = L_b^a(k(x), k^*(x)) e^\alpha_{(a)}(x).$$

Учитывая известные формулы для следов от произведений матриц Паули

$$\text{Sp} (\bar{\sigma}_k \sigma_l \bar{\sigma}_a \sigma_b) = 2 (g_{kl} g_{ab} - g_{ka} g_{lb} + g_{kb} g_{la} - i\epsilon_{klab}),$$

$$\text{Sp} (\sigma_k \bar{\sigma}_l \sigma_a \bar{\sigma}_b) = 2 (g_{kl} g_{ab} - g_{ka} g_{lb} + g_{kb} g_{la} + i\epsilon_{klab}),$$

для матрицы L из (1.1.7) можно получить выражение

$$L_b^a(k, k^*) = \bar{\delta}_b^c [-\delta_c^a k^n k_n^* + k_c k^{a*} + k_c^* k^a + i \epsilon_c^{anm} k_n k_m^*], \quad (1.1.9a)$$

где $\bar{\delta}_b^c$ – специальный (отличающийся от обычного) символ Кронекера:

$$\bar{\delta}_b^c = \begin{cases} 0, & \text{если } c \neq b; \\ +1, & \text{если } c = b = 0; \\ -1, & \text{если } c = b = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Рассмотрим свойства матрицы L детальнее. Прежде всего, убедимся, что она обладает свойством псевдоортогональности

$$L_a^b(k, k^*) = g^{bc} L_c^d(\bar{k}, \bar{k}^*) g_{da}. \quad (1.1.9b)$$

Это равенство можно переписать в виде (действует правило $\bar{g}^{bc} = g^{ba} \bar{\delta}_a^c$)

$$\begin{aligned} & \bar{\delta}_a^c (-\delta_c^b k^n k_n^* + k_c k^{b*} + k_c^* k^b + i \epsilon_c^{bnm} k_n k_m^*) = \\ & = \bar{g}^{bc} (-\delta_c^d \bar{k}^n \bar{k}_n^* + \bar{k}_c \bar{k}^{d*} + \bar{k}_c^* \bar{k}^d + i \epsilon_c^{dnm} \bar{k}_n \bar{k}_m^*) g_{da}, \end{aligned}$$

отсюда приходим к

$$(\bar{\delta}_a^c \epsilon_c^{bnm}) k_n k_m^* = (\bar{g}^{bc} \epsilon_c^{dnm} g_{da}) \bar{k}_n \bar{k}_m^*.$$

Не представляет труда убедиться, перебрав все значения для a и b , что это верное равенство. Таким образом, свойство псевдоортогональности матрицы $L(k, k^*)$ доказано. Следовательно, L – это матрица преобразования Лоренца. Покажем, что L – это ортохронное преобразование, т. е. $L_0^0(k, k^*) \geq +1$. Для L_0^0 имеем выражение

$$L_0^0 = (-k^n k_n^* + 2 k_0 k_0^*) = (k_0 k_0^* + k_j k_j^*),$$

откуда, воспользовавшись неравенством

$$(|Z_0| + |Z_1| + |Z_2| + |Z_3|) \geq |Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3|$$

при $Z_0 = k_0 k_0^*$, $Z_1 = -k_1 k_1^*$, $Z_2 = -k_2 k_2^*$, $Z_3 = -k_4 k_4^*$ и условием единичности детерминанта матрицы $B(k)$, получаем

$$L_0^0 \geq |k_0 k_0^* - k_j k_j^*| = +1.$$

На доказательстве соотношения

$$\det L(k, k^*) = (k_0 k_0^* - k_j k_j^*)^2 (k_0^* k_0^* - k_j^* k_j^*)^2 = +1 \quad (1.1.9c)$$

не будем здесь останавливаться – это простая, но громоздкая задача.

Введенные выше (см. (1.1.8)) величины $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ равны

$$\Delta_\alpha(x) = B(k) \partial_\alpha B(\bar{k}) - \frac{1}{2} \Sigma^{nm} L_n^a g_{ab} \partial_\alpha L_m^b,$$

$$\bar{\Delta}_\alpha(x) = B(\bar{k}^*) \partial_\alpha B(k^*) - \frac{1}{2} \bar{\Sigma}^{nm} L_n^a g_{ab} \partial_\alpha L_m^b.$$

Покажем, что эти величины $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ обращаются тождественно в ноль. Для этого, воспользовавшись (1.1.6), преобразуем выражения для $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ к виду

$$\Delta_\alpha(x) = -\frac{1}{4} B(k) [\bar{\sigma}^b B(k^*) \partial_\alpha B(\bar{k}^*) \sigma_b] B(\bar{k}),$$

$$\bar{\Delta}_\alpha(x) = -\frac{1}{4} B(\bar{k}^*) [\sigma^b B(\bar{k}) \partial_\alpha B(k) \bar{\sigma}_b] B(k^*).$$

Учитывая теперь формулы

$$B(k^*) \partial_\alpha B(\bar{k}^*) = -\bar{\sigma} \{ (k_0^* \partial_\alpha \vec{k}^* - \vec{k}^* \partial_\alpha k_0^*) + i [\vec{k}^* \partial_\alpha \vec{k}^*] \},$$

$$B(\bar{k}) \partial_\alpha B(k) = -\bar{\sigma} \{ (k_0 \partial_\alpha \vec{k} - \vec{k} \partial_\alpha k_0) + i [\vec{k} \partial_\alpha \vec{k}] \}$$

и тождества

$$\bar{\sigma}^a \bar{\sigma} \sigma_a \equiv 0, \quad \sigma^a \bar{\sigma} \bar{\sigma}_a \equiv 0,$$

убеждаемся, что $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ равны нулю. Таким образом, уравнения для функций $\xi'(x)$ и $\eta'(x)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} i\sigma'^\alpha(x) (\partial/\partial x^\alpha + \Sigma'_\alpha(x)) \xi'(x) &= m \eta'(x), \\ i\bar{\sigma}'^\alpha(x) (\partial/\partial x^\alpha + \bar{\Sigma}'_\alpha(x)) \eta'(x) &= m \xi'(x) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

(сравните с уравнениями (1.1.3)).

Это означает, что уравнение для электрона (или двухкомпонентного нейтрино) во внешнем гравитационном поле обладает свойством калибровочной инвариантности относительно локальной группы $SL(2, C)$. Данное свойство уравнения является свидетельством его корректности. Действительно, при заданной метрике пространства-времени $g_{\alpha\beta}(x)$ тетрада $e_{(a)}^\beta(x)$ фиксируется лишь с точностью до локального преобразования Лоренца $L_a^b(x)$, и поскольку в уравнении (1.1.3) явно присутствует тетрада, то необходимо, чтобы два уравнения, записанные в одном пространстве по одному рецепту, но с использованием разных тетрад, переходили друг в друга в результате соответствующего пересчета.

Добавим, что корректность уравнений (1.1.3) относительно требований общей ковариантности обеспечивается только в том случае, если

волновую функцию $\psi(x) = (\xi(x), \eta(x))$ считать скаляром относительно общекоординатных преобразований: $\psi'(x') = \psi(x)$.

1.2 О биспинорных вращениях в произвольном базисе

Выше везде использовалось лишь спинорное представление волновой функции электрона, но это не является обязательно необходимым. Преобразование Лоренца для волновых функций электрона имеет особенно простой вид в спинорном базисе: $\xi' = B(k)\xi$, $\eta' = B(\bar{k}^*)\eta$. Чтобы найти вид этого преобразования в любом другом базисе, достаточно вычислить коэффициенты разложения матрицы $S = B(k) \oplus B(\bar{k}^*)$ по набору матриц I , γ^5 , γ^a , $\gamma^5\gamma^a$, σ^{ab} , выбранных также в спинорном представлении; тем самым будет получена формула, инвариантная относительно выбора базиса.

Матрицу $S(k, k^*)$ в спинорном базисе

$$S(k, k^*) = \begin{vmatrix} \sigma^a k_a & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^a k_a \end{vmatrix} \quad (1.2.1a)$$

разложим по базису алгебры Дирака:

$$S = \Phi I + \tilde{\Phi} \gamma^5 + \Phi_a \gamma^a + \tilde{\Phi}_a \gamma^5 \gamma^a + \Phi_{ab} \sigma^{ab}. \quad (1.2.1b)$$

При вычислении коэффициентов разложения матрицы $S(k, k^*)$ можно пользоваться спинорным базисом для матриц Дирака, но сами коэффициенты разложения не зависят от этого конкретного выбора. Равенство (1.2.1a) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} \sigma^a k_a & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^a k_a \end{vmatrix} = \Phi \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} + \tilde{\Phi} \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{vmatrix} + \\ + \Phi_a \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix} + \tilde{\Phi}_a \begin{vmatrix} 0 & -\bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix} + \Phi^{ab} \begin{vmatrix} \Sigma^{ab} & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}^{ab} \end{vmatrix}.$$

Приравнявая здесь правую и левую части поблочно, находим

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_a \bar{\sigma}^a - \tilde{\Phi}_a \bar{\sigma}^a, & 0 &= \Phi_a \sigma^a + \tilde{\Phi}_a \sigma^a, \\ \sigma^a k_a &= \Phi - \tilde{\Phi} + \Phi_{ab} \Sigma^{ab}, & \sigma^a k_a &= \Phi + \tilde{\Phi} + \Phi_{ab} \bar{\Sigma}^{ab}. \end{aligned}$$

Из двух первых уравнений следует, что $\Phi_a = 0$ и $\tilde{\Phi}_a = 0$. Умножив третье уравнение справа на $\bar{\sigma}^c$, а четвертое – на σ^c и взяв шпуры от получаемых соотношений, находим

$$\begin{aligned} k^c &= (\Phi - \tilde{\Phi}) g^{0c} + \Phi^{0c} - i/2 \Phi_{ab} \epsilon^{abc0}, \\ k^{*c} &= (\Phi + \tilde{\Phi}) g^{0c} + \Phi^{0c} + i/2 \Phi_{ab} \epsilon^{abc0}. \end{aligned} \quad (1.2.1c)$$

Решив уравнения (1.2.1c) относительно $(\Phi, \tilde{\Phi}, \Phi_{ab})$, получим

$$\begin{aligned}\Phi &= (k_0^* + k_0)/2, & \tilde{\Phi} &= (k_0^* - k_0)/2, \\ \Phi_{01} &= (k_1^* + k_1)/2, & \Phi_{23} &= (k_1^* - k_1)/2i, \\ \Phi_{02} &= (k_2^* + k_2)/2, & \Phi_{31} &= (k_2^* - k_2)/2i, \\ \Phi_{03} &= (k_3^* + k_3)/2, & \Phi_{12} &= (k_3^* - k_3)/2i.\end{aligned}\quad (1.2.1d)$$

Учитывая эти равенства в (1.2.1b), приходим к

$$\begin{aligned}S(k, k^*) &= \frac{1}{2}(k_0 + k_0^*) - \frac{1}{2}(k_0 - k_0^*)\gamma^5 + k_1(\sigma^{01} + i\sigma^{23}) + k_1^*(\sigma^{01} - i\sigma^{23}) + \\ &+ k_2(\sigma^{02} + i\sigma^{31}) + k_2^*(\sigma^{02} - i\sigma^{31}) + k_3(\sigma^{03} + i\sigma^{12}) + k_3^*(\sigma^{03} - i\sigma^{12}).\end{aligned}\quad (1.2.2a)$$

С учетом обозначений $k_a = m_a - in_a$ предыдущую формулу можно представить так:

$$\begin{aligned}S(m_a, n_a) &= (m_0 + n_0 i\gamma^5) + (m_1\sigma^{01} + m_2\sigma^{02} + m_3\sigma^{03}) + \\ &+ (n_1\sigma^{23} + n_2\sigma^{31} + n_3\sigma^{12}) = m_0 + n_0 i\gamma^5 + m_i\sigma^{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}n^i\sigma^{jk}.\end{aligned}\quad (1.2.2b)$$

Подставив в (1.2.2a, b) явный вид матриц Дирака в том или ином базисе, тем самым получим выражение для биспинорного преобразования в этом базисе. В частности, в майорановском представлении выполняются соотношения

$$(i\gamma_M^5)^* = i\gamma_M^5, \quad (\sigma_M^{ab})^* = +\sigma_M^{ab}.\quad (1.2.3)$$

При этом, очевидно, матрица $S(k, k^*)$ из (1.5.2a) является вещественной.

1.3 Нерелятивистский предел в уравнении Дирака

В литературе наряду с большим количеством работ, исследующих поведение фермионов в римановых пространствах на базе релятивистского общековариантного уравнения Дирака, можно отметить определенный интерес и к рассмотрению фермионов на основе нерелятивистского общековариантного уравнения Паули. Одной из причин этого служит, по-видимому, то, что вместе с ростом возможностей экспериментальной техники реальностью становится и гравитационный эксперимент с квантовыми объектами – не только релятивистскими, но и вполне нерелятивистскими.

Исходное уравнение Дирака в римановом пространстве имеет вид

$$\{ \gamma^\alpha(x) [i\hbar (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - \frac{e}{c} A_\alpha] - mc \} \Psi(x) = 0.\quad (1.3.1)$$

Рассмотрим уравнение (1.3.1) в стандартном представлении матриц Дирака [22]:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Xi(x) \end{vmatrix}.$$

Для $\gamma^\beta(x)$ и $\Gamma_\beta(x)$ имеем выражения (далее $\sigma^\beta(x) = \sigma^i e_{(i)}^\beta(x), i = 1, 2, 3$)

$$\gamma^\beta(x) = \begin{vmatrix} e_{(0)}^\beta(x) & \sigma^\beta(x) \\ -\sigma^\beta(x) & -e_{(0)}^\beta(x) \end{vmatrix}, \quad \Gamma_\beta(x) = \begin{vmatrix} B_\beta(x) & C_\beta(x) \\ C_\beta(x) & B_\beta(x) \end{vmatrix}, \quad (1.3.2a)$$

где $B_\beta(x)$ и $C_\beta(x)$ – матрицы, определяемые согласно

$$B_\beta(x) = \frac{1}{4} [e_{(0)}^\alpha(x) \nabla_\beta e_{(0)\alpha}(x) - \sigma^\alpha(x) \nabla_\beta \sigma_\alpha(x)],$$

$$C_\beta(x) = \frac{1}{4} [e_{(0)}^\alpha(x) \nabla_\beta \sigma_\alpha(x) - \sigma^\alpha(x) \nabla_\beta e_{(0)\alpha}(x)]. \quad (1.3.2b)$$

Подставляя (1.3.2b) в (1.3.1), получаем волновое уравнение в виде

$$\begin{vmatrix} \Omega(x) & \Pi(x) \\ -\Pi(x) & -\Omega(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Xi(x) \end{vmatrix} = mc \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Xi(x) \end{vmatrix}, \quad (1.3.3)$$

где

$$\Omega(x) = e_{(0)}^\alpha(x) [i\hbar (\partial_\alpha + B_\alpha(x)) - \frac{e}{c} A_\alpha(x)] + i\hbar \sigma^\alpha(x) C_\alpha(x),$$

$$\Pi(x) = i\hbar e_{(0)}^\alpha(x) C_\alpha(x) + \sigma^\alpha(x) [i\hbar (\partial_\alpha + B_\alpha(x)) - \frac{e}{c} A_\alpha(x)]. \quad (1.3.4)$$

Далее, совершая подстановку

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Xi(x) \end{vmatrix} = \exp(-i \frac{mc^2}{\hbar} t) \begin{vmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{vmatrix}, \quad (1.3.5)$$

из (1.3.3) получаем уравнения

$$\Omega(x) \Psi_1 + \Pi(x) \Psi_2 = mc (+1 - e_{(0)}^0) \Psi_1, \quad (1.3.6a)$$

$$\Pi(x) \Psi_1 + \Omega(x) \Psi_2 = mc (-1 - e_{(0)}^0) \Psi_2. \quad (1.3.6b)$$

Переход к нерелятивистскому пределу в общековариантном уравнении будем осуществлять лишь в римановых пространствах, метрический тензор которых имеет следующую структуру:

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j. \quad (1.3.7)$$

Принимая во внимание формулы для преобразования компонент метрического тензора

$$g'_{00} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{0'}} g_{\rho\sigma}, \quad g'_{0i} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} g_{\rho\sigma}, \quad g'_{ij} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{j'}} g_{\rho\sigma}$$

и требуя, чтобы после такого пересчета сохранялась метрика класса (1.3.7), находим ограничения на допустимые координатные преобразования:

$$x^{0'} = x^0, \quad x^{i'} = f^i(x^1, x^2, x^3). \quad (1.3.8)$$

В соответствии с (1.3.7) имеем следующие ограничения на тетрады:

$$\begin{aligned} e_{(a)0}(x) e_{(b)0}(x) \eta^{ab} &= g_{00}(x) \equiv 1, \\ e_{(a)0}(x) e_{(b)i}(x) \eta^{ab} &= g_{0i}(x) = 0, \\ e_{(a)i}(x) e_{(b)j}(x) \eta^{ab} &= g_{ij}(x). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Можно заметить, что эти соотношения могут быть удовлетворены следующим образом:

$$e_{(0)0}(x) = +1, \quad e_{(0)i}(x) = 0, \quad e_{(l)0}(x) = 0, \quad e_{(l)i}(x) e_{(m)j}(x) \eta^{lm} = g_{ij}(x). \quad (1.3.10)$$

Ниже увидим, что в нерелятивистском приближении разрешены в качестве калибровочных только $SU(2)$ -вращения, зависящие от четырех координат (x^0, x^1, x^2, x^3) :

$$\begin{aligned} e_{(l)}^\alpha(x) &= O_l^k(n(x)) e_{(k)}^\alpha(x), \quad \Psi'(x) = U(n(x)) \Psi(x), \\ U(n) &= n_0 - i\sigma^j n_j, \quad O(n) = I + 2[n_0 \vec{n}^\times + (\vec{n}^\times)^2]. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Приведенное выражение для матрицы $O(n)$ тесно связано с представлением матрицы вращения в рамках векторной параметризации [30] Гиббса ортогональной группы $SO(3, R)$:

$$O(n) = I + 2 \frac{n_0 \vec{n}^\times + (\vec{n}^\times)^2}{n_0^2 + n_i^2} = I + 2 \frac{\vec{c}^\times + (\vec{c}^\times)^2}{1 + \vec{c}^2}, \quad c_i = n_i/n_0.$$

Понятно, что преобразования (1.3.11) не будут выводить нас за пределы класса тетрад, задаваемых соотношениями (1.3.10).

Ниже потребуется ряд вспомогательных формул. Прежде всего, найдем в такой (нерелятивистской) метрике (1.3.7) выражения для символов Кристоффеля [20] (символ α обозначает дифференцирование по x^α):

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = g^{\gamma\rho} \Gamma_{\rho,\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\rho,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho}).$$

Поскольку

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = g^{00} \Gamma_{0,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{0\alpha,\beta} + g_{0\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,0}),$$

то

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} g_{ij,0}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= g^{i\gamma}, \quad \Gamma_{\gamma,00} = g^{ij}, \quad \Gamma_{j\gamma,00} = 0, \\ \Gamma_{0j}^i &= g^{i\alpha}, \quad \Gamma_{\alpha,0j} = g^{ik}, \quad \Gamma_{k,0j} = \frac{1}{2} g^{ik} g_{kj,0}, \quad \Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl}, \end{aligned}$$

т. е. если среди трех индексов величины $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ есть только один нулевой, то такой символ Кристоффеля отличен в общем случае от нуля; если же есть два или три нулевых индекса, то символ Кристоффеля обращается в ноль. Теперь вычислим связности B_α и C_α . Прежде всего отмечаем, что в силу (1.3.10) нулевая проекция вектора $\sigma^\alpha(x)$ равна нулю:

$$\sigma^\alpha(x) = \sigma^k e_{(k)}^\alpha(x) \quad \Longrightarrow \quad \sigma^0(x) = 0, \quad \sigma^l(x) = \sigma^k e_{(k)}^l(x).$$

С учетом этого

$$B_\beta(x) = \frac{1}{4} [e_{(0)0;\beta}(x) - \sigma^l(x) \sigma_{l;\beta}(x)], \quad C_\beta(x) = \frac{1}{4} [\sigma_{0;\beta}(x) - \sigma^l(x) e_{(0)l;\beta}(x)].$$

Отсюда последовательно получаем

$$B_0 = \frac{1}{4} [e_{(0)0;0} - \sigma^l(x) \sigma_{l;0}] = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) \sigma_{l;0},$$

где

$$e_{(0)0;0} = 0, \quad \sigma_{l;0} = \frac{\partial}{\partial x^0} \sigma_l(x) - \Gamma_{l0}^k \sigma_k(x),$$

$$B_k = \frac{1}{4} [e_{(0)0;k} - \sigma^l(x) \sigma_{l;k}(x)] = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) \sigma_{l;k}(x).$$

Здесь

$$e_{(0)0;k} = \frac{\partial}{\partial x^k} e_{(0)0} - \Gamma_{0k}^0 e_{(0)0} = 0.$$

Далее

$$C_0 = \frac{1}{4} [\sigma_{0;0} - \sigma^l(x) e_{(0)l;0}] = 0,$$

где

$$\sigma_{0;0} = \frac{\partial}{\partial x^0} \sigma_0 - \Gamma_{00}^k \sigma_k(x) = 0; \quad e_{(0)l;0} = \frac{\partial}{\partial x^0} e_{(0)l} - \Gamma_{l0}^0 e_{(0)0} = 0.$$

Затем

$$C_k = \frac{1}{4} [\sigma_{0;k}(x) - \sigma^l(x) e_{(0)l;k}],$$

$$\sigma_{0;k}(x) = \frac{\partial}{\partial x^k} \sigma_0 - \Gamma_{0k}^l \sigma_l(x) = -\Gamma_{0k}^l \sigma_l(x),$$

$$e_{(0)l;k} = \frac{\partial}{\partial x^k} e_{(0)l} - \Gamma_{lk}^0 e_{(0)0} = -\Gamma_{lk}^0,$$

и для C_k находим выражение

$$C_k = \frac{1}{4} [-\Gamma_{0k}^l \sigma_l(x) + \sigma^l(x) \Gamma_{lk}^0] = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) g_{lk,0}.$$

Таким образом, связности равны

$$B_0 = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) \sigma_{l;0}(x), \quad B_k = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) \sigma_{l;k}(x),$$

$$C_0 = 0, \quad C_k = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) g_{lk,0}. \quad (1.3.12)$$

С учетом (1.3.12) операторы Π и Ω из (1.3.4) принимают вид

$$\Pi = \sigma^i(x) [i\hbar (\partial_i + B_i) - \frac{e}{c} A_i],$$

$$\Omega = i\hbar (\partial_0 + B_0) - \frac{e}{c} A_0 + i\hbar \sigma^l(x) C_l.$$

Пренебрегая в (1.3.6b) членом $\Omega(x)\Psi_2(x)$ по сравнению с $2mc\Psi_2(x)$ и исключая из (1.3.6a) малую компоненту $\Psi_2(x)$, получаем уравнение для большой компоненты $\Psi_1(x)$:

$$\Omega\Psi_1(x) = \frac{1}{2mc} \Pi^2 \Psi_1(x) \quad (1.3.13a)$$

или в более детализированной записи

$$\left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + c B_0 \right) - e A_0 + i\hbar \sigma^l(x) C_l \right] \Psi_1(x) =$$

$$= \frac{1}{2m} \left[\sigma^i(x) \left(i\hbar (\partial_i + B_i) - \frac{e}{c} A_i \right) \right]^2 \Psi_1(x), \quad (1.3.13b)$$

что является уравнением Паули в пространствах класса (1.3.7). Присутствующая перед B_0 и C_l постоянная – скорость света c – будет скомпенсирована множителем c^{-1} , содержащимся в выражениях для этих величин (см. (1.3.12)).

Заметим, что для свертки $\sigma^l(x) C_l$ легко получить более простое выражение:

$$c \sigma^l(x) C_l(x) = -\sigma^l(x) \frac{1}{4} \sigma^k(x) g_{lk,0}(x) =$$

$$= -c \frac{1}{4} [\epsilon^{lkn}(x) \sigma_n(x) - g^{lk}(x)] g_{lk,0}(x) = c \frac{1}{4} g^{lk}(x) g_{lk,0}(x) = \frac{1}{4} \frac{\partial g}{g \partial t}. \quad (1.3.14)$$

Соответственно уравнение Паули (1.3.13b) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} + c B_0 \right) - e A_0 \right] \Psi_1(x) = \\ & = \frac{1}{2m} \left[\sigma^i(x) \left(i\hbar (\partial_i + B_i) - \frac{e}{c} A_i \right) \right]^2 \Psi_1. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Дополнительный член, зависящий от производной определителя метрического тензора по времени, может быть устранен из уравнения следующей подстановкой:

$$\Psi_1(x) = (-g)^{-1/4} \Psi(x); \quad (1.3.16)$$

уравнение для 2-компонентной функции $\Psi(x)$ запишется так:

$$\left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + c B_0 \right) - e A_0 \right] \Psi = \frac{1}{2m} \left[\sigma^i(x) \left(i\hbar (\partial_i + B_i) - \frac{e}{c} A_i \right) \right]^2 \Psi. \quad (1.3.17)$$

Здесь "гравитационные связности" определены согласно

$$B_0 = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) \sigma_{l;0}(x), \quad B_k = -\frac{1}{4} \sigma^l(x) \sigma_{l;k}(x).$$

Уравнению (1.3.17) легко можно придать более удобный для практических применений вид, сделав некоторые преобразования над выражениями для нерелятивистских спинорных связностей $B_i(x)$ и B_0 . При этом будем пользоваться известными свойствами двумерных матриц Паули:

$$\sigma^k \sigma^l = i \epsilon^{kln} \sigma_n - \eta^{kl}, \quad \epsilon_{123} = +1, \quad \epsilon^{123} = -1, \quad \epsilon^{rln} \epsilon_{mcn} = (-\delta_m^k \delta_c^l + \delta_c^k \delta_m^l).$$

Прежде всего связность $B_0(x)$ может быть представлена как

$$\begin{aligned} B_0(x) &= -\frac{1}{4} \sigma^k \sigma^l e_{(k)}^i(x) \sigma^l \nabla_0 e_{(l)i}(x) = -\frac{1}{4} (i \epsilon^{kln} \sigma_n - \eta^{kl}) e_{(k)}^i(x) \nabla_0 e_{(l)i}(x) = \\ &= -\frac{i}{4} \epsilon^{kln} \sigma_n e_{(k)}^i(x) \nabla_0 e_{(l)i}(x). \end{aligned} \quad (1.3.18a)$$

Если теперь вместо тетрад и ковариантных производных от них перейти к обозначениям через коэффициенты вращения Риччи

$$\gamma_{abc}(x) = - [\nabla_\beta e_{(a)\alpha}(x)] e_{(b)}^\alpha(x) e_{(c)}^\beta(x)$$

и учесть используемые ограничения на тетрады (1.3.10), то выражение для связности $B_0(x)$ из (1.3.18a) может быть переписано как

$$B_0(x) = \frac{i}{4} \sigma_n \epsilon^{kln} \gamma_{lk0}(x), \quad \gamma_{lk0}(x) = - e_{(k)}^i \nabla_0 e_{(l)i}(x). \quad (1.3.18b)$$

Рассмотрим более детально связность $B_i(x)$. В соответствии с определением имеем

$$B_i(x) = -\frac{1}{4} \sigma^k \sigma^l e_{(k)}^j(x) \nabla_i e_{(l)j}(x) = -\frac{1}{4} \epsilon^{kln} \sigma_n e_{(k)}^j(x) \nabla_i e_{(l)j}(x).$$

Далее для свертки $\sigma^i(x) B_i(x)$ получаем

$$\sigma^i(x) B_i(x) = \frac{1}{4} \gamma_{lk}{}^m(x) \epsilon^{kln} \epsilon_{mnc} \sigma^c - \frac{i}{4} \gamma_{lkn}(x) \epsilon^{kln}.$$

Отсюда, сворачивая по одному индексу символы Леви-Чивита, находим

$$\sigma^i(x) B_i(x) = -\frac{1}{2} \gamma_{kl}{}^l(x) \sigma^k + \frac{i}{4} \epsilon^{kln} \gamma_{kln}(x). \quad (1.3.19a)$$

Это соотношение с учетом равенства $\gamma_{kl}{}^l(x) = -\nabla_l e_{(k)}^l(x)$ может быть записано в виде

$$\sigma^i(x) B_i(x) = +\frac{1}{2} \sigma^k \nabla_l e_{(k)}^l(x) + \frac{i}{4} \epsilon^{kln} \gamma_{kln}(x). \quad (1.3.19b)$$

Представление (1.3.19b) удобно тем, что в ортогональных координатах (и соответственно тетрадах) второе слагаемое в его правой части (свертка символа Леви-Чивита с коэффициентами вращения Риччи) обращается в тождественный ноль.

Чтобы показать, что не всякая временная зависимость пространственной геометрии будет приводить к ненулевой связности $B_0(x)$ в уравнении Паули, рассмотрим один простой пример:

$$dS^2 = (dx^0)^2 + f^2(x^0) \dot{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j, \\ e_{(k)i}(x) = f(x^0) \dot{e}_{(k)i}(x^1, x^2, x^3). \quad (1.3.20a)$$

Величина $f(x^0)$ выступает как меняющийся со временем масштабный параметр, а искривление 3-мерной пространственной геометрии описывается метрическим тензором $\dot{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3)$. В этом случае для ковариантной производной от тетрады $\nabla_0 e_{(k)i}(x)$ находим

$$\partial_0 e_{(k)i} = + \dot{e}_{(k)i} \frac{\partial f}{\partial x^0}, \quad \Gamma_{0i}^l = \delta_i^l \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x^0}, \\ -\Gamma_{0i}^l e_{(k)l} = -\delta_i^l \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x^0} f \dot{e}_{(k)l} = - \dot{e}_{(k)i} \frac{\partial f}{\partial x^0}, \\ \nabla_0 e_{(k)i} = \partial_0 e_{(k)i} - \Gamma_{0i}^l e_{(k)l} = 0. \quad (1.3.20b)$$

Следовательно, связность $B_0(x)$ (см. (1.3.18b)) обратится в ноль.

Известными примерами типа (1.3.20a) являются пространства де Ситтера (положительной и отрицательной кривизны):

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \cos^2 \frac{ct}{R} [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)],$$

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \text{ch}^2 \frac{ct}{R} [d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

В этих моделях существует уравнение Паули:

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0) \Psi = \frac{1}{2m} \left[\sigma^i(x) \left(i\hbar(\partial_i + B_i) - \frac{e}{c} A_i \right) \right]^2 \Psi.$$

1.4 О калибровочной симметрии уравнения Паули

Покажем, что при осуществлении нерелятивистского предела тетрадная группа симметрии исходного уравнения Дирака – 6-параметрическая группа Лоренца вырождается в локальную 3-параметрическую группу пространственных вращений – группу симметрии уравнения Паули.

Рассмотрим подробнее свойства симметрии этого уравнения. Напомним вначале ситуацию для исходного общековариантного уравнения Дирака. Известно, что если волновую функцию в (1.1.2) подвергнуть локальному преобразованию из группы $SL(2, C)$ (выпишем его явный вид в спинорном базисе)

$$\Psi_{spin}(x) = \begin{vmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{vmatrix}, \quad \Psi'(x)_{spin} = S_{spin} \Psi_{spin}(x),$$

$$S_{spin} = \begin{vmatrix} B(k(x)) & 0 \\ 0 & B(\bar{k}^*(x)) \end{vmatrix}, \quad (1.4.1)$$

то новая (штрихованная) волновая функция будет подчиняться уравнению Дирака вида (1.1.2), но построенному на базе новой тетрады, полученной из старой посредством локального преобразования Лоренца:

$$e_{(a)}^\beta(x) = L_a^b(k(x), k^*(x)) e_{(b)}^\beta(x).$$

Рассмотрим аналогичное свойство уравнения Паули (1.3.13). Для этого совершим в (1.4.1) переход к стандартному представлению [22]

$$\Psi(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Xi(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{vmatrix}. \quad (1.4.2a)$$

Для биспинорного калибровочного преобразования (1.4.1) в новом базисе будем иметь

$$S(k, k^*) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B(k) + B^+(\bar{k}) & B(k) - B^+(\bar{k}) \\ B(k) - B^+(\bar{k}) & B(k) + B^+(\bar{k}) \end{vmatrix}, \quad (1.4.2b)$$

т. е. в стандартном представлении компоненты биспинорной волновой функции преобразуются согласно соотношениям

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(B(k) + B^+(\bar{k})) \varphi(x) + \frac{1}{2}(B(k) - B^+(\bar{k})) \Xi(x),$$

$$\Xi'(x) = \frac{1}{2}(B(k) - B^+(\bar{k})) \varphi(x) + \frac{1}{2}(B(k) + B^+(\bar{k})) \Xi(x).$$

Рассмотрим по отдельности 3-вращения и бусты:

$$B(n) = (n_0 - i \vec{\sigma} \vec{n}), \quad B^+(n) = B^{-1}(n);$$

$$B(m) = (m_0 + \vec{\sigma} \vec{m}), \quad B^+(m) = B(m).$$

Формула (1.4.2b) дает

$$\varphi'(x) = B(n) \varphi(x), \quad \Xi'(x) = B(n) \Xi(x); \quad (1.4.3)$$

$$\varphi'(x) = m_0 \varphi(x) + (\vec{\sigma} \vec{m}) \Xi(x),$$

$$\Xi'(x) = m_0 \Xi(x) + (\vec{\sigma} \vec{m}) \varphi(x). \quad (1.4.4)$$

Отмечаем, что при вращениях компоненты $\varphi(x)$ (большая) и $\Xi(x)$ (малая) преобразуются совершенно независимо, тогда как при бустах происходит перемешивание этих компонент. При этом если учесть, что (v – скорость) $m_0 = \text{sh } v/c$, $\vec{m} = \text{sh } v/c \vec{m}^0$, то легко заметить, что в нулевом порядке по малому параметру v/c какого-либо смешивания большой и малой компонент не происходит, оно возникает только начиная с величин первого порядка малости по v/c . Очевидно, поскольку уравнение Паули пишется только для одной (большой) компоненты $\varphi(x)$ без какого-либо учета (на ее фоне) вклада малой, то нерелятивистский предел должен рассматриваться как нулевое приближение по малому параметру $\varphi(x)$ со следующим законом преобразования при бустах: $\varphi'(x) = \varphi(x)$, т. е. нерелятивистский спинор ведет себя как скаляр.

Дальнейшая задача будет состоять в анализе свойств симметрии общековариантного уравнения Паули относительно локальных тетрадных 3-вращений. Подвергнем волновую функцию из уравнения (1.3.13) преобразованию из группы $SU(2)$, зависящему в общем случае от всех четырех координат (x^0, x^1, x^2, x^3) :

$$\Psi'(x) = U \Psi(x), \quad U(x) = U(n(x)). \quad (1.4.5a)$$

При этом из исходного уравнения (1.3.13) для штрихованной функции $\Psi'(x)$ может быть получено уравнение

$$\begin{aligned} & \left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial 0} + c\mathfrak{R}_0(x) \right) - eA_0(x) \right] \Psi'(x) = \\ & = \frac{1}{2m} \left[\Theta^i(x) (i\hbar(\partial_i + \mathfrak{R}_i(x)) - \frac{e}{c}A_i(x)) \right]^2 \Psi'(x), \end{aligned} \quad (1.4.5b)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U(x)\sigma^i(x)U^{-1}(x) & \stackrel{def}{=} \Theta^i(x), \\ U(x)B_0(x)U^{-1}(x) + U(x)\partial_0U^{-1}(x) & \stackrel{def}{=} \mathfrak{R}_0(x), \\ U(x)B_i(x)U^{-1}(x) + U(x)\partial_iU^{-1}(x) & \stackrel{def}{=} \mathfrak{R}_i(x). \end{aligned} \quad (1.4.5c)$$

Искомое свойство симметрии уравнения Паули будет установлено, если мы докажем, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \Theta^i(x) & = \sigma^l e_{(l)}^i(x) \stackrel{def}{=} \sigma'^i(x), \quad e_{(l)}^i(x) = O_l^k(n(x)) e_{(k)}^i(x), \\ \mathfrak{R}_0(x) & = -\frac{1}{4} \sigma'^i(x) \nabla_0 \sigma'_i(x) \stackrel{def}{=} B'_0(x), \\ \mathfrak{R}_i(x) & = -\frac{1}{4} \sigma'^j(x) \nabla_i \sigma'_j(x) \stackrel{def}{=} B'_i(x), \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

т. е. эти три штрихованные величины могут быть построены по тому же рецепту, что и старые, но на базе новой (штрихованной) тетрады.

Рассмотрим сначала $\Theta^i(x)$. Имеем

$$\Theta^i(x) = U(n(x)) \sigma^l e_{(l)}^i(x) U^{-1}(n(x)).$$

Используя известное из теории группы $SU(2)$ соотношение

$$U(n) \sigma^l U^{-1}(n) = \sigma^j O_j^l(n),$$

находим

$$\Theta^i(x) = \sigma^j O_j^l(n(x)) e_{(l)}^i(x) = \sigma^j e_{(j)}^i(x) = \sigma'^i(x). \quad (1.4.7)$$

Обращаемся теперь к $\mathfrak{R}_0(x)$:

$$\mathfrak{R}_0(x) = -\frac{1}{4} \sigma'^i(x) U(\nabla_0 \sigma_i(x)) U^{-1} + U \partial_0 U^{-1},$$

откуда после простых операций с матрицами U , U^{-1} и оператором ∇_0 получаем

$$\mathfrak{R}_0(x) = B'_0(x) + U \partial_0 U^{-1} +$$

$$+\frac{1}{4}\sigma'^i(x) [\sigma_i(x)U (\partial_0U^{-1}) - U(\partial_0U^{-1}) \sigma_i(x)] . \quad (1.4.8a)$$

Покажем, что добавка к $B'_0(x)$ в правой части соотношения (1.4.8a) есть тождественный ноль. После вычисления $U \partial_0U^{-1}$ имеем

$$U(n) \partial_0 U^{-1}(n) = (n_0 \partial_0 n_0 + n_1 \partial_0 n_1 + n_2 \partial_0 n_2 + n_3 \partial_0 n_3) + \\ + i (n^j \partial_0 n_0 - n_0 \partial_0 n^j + \epsilon^{klj} n_k \partial_0 n_l) \sigma_j .$$

Здесь первое слагаемое в правой части обращается в тождественный ноль, поскольку оно пропорционально производной ∂_0 от единичного детерминанта. Учитывая теперь тождества

$$\sigma'^i(x) \sigma_i(x) = -3 ,$$

$$\sigma'^i(x) [\sigma_j F^j] \sigma_i(x) \equiv \sigma_j F^j = U \partial_0U^{-1} , \quad (1.4.8b)$$

из (1.4.8a) получаем требуемое равенство. Соотношение для $\mathfrak{R}_i(x)$ из (1.4.6) доказывается совершенно аналогично.

Следовательно, общековариантное уравнение Паули (1.3.13) действительно обладает калибровочной симметрией относительно локальной группы $SU(2)$. Заметим, что здесь аналогично случаю уравнения Дирака паулиевская волновая функция в уравнении (1.3.13) должна быть скаляром относительно общекординатных преобразований.

1.5 Уравнение Дирака в ортогональных координатах и тетраде

Обратимся еще раз к уравнению Дирака (1.1.2) (дополнительно учтем присутствие внешнего электромагнитного поля $A_\alpha(x)$):

$$\left\{ \gamma^\alpha [i\hbar(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha) - \frac{e}{c}A_\alpha] - mc \right\} \Psi = 0 ,$$

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{2} \sigma^{ab} e_{(a)}^\beta e_{(b)\beta;\alpha} , \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a) \quad (1.5.1)$$

или

$$\left\{ \gamma^c [i\hbar (e_{(c)}^\alpha \partial_\alpha + \frac{1}{2} \sigma^{ab} \gamma_{abc}) - \frac{e}{c}A_c] - mc \right\} \Psi = 0 , \quad (1.5.2)$$

где γ_{abc} – символы вращения Риччи:

$$\gamma_{bac} = -\gamma_{abc} = -e_{(b)\beta;\alpha} e_{(a)}^\beta e_{(c)}^\alpha , \quad (1.5.3)$$

$A_a = e_{(a)}^\alpha A_\alpha$ – тетрадные компонентны 4-вектора электромагнитного поля. Теперь, воспользовавшись правилом умножения трех матриц Дирака

$$\begin{aligned}\gamma^c \gamma^a \gamma^b &= \gamma^c g^{ab} - \gamma^a g^{cb} + \gamma^b g^{ca} + i\gamma^5 \epsilon^{cabk} \gamma_k, \\ \gamma^5 &= -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \epsilon^{0123} = +1,\end{aligned}$$

для $\gamma^c \sigma^{ab}$ получаем

$$\gamma^c \sigma^{ab} = \frac{1}{2}(g^{ca} \gamma^b - g^{cb} \gamma^a + i\gamma^5 \epsilon^{cabk} \gamma_k). \quad (1.5.4)$$

С учетом (1.5.4) уравнение (1.5.2) можно представить в виде (далее используем обозначения $e/c\hbar \Rightarrow e$, $mc/\hbar \Rightarrow m$)

$$\left\{ \gamma^k \left[i(e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + \frac{1}{2} e_{(k); \alpha}^\alpha - \frac{i}{4} \gamma^5 \epsilon^{abc}{}_k \gamma_{abc}) - eA_c \right] - m \right\} \Psi = 0. \quad (1.5.5)$$

Вводим обозначения

$$B_k(x) = \frac{1}{2} e_{(k); \alpha}^\alpha(x), \quad C_k(x) = \frac{1}{4} \epsilon^{abc}{}_k \gamma_{abc}(x). \quad (1.5.6)$$

Следовательно, уравнение Дирака (1.5.1) можно представить как

$$\left\{ \gamma^k \left[i(e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + B_k - i\gamma^5 C_k) - eA_a \right] - m \right\} \Psi = 0. \quad (1.5.7)$$

Полученная форма уравнения Дирака примечательна в нескольких отношениях. Так, векторное поле $C_k(x)$ обращается тождественно в ноль во всех ортогональных координатах (и тетрадах), соответственно уравнение Дирака принимает в этих случаях особенно простой вид

$$\left\{ \gamma^k \left[i(e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + B_k) - eA_a \right] - m \right\} \Psi = 0. \quad (1.5.8)$$

Остановимся на доказательстве этого свойства векторного поля $C_k(x)$, составленного из коэффициентов вращения Риччи, более детально. Коэффициенты Риччи определяются как

$$\gamma_{abc} = -e_{(a)\alpha;\beta} e_{(b)}^\alpha e_{(c)}^\beta.$$

Введем антисимметричную по второй паре индексов величину $\lambda_{abc}(x)$ [20]:

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb}. \quad (1.5.9a)$$

Для λ_{abc} можем найти следующее представление через обычные производные от тетрады:

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = (e_{(a)\alpha;\beta} - e_{(a)\beta;\alpha}) e_{(c)}^\alpha e_{(b)}^\beta =$$

$$\begin{aligned}
&= (\partial_\beta e_{(a)\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho e_{(a)\rho} - \partial_\alpha e_{(a)\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^\rho e_{(a)\rho}) e_{(c)}^\alpha e_{(b)}^\beta = \\
&= (\partial_\beta e_{(a)\alpha} - \partial_\alpha e_{(a)\beta}) e_{(c)}^\alpha e_{(b)}^\beta .
\end{aligned} \tag{1.5.9b}$$

Убеждаемся также, что справедливо тождество

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) = \\
&= \frac{1}{2}(\gamma_{abc} - \gamma_{acb} + \gamma_{bca} - \gamma_{bac} - \gamma_{cab} + \gamma_{cba}) \equiv \gamma_{abc} .
\end{aligned} \tag{1.5.9c}$$

Используя это представление для коэффициентов Риччи через величины λ_{abc} , находим для компонент вектора $C_k(x)$ (1.5.6) следующие выражения

$$\begin{aligned}
C_0(x) &= \epsilon^{abc} {}_0\gamma_{abc}(x) = (\lambda_{123} + \lambda_{231} + \lambda_{312}), \\
C_1(x) &= \epsilon^{abc} {}_1\gamma_{abc}(x) = -(\lambda_{203} + \lambda_{302} + \lambda_{023}), \\
C_2(x) &= \epsilon^{abc} {}_2\gamma_{abc}(x) = (\lambda_{301} + \lambda_{013} + \lambda_{130}), \\
C_3(x) &= \epsilon^{abc} {}_3\gamma_{abc}(x) = -(\lambda_{012} + \lambda_{120} + \lambda_{201}).
\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Рассмотрим теперь эти соотношения (1.5.10) в пространстве-времени с диагональной метрикой:

$$\begin{aligned}
dS^2 &= g_{00}(x)(dx^0)^2 + g_{11}(x)(dx^1)^2 + g_{22}(x)(dx^2)^2 + g_{33}(x)(dx^3)^2 = \\
&= h_0^2(x) - h_i^2(x)(dx^i)^2 ;
\end{aligned} \tag{1.5.11a}$$

при этом тетраду выбираем в виде

$$e_{(a)\alpha}(x) = \begin{vmatrix} h_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3(x) \end{vmatrix}. \tag{1.5.11b}$$

С учетом (1.5.11b) и (1.5.9b) для соотношений (1.5.10) получаем

$$\begin{aligned}
C_0(x) &= [\partial_2 e_{(1)3} - \partial_3 e_{(1)2}] e_{(2)}^2 e_{(3)}^3 + [\partial_3 e_{(2)1} - \partial_1 e_{(2)3}] e_{(3)}^3 e_{(1)}^1 + \\
&\quad + [\partial_1 e_{(3)2} - \partial_2 e_{(3)1}] e_{(1)}^1 e_{(2)}^2, \\
C_1(x) &= -[\partial_3 e_{(2)0} - \partial_0 e_{(2)3}] e_{(3)}^3 e_{(0)}^0 - [\partial_0 e_{(3)2} - \partial_2 e_{(3)0}] e_{(0)}^0 e_{(2)}^2 - \\
&\quad - [\partial_2 e_{(0)3} - \partial_3 e_{(0)2}] e_{(2)}^2 e_{(3)}^3, \\
C_2(x) &= [\partial_0 e_{(3)1} - \partial_1 e_{(3)0}] e_{(0)}^0 e_{(1)}^1 + [\partial_1 e_{(0)3} - \partial_3 e_{(0)1}] e_{(1)}^1 e_{(3)}^3 + \\
&\quad + [\partial_3 e_{(1)0} - \partial_0 e_{(1)3}] e_{(3)}^3 e_{(1)}^1, \\
C_3(x) &= -[\partial_1 e_{(0)2} - \partial_2 e_{(0)1}] e_{(1)}^1 e_{(2)}^2 - [\partial_2 e_{(1)0} - \partial_0 e_{(1)2}] e_{(2)}^2 e_{(0)}^0 -
\end{aligned}$$

$$-[\partial_0 e_{(2)1} - \partial_1 e_{(2)0}] e_{(0)}^0 e_{(1)}^1.$$

Замечаем, что во всех этих соотношениях производные берутся только от недиагональных элементов тетрадной матрицы $e_{(a)\beta}(x)$, т. е. от нулевых элементов; следовательно, все эти величины $C_k(x)$ обращаются тождественно в ноль. Таким образом, если в пространстве-времени используются ортогональные координаты и сопутствующая им диагональная тетрада, то свертка по трем индексам коэффициентов вращения Риччи $\gamma_{abc}(x)$ с символом Леви-Чивита ϵ^{abcd} обращается тождественно в ноль:

$$C_k(x) = \frac{1}{4} \epsilon^{abc}{}_k \gamma_{abc}(x) \equiv 0. \quad (1.5.12)$$

1.6 Уравнение Дирака и коэффициенты вращения Риччи

Отметим, что из 24 коэффициентов Риччи γ_{abc} в уравнение Дирака входят только 8 компонент: векторы B_a и C_a (1.5.6). Другими словами, спинорная частица "замечает" эффективно только часть геометрических свойств пространства-времени (8 компонент коэффициентов Риччи) и никак не "откликается" на ту часть геометрических свойств, которая описывается оставшимися 16 компонентами коэффициентов Риччи.

Выделим в объекте $\gamma_{abc}(x)$ эти 8 существенных составляющих. Напомним определяющие их соотношения:

$$B_k(x) = \frac{1}{2} e_{(k);a}^\alpha(x), \quad C_k(x) = \frac{1}{4} \epsilon^{abc}{}_k \gamma_{abc}(x).$$

Для этого, прежде всего, осуществим разложение

$$\begin{aligned} \gamma_{abc}(x) &= [\gamma_{abc}(x) - A \epsilon_{abc}{}^n C_n(x)] + A \epsilon_{abc}{}^n C_n(x) = \\ &= \Delta_{[ab]c}(x) + A \epsilon_{abc}{}^n C_n(x). \end{aligned} \quad (1.6.1a)$$

Постоянную A выбираем такой, чтобы свертка величины $\Delta_{[ab]c}(x)$ с символом Леви-Чивита обращалась в ноль:

$$\begin{aligned} \epsilon^{abc}{}_m \Delta_{[ab]c}(x) &= 4 C_m(x) - A (\epsilon^{abc}{}_m \epsilon_{abc}{}^n) C_n(x) = \\ &= 4 C_m - A (-6\delta_m^n) C_n(x) \equiv 0 \quad \implies \quad A = -\frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (1.6.1b)$$

Вводим обозначение

$$C_{[abc]}(x) = -\frac{2}{3} \epsilon_{abc}{}^n C_n(x). \quad (1.6.2a)$$

Разложение (1.6.1a) примет вид

$$\gamma_{abc}(x) = \Delta_{[ab]c}(x) + C_{[abc]}(x). \quad (1.6.2b)$$

Соотношение (1.6.2b) – это разложение величины $\gamma_{abc}(x)$ на ортогональную $\Delta_{[ab]c}(x)$ и неортогональную $C_{[abc]}(x)$ тензору Леви-Чивита составляющие:

$$\epsilon^{abc}{}^m \Delta_{[ab]c}(x) = 0, \quad \epsilon^{abc}{}^m C_{[abc]}(x) = +\frac{2}{3} C_m(x). \quad (1.6.2c)$$

Используя известное соотношение для свертки двух тензоров Леви-Чивита по одному индексу

$$\epsilon^{klm}{}_n \epsilon_{abc}{}^n = (-1) \begin{vmatrix} \delta_a^k & \delta_b^k & \delta_c^k \\ \delta_a^l & \delta_b^l & \delta_c^l \\ \delta_a^m & \delta_b^m & \delta_c^m \end{vmatrix},$$

для величины $C_{[abc]}(x)$ из (1.6.2a) находим представление

$$C_{[abc]} = -\frac{2}{3} \epsilon_{abc}{}^n \frac{1}{4} \epsilon^{klm}{}_k \gamma_{klm} \equiv \frac{1}{3} (\gamma_{abc} + \gamma_{bca} + \gamma_{cab}). \quad (1.6.3a)$$

В соответствии с этим для величины Δ_{abc} получаем

$$\Delta_{[ab]c} = \frac{2}{3} \gamma_{abc} + \frac{1}{3} (\gamma_{acb} - \gamma_{bca}). \quad (1.6.3b)$$

Обращаем внимание на то, что из составляющей $C_{[abc]}(x)$ нельзя упрощением по какой-либо паре индексов выделить ненулевой "вектор"; но такие ненулевые векторы можно выделить из второй составляющей $\Delta_{abc}(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{[ab]c} &= [\Delta_{[ab]c} - \alpha (g_{ac} B_b - g_{bc} B_a)] + \\ &+ \alpha (g_{ac} B_b - g_{bc} B_a) = E_{[ab]c} + B_{[ab]c}, \end{aligned} \quad (1.6.4a)$$

где

$$\begin{aligned} B_b &= \gamma_{kb}{}^k = -\gamma_b{}^k{}_k, \\ B_{[ab]c} &= \alpha (g_{ac} B_b - g_{bc} B_a), \\ E_{[ab]c} &= \Delta_{[ab]c} - B_{[ab]c}. \end{aligned} \quad (1.6.4b)$$

Полагая в соотношениях (1.6.4a), (1.6.4b) величину α , равной $+1/3$, обеспечим выполнение равенств:

$$\begin{aligned} B_{[kb]}{}^k &= B_b, & B_{[bk]}{}^k &= -B_b, \\ E_{[kb]}{}^k &= 0, & E_{[bk]}{}^k &= 0. \end{aligned} \quad (1.6.5a)$$

Кроме того, поскольку тензор $B_{[ab]c}(x)$ ортогонален тензору Леви-Чивита, то ортогональной тензору Леви-Чивита будет и величина $E_{[ab]c}(x)$:

$$\epsilon^{abc} E_{[ab]c}(x) = 0. \quad (1.6.5b)$$

Таким образом, нужное выделение 8 существенных компонент среди 24 коэффициентов Риччи осуществляется разложением

$$\begin{aligned} \gamma_{abc}(x) &= C_{[abc]}(x) + B_{[ab]c}(x) + E_{[ab]c}(x), \\ C_{[abc]}(x) &= -\frac{2}{3} \epsilon_{abc}{}^n C_n(x), \\ B_{[ab]c}(x) &= \frac{1}{3} [g_{ac} B_b(x) - g_{bc} B_a(x)]. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

1.7 Майорановское спинорное поле в римановом пространстве

Рассмотрим общековариантное уравнение Дирака

$$\{ \gamma^\alpha(x) [i (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - e A_\alpha] - m \} \Psi(x) = 0, \quad (1.7.1)$$

$$\gamma^\alpha(x) = \gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad \Gamma_\alpha(x) = \frac{1}{2} \sigma^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b);\beta}^\alpha)$$

в специальном, так называемом майорановском, базисе биспинорного пространства. Майорановский базис обладает следующими свойствами:

$$(i \gamma_M^a)^* = +\gamma_M^a, \quad (\sigma_M^{ab})^* = +\sigma_M^{ab}, \quad (i \gamma_M^5)^* = +\gamma_M^5. \quad (1.7.2)$$

Следовательно, в таком базисе при отсутствии электромагнитного поля и наличии только гравитационного (римановой геометрии пространства-времени) волновой оператор в (1.7.1) вещественный:

$$[i \gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m]^* = [i \gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m].$$

Это означает, что вещественная и мнимая части биспинора не перемешиваются гравитационными членами, учитывающими искривление геометрии пространства-времени; другими словами, существуют общековариантные волновые уравнения, отдельные для поля φ_+ и поля φ_- :

$$\begin{aligned} \Psi_M &= \varphi_+ + i \varphi_-, \\ [i \gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m] \varphi_+ &= 0, \\ [i \gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m] \varphi_- &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

К аналогичному выводу придем также, если будем использовать другую форму представления уравнения Дирака (см. (1.5.5)):

$$B_k(x) = \frac{1}{2} e_{(k)}^\alpha{}_{;\alpha}(x), \quad C_k(x) = \frac{1}{4} \epsilon^{abc}{}_k \gamma_{abc}(x).$$

$$\{\gamma^k [i (e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + B_k - i\gamma^5 C_k) - eA_a] - m\} \Psi = 0. \quad (1.7.4)$$

В отсутствие внешнего электромагнитного поля вещественная и мнимая части биспинора не перемешиваются общековариантным волновым оператором, учитывающим искривление геометрии пространства-времени:

$$\begin{aligned} \Psi_M &= \varphi_+ + i \varphi_-, \\ \left[i \gamma^k (e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + B_k - i\gamma^5 C_k) - m \right] \varphi_+ &= 0, \\ \left[i \gamma^k (e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + B_k - i\gamma^5 C_k) - m \right] \varphi_- &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Таким образом, есть два майорановских спинорных поля: вещественное $\varphi_+(x)$ и чисто мнимое $i \varphi_-$, которые могут взаимодействовать с внешним гравитационным полем согласно (1.7.3) или (1.7.5).

Глава 2

УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ФОКА – ГОРДОНА И ШРЕДИНГЕРА ВО ВНЕШНИХ ГРАВИТАЦИОННОМ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЯХ

2.1 Уравнение Клейна – Фока – Гордона

Уравнение для скалярной частицы в пространстве-времени с метрикой $dS^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ выберем в виде

$$\left[(i\hbar \nabla_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha) g^{\alpha\beta}(x) (i\hbar \nabla_\beta + \frac{e}{c} A_\beta) - \frac{\hbar^2}{6} R - m^2 c^2 \right] \Psi(x) = 0. \quad (2.1.1a)$$

Чтобы не загромождать формулы, будем использовать сокращенные обозначения:

$$\frac{e}{\hbar c} \implies e, \quad \frac{mc}{\hbar} \implies m; \quad (2.1.1b)$$

тогда основное уравнение примет вид:

$$\left[(i \nabla_\alpha + e A_\alpha) g^{\alpha\beta}(x) (i \nabla_\beta + e A_\beta) - \frac{1}{6} R - m^2 \right] \Psi(x) = 0. \quad (2.1.1c)$$

Представляем его как

$$\begin{aligned} & \left[i^2 \nabla_\alpha g^{\alpha\beta}(x) \nabla_\beta + ie (\nabla_\alpha g^{\alpha\beta}(x) A_\beta) + 2ie A_\alpha g^{\alpha\beta}(x) \nabla_\beta + \right. \\ & \left. + e^2 A_\alpha g^{\alpha\beta}(x) A_\beta - \frac{1}{6} R - m^2 \right] \Psi(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.2a)$$

Пользуясь известными формулами для общековариатных оператора Лапласа и дивергенции [20]:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha g^{\alpha\beta}(x) \nabla_\beta \Phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Psi, \\ \nabla_\alpha g^{\alpha\beta} A_\beta &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} A_\beta, \quad g = \det(g_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (2.1.2b)$$

предыдущее уравнение переписываем в виде

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (i \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + e A_\alpha) \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(x) (i \frac{\partial}{\partial x^\beta} + e A_\beta) - \frac{1}{6} R - m^2 \right] \Psi = 0. \quad (2.1.3a)$$

В обычных единицах это уравнение записывается как

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{e}{c} A_\alpha) \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(x) (i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{e}{c} A_\beta) - \frac{\hbar^2}{6} R - m^2 c^2 \right] \Psi = 0. \quad (2.1.3b)$$

2.2 Нерелятивистский предел на фоне римановой геометрии

Рассмотрим теперь вопрос о шредингеровском уравнении в римановом пространстве-времени. Будем исходить из общековариантной тензорной системы уравнений первого порядка, для общности анализа включим дополнительный член взаимодействия с внешним гравитационным фоном через скалярную кривизну:

$$\begin{aligned} (i \nabla_\alpha + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha) \Phi &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_\alpha, \\ (i \nabla_\alpha + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha) \Phi^\alpha &= \frac{mc}{\hbar} (1 + \sigma \frac{R(x)}{m^2 c^2 / \hbar^2}) \Phi. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Используем сокращенное обозначение

$$1 + \sigma \frac{R(x)}{m^2 c^2 / \hbar^2} = \Gamma(x),$$

тогда уравнения (2.2.1) можно переписать в другом виде:

$$\begin{aligned} (i \partial_\alpha + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha) \Phi(x) &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_\alpha, \\ (\frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha) g^{\alpha\beta} \Phi_\beta &= \frac{mc}{\hbar} \Gamma \Phi. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Рассматривая пространство-время с метрикой

$$dS^2 = c^2 dt^2 + g_{kl}(x) dx^k dx^l,$$

проведем в (2.2.2) расщепление (3+1):

$$\begin{aligned} (i \partial_0 + \frac{e}{c\hbar} A_0) \Phi &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_0, \\ (i \partial_l + \frac{e}{c\hbar} A_l) \Phi(x) &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_l, \\ (\frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar} A_0) \Phi_0 + \\ + (\frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar} A_k) g^{kl} \Phi_l &= \frac{mc}{\hbar} \Gamma \Phi \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (i \partial_0 + \frac{e}{c\hbar} A_0) \Phi &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_0, \\ (i \partial_l + \frac{e}{c\hbar} A_l) \Phi &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(i \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^0} + \frac{e}{c\hbar} A_0 \right) \Phi_0 + \\
& + \left(\frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar} A_k \right) g^{kl} \Phi_l = \frac{mc}{\hbar} \Gamma \Phi .
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Выделяем энергию покоя подстановками

$$\begin{aligned}
\Phi & \Longrightarrow \exp \left(-i \frac{mc^2 t}{\hbar} \right) \Phi , \quad \Phi_0 \Longrightarrow \exp \left(-i \frac{mc^2 t}{\hbar} \right) \Phi_0 , \\
\Phi_l & \Longrightarrow \exp \left(-i \frac{mc^2 t}{\hbar} \right) \Phi_l .
\end{aligned}$$

При этом из (2.2.3) получаем:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{i}{c} \partial_t + \frac{mc}{\hbar} + \frac{e}{c\hbar} A_0 \right) \Phi(x) = \frac{mc}{\hbar} \Phi_0(x) , \\
& \left(\frac{i}{c} \partial_t + \frac{mc}{\hbar} + \frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} + \frac{e}{c\hbar} A_0 \right) \Phi_0 + \\
& + \left(\frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar} A_k \right) g^{kl} \Phi_l = \frac{mc}{\hbar} \Gamma \Phi(x) , \\
& \left(i \partial_l + \frac{e}{c\hbar} A_l \right) \Phi(x) = \frac{mc}{\hbar} \Phi_l(x)
\end{aligned}$$

или

$$\left(i\hbar \partial_t + mc^2 + eA_0 \right) \Phi(x) = mc^2 \Phi_0(x) , \tag{2.2.4a}$$

$$\begin{aligned}
& \left(i\hbar \partial_t + mc^2 + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} + e A_0 \right) \Phi_0 + \\
& + e \left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \Phi_l = mc^2 \Gamma \Phi(x) ,
\end{aligned} \tag{2.2.4b}$$

$$\left(i \hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \Phi(x) = mc \Phi_l(x) . \tag{2.2.4c}$$

С помощью (2.2.4c) исключаем векторную (нединамическую) переменную Φ_l :

$$\left(i\hbar \partial_t + mc^2 + eA_0 \right) \Phi(x) = mc^2 \Phi_0(x) , \tag{2.2.5a}$$

$$\begin{aligned}
& \left(i\hbar \partial_t + mc^2 + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} + e A_0 \right) \Phi_0 + \\
& + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \left(i \hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \Phi(x) = mc^2 \Gamma \Phi(x) .
\end{aligned} \tag{2.2.5b}$$

Теперь предположим, что можно ввести малую компоненту φ и большую компоненту Ψ :

$$\begin{aligned} \Phi - \Phi_0 &= \varphi, & \Phi + \Phi_0 &= \Psi ; \\ \Phi &= \frac{\Psi + \varphi}{2}, & \Phi_0 &= \frac{\Psi - \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Подставим эти соотношения в (2.2.5):

$$(i\hbar \partial_t + mc^2 + eA_0) \frac{\Psi + \varphi}{2} = mc^2 \frac{\Psi - \varphi}{2}, \quad (2.2.7a)$$

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \partial_t + mc^2 + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} + e A_0 \right) \frac{\Psi - \varphi}{2} + \\ & + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \frac{\Psi + \varphi}{2} = mc^2 \Gamma \frac{\Psi + \varphi}{2}, \end{aligned} \quad (2.2.7b)$$

откуда, приводя подобные члены, получим:

$$(i\hbar \partial_t + eA_0) \frac{\varphi + \Psi}{2} = -mc^2 \varphi, \quad (2.2.8a)$$

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \partial_t + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} + e A_0 \right) \frac{\Psi - \varphi}{2} + \\ & + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \frac{\Psi - \varphi}{2} = \\ & = mc^2 (\Gamma + 1) \frac{\varphi}{2} + mc^2 (\Gamma - 1) \frac{\Psi}{2}. \end{aligned} \quad (2.2.8b)$$

Начиная с этого места, два разных случая следует рассматривать по отдельности. Первый случай реализуется, когда с самого начала требуем выполнения равенства $\Gamma = 1$. Это означает, что начинать следовало в (2.2.1) только с учетом минимального взаимодействия скалярной частицы с гравитационным фоном без добавки, зависящей от скалярной кривизны $R(x)$. Тогда предыдущие уравнения дают (пренебрегаем малой компонентой φ в сравнении с большой Ψ)

$$(i\hbar \partial_t + eA_0) \frac{\Psi}{2} = -mc^2 \varphi, \quad (2.2.9a)$$

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \partial_t + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} + e A_0 \right) \frac{\Psi}{2} + \\ & + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \frac{\Psi}{2} = mc^2 \varphi. \end{aligned} \quad (2.2.9b)$$

Исключая из второго уравнения малую компоненту с помощью первого уравнения, приходим к уравнению типа Шредингера:

$$\begin{aligned} & \left[i\hbar(\partial_t + \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t}) + eA_0 \right] \Psi = \\ & = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) (-g^{kl}) \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \Psi . \end{aligned} \quad (2.2.10a)$$

Подстановкой

$$\Psi \implies (-g)^{-1/4} \Psi$$

уравнение (2.2.10a) приводится к более простому виду:

$$(i\hbar \partial_t + eA_0) \Psi = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) (-g^{kl}) \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \Psi . \quad (2.2.10b)$$

Вторая возможность реализуется, когда $\Gamma \neq 1$, при этом из (2.2.8) следует

$$(i\hbar \partial_t + eA_0) \frac{\Psi}{2} = -mc^2 \varphi , \quad (2.2.11a)$$

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \partial_t + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} + e A_0 \right) \frac{\Psi}{2} + \\ & + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \frac{\Psi}{2} = \\ & = mc^2 (\Gamma + 1) \frac{\varphi}{2} + mc^2 (\Gamma - 1) \frac{\Psi}{2} , \end{aligned} \quad (2.2.11b)$$

и уравнение для большей компоненты Ψ принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \partial_t + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} + e A_0 \right) \frac{\Psi}{2} + \\ & + \frac{(\Gamma + 1)}{2} (i\hbar \partial_t + eA_0) \frac{\Psi}{2} - mc^2 (\Gamma - 1) \frac{\Psi}{2} = \\ & = -\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \Psi . \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Это уравнение может быть переписано иначе:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x) + 1}{2} \right) (i\hbar \partial_t + e A_0) + \frac{i\hbar}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} \right] \Psi = \\ & = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) (-g^{kl}) \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \Psi + mc^2 \frac{(\Gamma(x) - 1)}{2} \Psi . \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Вспоминаем, что

$$\Gamma(x) = 1 + \frac{1}{6} \frac{\hbar^2 R(x)}{m^2 c^2},$$

тогда предыдущее уравнение запишется так:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{1}{24} \frac{\hbar^2 R(x)}{m^2 c^2} \right) (i\hbar \partial_t + e A_0) + \frac{i\hbar}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} \right] \Psi = \\ & = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) (-g^{kl}) \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] + \hbar^2 \frac{R}{6} \Psi. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Полученное уравнение следует рассматривать как обобщенное уравнение Шредингера в пространстве-времени с ненулевой скалярной кривизной, учитывающее неминимальное взаимодействие с внешним геометрическим фоном.

Сделаем несколько дополнительных замечаний. Нужно обратить внимание на то, что волновой функцией уравнения Шредингера (2.2.10b), нерелятивистского предела исходного уравнения Клейна – Фока – Гордона, является не скалярная функция исходного уравнения Клейна – Фока – Гордона. В действительности мы имеем следующее представление (см. (2.2.6a)):

$$\Psi = \Phi + \Phi_0, \quad \Phi_0 \in \{ \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \}. \quad (2.2.15)$$

В этом факте можно увидеть не случайность, а закономерную необходимость. Действительно, в силу первого уравнения в (2.2.1) составляющая

$$\Phi_0 = i \frac{\hbar}{mc} \nabla_0 \Phi, \quad \Phi^* = +\Phi \quad (2.2.16)$$

является комплексной функцией координат. Данная ситуация тем более удовлетворительная еще и потому, что принципиально важно: невозможно написать уравнение Шредингера для вещественного поля – оно обязательно должно быть комплексным.

Глава 3

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКАЯ ЧАСТИЦА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ФОНЕ ПРОСТРАНСТВ ЛОБАЧЕВСКОГО И РИМАНА

Квантование движения частиц во внешнем однородном магнитном поле является одной из основных задач в квантовой механике [21], [31]–[34]. В 1985–2010 годах в литературе исследовалось обобщение этой задачи на случай пространства с неевклидовой геометрией, в частности задача Ландау на гиперболической и сферической плоскостях:

Комтет [35], [36], Аоки – Гроше [37], [38], Клаудер – Оноффри [39], Аврон – Пнюэли [40], Плющей [41]–[43], Дюне [44], Алимлхамеди и др. [45], [46], Оноффри [47], Негро и др. [48], Камбоа и др. [49], Клишевич – Злющей [50], Дракер и др. [51], Гханми – Интисар [52], Кори и др. [53], Алварец и др. [54].

Динамика этих систем оказалась очень интересной как на классическом, так и на квантовом уровнях. В настоящей и последующей главах будет проведено обобщение анализа этих систем на трехмерный случай пространств с постоянной кривизной, пространства Лобачевского H_3 и пространства Римана S_3 ; изложение основывается на работах авторов [61]–[74].

Олевским [55] были найдены все системы ортогональных координат (x^1, x^2, x^3) в 3-мерных пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны, соответственно S_3 и H_3 , допускающие полное разделение переменных в уравнении $(\Delta_2 + \lambda)f(x) = 0$. Идея состоит в том, чтобы среди этих систем координат установить некоторый аналог цилиндрических координат, в которых можно легко определить понятие однородного магнитного поля в искривленных пространствах, и затем попытаться решить обобщенное уравнение Шредингера в этих пространствах в присутствии внешнего однородного магнитного поля.

3.1 Специальные системы цилиндрических координат в пространствах S_3 и H_3 и однородное магнитное поле

В работе Олевского [55] под номером *XI* приведены следующие координаты (мы используем удобные в дальнейшем обозначения и 4-мерный метрический тензор)

в пространстве S_3 :

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \rho^2 [\cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) - dz^2],$$
$$z \in [-\pi/2, +\pi/2], \quad r \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi],$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \cos z \sin r \cos \phi, & u_2 &= \cos z \sin r \sin \phi, \\
u_3 &= \sin z, & u_0 &= \cos z \cos r, & u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_0^2 &= 1;
\end{aligned} \tag{3.1.1a}$$

в пространстве H_3 :

$$\begin{aligned}
dS^2 &= c^2 dt^2 - \rho^2 [\operatorname{ch}^2 z (dr^2 + \operatorname{sh}^2 r d\phi^2) - dz^2], \\
z &\in (-\infty, +\infty), & r &\in [0, +\infty], & \phi &\in [0, 2\pi], \\
u_1 &= \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \cos \phi, & u_2 &= \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \sin \phi, \\
u_3 &= \operatorname{sh} z, & u_0 &= \operatorname{ch} z \operatorname{ch} r, & u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_0^2 &= -1.
\end{aligned} \tag{3.1.1b}$$

Радиус кривизны обозначен как ρ . При устремлении радиуса кривизны к бесконечности введенные координаты в пространствах S_3 и H_3 переходят в обычные цилиндрические координаты: нужно формально ограничиться очень малой частью искривленного пространства, для этого достаточно переменные z и r устремить к нулю

в пространстве E_3 :

$$dS^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2]. \tag{3.1.1c}$$

Воспользуемся известным представлением для векторного потенциала постоянного магнитного поля [20] в плоском пространстве:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad A^a = \frac{Br}{2} (0; -\sin \phi, \cos \phi, 0); \tag{3.1.2a}$$

после пересчета к цилиндрическим координатам получаем

$$\begin{aligned}
A_t &= 0, & A_r &= \frac{\partial x^1}{\partial r} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial r} A_2 = 0, & A_z &= 0, \\
A_\phi &= \frac{\partial x^1}{\partial \phi} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \phi} A_2 = -r \sin \phi A_1 + r \cos \phi A_2 = -\frac{Br^2}{2}.
\end{aligned} \tag{3.1.2b}$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора

$$A_\phi = -\frac{Br^2}{2} \implies F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = Br, \tag{3.1.3a}$$

которая удовлетворяет уравнению Максвелла:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} = 0 \implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r F^{\phi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(-\frac{1}{r^2}\right) Br \equiv 0. \tag{3.1.3b}$$

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах (3.1.2b) можно легко обобщить на случаи искривленных пространств.

Действительно, введем в цилиндрических координатах пространства S_3 электромагнитное поле с потенциалом

в пространстве S_3 :

$$A_\phi = -2B \sin^2 \frac{r}{2} = 2B (\cos r - 1). \quad (3.1.4a)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора

$$F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = B \sin r, \quad (3.1.4b)$$

которая удовлетворяет уравнению Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} = 0 &\implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r F^{\phi r} = \\ = \frac{1}{\cos^2 z \sin r} \frac{\partial}{\partial r} \cos^2 z \sin r \left(-\frac{1}{\cos^2 z \sin^2 r} \right) B \sin r &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.1.4c)$$

Аналогично в пространство Лобачевского вводим электромагнитное поле с потенциалом

в пространстве H_3 :

$$A_\phi = -2B \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} = -2B (\operatorname{ch} r - 1). \quad (3.1.5a)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора (напоминаем, что в искривленном пространстве r – безразмерная координата):

$$F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \rho^{-1} \partial_r A_\phi = B \operatorname{sh} r, \quad (3.1.5b)$$

которая удовлетворяет уравнению Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} = 0 &\implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r F^{\phi r} = \\ = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh} r} \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh} r \left(-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh}^2 r} \right) B \operatorname{sh} r &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.1.5c)$$

3.2 Уравнение Шредингера в пространствах S_3 и H_3 , разделение переменных в присутствии постоянного магнитного поля

Нерелятивистское уравнение Шредингера в пространстве-времени с метрикой

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{kl}(x)dx^k dx^l, \quad g = \det(g_{kl}(x))$$

имеет вид:

$$(i\hbar \partial_t + e A_0) \Psi = H \Psi, \quad H = \frac{1}{2M} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) (-g^{kl}(x)) (i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l) \right] \Psi. \quad (3.2.1)$$

В пространстве S_3 в цилиндрических координатах и во внешнем однородном магнитном поле

$$dS^2 = c^2 dt^2 - [\cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) + dz^2], \quad g = -\cos^2 z \sin^2 r, \quad A_\phi = 2BR^2 (\cos r - 1) \quad (3.2.2a)$$

гамильтониан H запишется так:

$$H = \frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left[\frac{i}{\cos^2 z \sin r} \frac{\partial}{\partial r} \cos^2 z \sin r \left(\frac{1}{\cos^2 z} \right) i \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{i}{\cos^2 z \sin r} \frac{\partial}{\partial \phi} \cos^2 z \sin r + \frac{e}{\hbar c} A_\phi \right) \left(\frac{1}{\cos^2 z \sin^2 r} \right) \left(i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e}{\hbar c} A_\phi \right) + \frac{i}{\cos^2 z \sin r} \frac{\partial}{\partial z} \cos^2 z \sin r i \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

т. е.

$$H = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left[-\frac{1}{\cos^2 z \sin r} \frac{\partial}{\partial r} \sin r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\cos^2 z \sin^2 r} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e}{\hbar c} A_\phi \right)^2 - \frac{1}{\cos^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \cos^2 z \frac{\partial}{\partial z} \right]. \quad (3.2.2b)$$

Переменные в уравнении Шредингера делятся подстановкой

$$\Psi = e^{-iEt/\hbar} e^{im\phi} Z(z) R(r), \quad \epsilon = E/(\hbar^2/M\rho^2). \quad (3.2.3)$$

Действительно, из уравнения Шредингера находим

$$\frac{1}{Z} \left(2\epsilon \cos^2 z Z + \frac{d}{dz} \cos^2 z \frac{dZ}{dz} \right) = \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{\sin r} \frac{d}{dr} \sin r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\sin^2 r} \left(-m + \frac{e}{\hbar c} A_\phi \right)^2 R \right).$$

Вводим постоянную разделения λ , в результате получаем систему из двух уравнений

в пространстве S_3 :

$$\frac{d}{dz} \cos^2 z \frac{dZ}{dz} + 2\epsilon \cos^2 z Z = \lambda Z, \quad (3.2.4a)$$

$$-\frac{1}{\sin r} \frac{d}{dr} \sin r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\sin^2 r} \left(m + \frac{eB}{\hbar c} 2\rho^2 \sin^2 \frac{r}{2} \right)^2 R = \lambda R. \quad (3.2.4b)$$

Аналогичная система уравнений в пространстве Лобачевского имеет вид

в пространстве H_3 :

$$\frac{d}{dz} \operatorname{ch}^2 z \frac{dZ}{dz} + 2\epsilon \operatorname{ch}^2 z Z = \lambda Z, \quad (3.2.5a)$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sh} r} \frac{d}{dr} \operatorname{sh} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} \left(m + \frac{eB}{\hbar c} 2\rho^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} \right)^2 R = \lambda R. \quad (3.2.5b)$$

В пределе плоского пространства эти уравнения упрощаются:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2EM}{\hbar^2} Z = \Lambda Z,$$

$$Z = e^{\pm i P z / \hbar}, \quad \Lambda = \frac{2M}{\hbar^2} \left(E - \frac{P^2}{2M} \right), \quad (3.2.6a)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(m + \frac{eB}{\hbar c} \frac{r^2}{2} \right)^2 R = \frac{2M}{\hbar^2} \left(E - \frac{P^2}{2M} \right) R. \quad (3.2.6b)$$

Последнее уравнение совпадает с известным результатом (см. [21]):

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R \right) + \left[E - \frac{P^2}{2M} - \frac{\omega^2}{8} r^2 - \frac{\hbar \omega m}{2} \right] R = 0, \quad (3.2.6c)$$

где $\omega = eB/Mc$.

3.3 Решение радиального уравнения в пространстве H_3

Рассмотрим радиальное дифференциальное уравнение (3.2.5b), возникающее для системы Ландау в пространстве Лобачевского:

$$-\frac{1}{\operatorname{sh} r} \frac{d}{dr} \operatorname{sh} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} \left(m + \frac{eB}{\hbar c} 2\rho^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} \right)^2 R = \lambda R. \quad (3.3.1a)$$

Дальше будем использовать безразмерный параметр

$$\frac{eB}{\hbar c} \rho^2 \quad \Longrightarrow \quad B ;$$

уравнение представим в виде

$$\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{\text{th } r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{\text{sh}^2 r} [m + B(\text{ch } r - 1)]^2 R + \lambda R = 0 . \quad (3.3.1b)$$

Перейдем к новой переменной $\text{ch } r - 1 = y$, $y \in [0, +\infty)$. Уравнение трансформируется в следующее:

$$y(2+y) \frac{d^2}{dy^2} + 2(1+y) \frac{d}{dy} - \frac{(m+By)^2}{y(y+2)} R + \lambda R = 0 . \quad (3.3.2)$$

Сделаем еще одну замену переменных $y = -2z$:

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} - \frac{(m-2Bz)^2}{4z(1-z)} - \lambda \right] R = 0 . \quad (3.3.3)$$

Для дальнейшего более удобно представить уравнение в виде

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} - \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{z} - 4B^2 + \frac{(m-2B)^2}{1-z} \right) - \lambda \right] R = 0 . \quad (3.3.4)$$

Рассмотрим поведение функции R около 0 и 1 (обратите внимание на то, что точка 1 лежит вне области изменения физического параметра r):

$$z \longrightarrow 0 , \quad z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} - \frac{m^2}{4z} R - \lambda R = 0 , \quad R(z) \sim z^a ,$$

$$\frac{a(a-1)}{z} + \frac{a}{z} - \frac{m^2}{4z} - \lambda = 0 , \quad a = \pm \frac{m}{2} ; \quad (3.3.5a)$$

$$z \longrightarrow 1 , \quad (1-z) \frac{d^2 R}{dz^2} - \frac{dR}{dz} - \frac{(m-2B)^2}{4(1-z)} R = 0 , \quad R(z) \sim (1-z)^b$$

$$b(b-1) + b - \frac{(m-2B)^2}{4} = 0 , \quad b = \pm \frac{m-2B}{2} . \quad (3.3.5b)$$

Сделаем в уравнении (3.3.4) подстановку

$$R = z^a (1-z)^b F ,$$

$$R' = az^{a-1}(1-z)^b F - bz^a(1-z)^{b-1} F + z^a(1-z)^b F' ,$$

$$R'' = a(a-1)z^{a-2}(1-z)^b F - abz^{a-1}(1-z)^{b-1} F + az^{a-1}(1-z)^b F' - \\ - abz^{a-1}(1-z)^{b-1} F + b(b-1)z^a(1-z)^{b-2} F - bz^a(1-z)^{b-1} F' +$$

$$+az^{a-1}(1-z)^b F' - bz^a(1-z)^{b-1} F' + z^a(1-z)^b F'' ,$$

уравнение (3.3.4) приводит к

$$+z(1-z) F'' + [a(1-z) - bz + a(1-z) - bz + (1-2z)] F' + \\ + \frac{1}{z} [a(a-1) + a - \frac{m^2}{4}] F + \frac{1}{1-z} [b(b-1) + b - \frac{(m-2B)^2}{4}] F - \\ - [a(a+1) + 2ab + b(b+1) - B^2 + \lambda] F = 0 .$$

Накладываем ограничения на параметры

$$a = \pm \frac{m}{2} , \quad b = \pm \frac{m-2B}{2} ; \quad (3.3.6a)$$

приходим к уравнению

$$z(1-z) F'' + [(2a+1) - 2(a+b+1)z] F' - \\ - [a(a+1) + 2ab + b(b+1) - B^2 + \lambda] F = 0 , \quad (3.3.6b)$$

т. е. к уравнению для гипергеометрической функции

$$z(1-z) F + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] F' - \alpha\beta F = 0 . \quad (3.3.6c)$$

Исходная подстановка для волновой функции в переменной r выглядит как (будем искать функции, отвечающие связанным состояниям, следовательно, параметры a и b следует выбирать положительными и отрицательными соответственно)

$$z = -\text{sh}^2 \frac{r}{2} , \quad z \in (-\infty, +0] , \quad r \in [0, +\infty) ;$$

$$R = (-\text{sh} \frac{r}{2})^{|m|} (\text{ch} \frac{r}{2})^{-|m-2B|} F(\alpha, \beta, \gamma; -\text{sh}^2 \frac{r}{2}) . \quad (3.3.7)$$

Параметры (α, β, γ) определены равенствами

$$\gamma = 2a + 1 = + |m| + 1 , \quad a = + \frac{|m|}{2} , \quad b = - \frac{|m-2B|}{2} ,$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2a + 2b + 1 , \\ \alpha \beta = (a+b)(a+b+1) - B^2 + \lambda ; \end{cases}$$

т. е.

$$\gamma = 2a + 1 = + |m| + 1 , \\ \alpha = a + b + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} - \lambda} , \quad \beta = a + b + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} - \lambda} . \quad (3.3.8)$$

Первое возможное условие обрыва гипергеометрического ряда до полинома имеет вид:

$$\alpha = a + b + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + \frac{1}{4}} - \lambda = -n = 0, -1, -2, \dots, \quad (3.3.9a)$$

откуда следует правило квантования:

$$a + b + \frac{1}{2} + n \geq 0, \quad \lambda = \frac{1}{4} + B^2 - (a + b + n + \frac{1}{2})^2 \quad (3.3.9b)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{|m|}{2} - \frac{|m - 2B|}{2} + n + \frac{1}{2} \geq 0, \\ & \lambda = \frac{1}{4} + B^2 - \left(\frac{|m|}{2} - \frac{|m - 2B|}{2} + n + \frac{1}{2} \right)^2, \\ & R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2} \right)^{|m|} \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2} \right)^{-|m-2B|} \times \\ & \times F(-n, |m| - |m - 2B| + 1 + n, |m| + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}). \end{aligned} \quad (3.3.9c)$$

Второе возможное условие обрыва гипергеометрического ряда до полинома имеет вид:

$$\beta = a + b + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4}} - \lambda = -N = 0, -1, -2, \dots; \quad (3.3.10a)$$

откуда следует правило квантования:

$$a + b + \frac{1}{2} + N \leq 0, \quad \lambda = \frac{1}{4} + B^2 - (a + b + \frac{1}{2} + N)^2, \quad (3.3.10b)$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{|m|}{2} - \frac{|m - 2B|}{2} + N + \frac{1}{2} \leq 0, \\ & \lambda = \frac{1}{4} + B^2 - \left(\frac{|m|}{2} - \frac{|m - 2B|}{2} + N + \frac{1}{2} \right)^2, \\ & R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2} \right)^{|m|} \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2} \right)^{-|m-2B|} \times \\ & \times F(|m| - |m - 2B| + 1 + n, -n, |m| + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}). \end{aligned} \quad (3.3.10c)$$

Сначала рассматриваем случай $B > 0$.

Следует по отдельности рассмотреть возможности:

- (1) $m = 0$,
- (2) $m < 0$,
- (3) $0 < m < 2B$,
- (4) $m > 2B > 0$,
- (5) $0 < m = 2B$.

Сначала рассмотрим случай нулевого значения $m = 0$:

$$(1) \quad \underline{m = 0}, \quad a = 0, \quad b = -B. \quad (3.3.11)$$

Применяем к (3.3.11) условие квантования (3.3.9с), в результате приходим к очень специальному случаю существования (или несуществования) отдельного связанного состояния в зависимости от величины магнитного поля:

$$(1) \quad \underline{m = 0}, \quad 0 < B - n \leq \frac{1}{2},$$

$$\lambda - \frac{1}{4} = 2B(n + 1/2) - (n + 1/2)^2,$$

$$R = (\operatorname{ch} \frac{r}{2})^{-2B} F(-n, -2B + 1 + n, +1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}),$$

$$R_{r \rightarrow +\infty} = (\operatorname{ch} \frac{r}{2})^{-2B} (\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2})^n = e^{-(B-n)r}; \quad (3.3.12)$$

например:

$$B = 10, \quad \text{уровней нет};$$

$$B = 10,01, \quad n = 10, \quad \lambda = (10,01)^2 + \frac{1}{4} - (0,01 - \frac{1}{2})^2;$$

$$B = 10,3, \quad n = 10, \quad \lambda = (10,3)^2 + \frac{1}{4} - (0,3 - \frac{1}{2})^2;$$

$$B = 10,5, \quad n = 10, \quad \lambda = (10,5)^2 + \frac{1}{4};$$

$$B = 10,51, \quad \text{уровней нет}; \quad B = 10,99, \quad \text{уровней нет}.$$

Применяем к (3.3.11) условие квантования (3.3.10с), в результате получаем конечное число связанных состояний:

$$(1) \quad \underline{m = 0}, \quad N + \frac{1}{2} \leq B, \quad N = 0, 1, 2, \dots, N_B,$$

$$\lambda - 1/4 = 2B(N + 1/2) - (N + 1/2)^2,$$

$$R = (\operatorname{ch} \frac{r}{2})^{-2B} F(-2B + 1 + n, -n, |m| + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}),$$

$$R_{r \rightarrow +\infty} = (\operatorname{ch} \frac{r}{2})^{-2B} (\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2})^N = e^{-(B-N)r}. \quad (3.3.13)$$

Теперь исследуем случай:

$$(2) \quad \underline{m < 0}, \quad a = -\frac{m}{2} > 0, \quad b = \frac{m}{2} - B < 0. \quad (3.3.14)$$

Применяем условие квантования (3.3.9с), в результате приходим к отдельным уровням, существующим при некоторых значениях магнитного поля:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \underline{m < 0}, \quad 0 < B - n \leq \frac{1}{2}, \\
 & \lambda - \frac{1}{4} = 2B(n + 1/2) - (n + 1/2)^2, \\
 & R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2}\right)^{-m} \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2}\right)^{m-2B} \times \\
 & \times F(-n, -2B + 1 + n, -m + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}), \\
 & R_{r \rightarrow +\infty} = e^{-(B-n)r}. \tag{3.3.15}
 \end{aligned}$$

Теперь применим к (3.3.14) условие квантования (3.3.10), приходим к конечному числу связанных состояний:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \underline{m < 0}, \quad N + \frac{1}{2} \leq B, \quad N = 0, 1, 2, \dots, N_B, \\
 & \lambda - 1/4 = 2B(N + 1/2) - (N + 1/2)^2, \\
 & R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2}\right)^{-m} \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2}\right)^{m-2B} F(-2B + 1 + n, -n, -m + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}), \\
 & R_{r \rightarrow +\infty} = e^{-(B-N)r}. \tag{3.3.16}
 \end{aligned}$$

Исследуем случай

$$(3) \quad \underline{0 < m < 2B}, \quad a = \frac{m}{2} > 0, \quad b = \frac{m}{2} - B < 0. \tag{3.3.17}$$

Применяем условие квантования (3.3.9с), приходим к отдельным уровням, существующим (или не существующим) при специальных значениях магнитного поля:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \underline{0 < m < 2B}, \quad 0 \leq B - m - n \leq \frac{1}{2}, \\
 & \lambda - 1/4 = 2B(m + n + 1/2) - (m + n + 1/2)^2, \\
 & R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2}\right)^m \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2}\right)^{m-2B} F(-n, 2m - 2B + 1 + n, m + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}), \\
 & R_{r \rightarrow +\infty} = e^{-(B-m-n)r}. \tag{3.3.18}
 \end{aligned}$$

Применяем условие квантования (3.3.10с), получаем конечное число связанных состояний:

$$m + \frac{1}{2} + N \leq B, \quad N = 0, 1, \dots, N_{B,m},$$

$$\lambda - 1/4 = 2B(m + N + 1/2) - (m + N + 1/2)^2 ,$$

$$R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2}\right)^m \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2}\right)^{m-2B} F\left(2m - 2B + 1 + n, -n, m + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}\right) ,$$

$$R_{r \rightarrow +\infty} = e^{-(B-m-N)r} . \quad (3.3.19)$$

Исследуем случай

$$(4) \quad \underline{m > 2B > 0} , \quad a = \frac{m}{2} , \quad b = -\frac{m - 2B}{2} < 0 . \quad (3.3.20)$$

Используем условие квантования (3.3.9с):

$$(4) \quad \underline{m > 2B > 0} , \quad B + \frac{1}{2} + n \geq 0 ,$$

$$\lambda - \frac{1}{4} = -2B\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 ,$$

$$R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2}\right)^m \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2}\right)^{-m+2B} \times$$

$$\times F\left(-n, 2B + 1 + n, m + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}\right) ,$$

$$R_{r \rightarrow +\infty} = e^{(B+n)r} \rightarrow \infty ; \quad (3.3.21)$$

это случай расходящихся на бесконечности решений.

Используем условие квантования (3.3.10с):

$$(4) \quad \underline{m > 2B > 0} , \quad B + \frac{1}{2} + N \leq 0 \text{ (не существует } N) ,$$

$$\lambda - \frac{1}{4} = -2B\left(N + \frac{1}{2}\right) - \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 ,$$

$$R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2}\right)^m \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2}\right)^{-m+2B} \times$$

$$\times F\left(-2B + 1 + N, -N, |m| + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}\right) ,$$

$$R_{r \rightarrow +\infty} = e^{(B+N)r} \rightarrow \infty ; \quad (3.3.22)$$

здесь нет возможности получить связанные состояния.

Рассматриваем последний вариант:

$$(5) \quad \underline{m = 2B > 0} , \quad a = m = 2B , \quad b = 0 . \quad (3.3.23)$$

Применяем условие квантования (3.3.9с):

$$B + n + \frac{1}{2} \geq 0 , \quad \lambda - \frac{1}{4} = 2B\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 ,$$

$$R = \left(-\operatorname{sh} \frac{r}{2}\right)^{2B} F\left(-n, |m| - |m - 2B| + 1 + n, |m| + 1; -\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}\right) ,$$

$$R_{r \rightarrow +\infty} = e^{(B+n)r} \rightarrow \infty . \quad (3.3.24)$$

Квантование согласно (3.3.10) не приводит к связанным состояниям, поскольку неравенство

$$B + n + \frac{1}{2} \leq 0$$

невьполнимо.

Соберем результаты относительно разрешенных связанных состояний.

Отдельные состояния:

$$\begin{aligned} (1) - (2) \quad m \leq 0, \quad n < B \leq n + 1/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda - 1/4 = 2B (n + 1/2) - (n + 1/2)^2; \\ (3) \quad 0 < m < 2B, \quad n < B \leq n + 1/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda - 1/4 = 2B (m + n + 1/2) - (m + n + 1/2)^2; \end{aligned} \quad (3.3.25a)$$

их можно записать в виде одной формулы

$$\begin{aligned} (1) - (2) - (3) \quad m < 2B, \quad n < B \leq n + 1/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda - 1/4 = 2B \left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2 \right) - \left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.3.25b)$$

Наборы состояний:

$$\begin{aligned} (1) - (2) \quad m \leq 0, \quad N + 1/2 \leq B, \quad N = 0, 1, 2, \dots \\ \lambda - 1/4 = 2B (N + 1/2) - (N + 1/2)^2; \\ (3) \quad 0 < m < 2B, \quad m + N + 1/2 \leq B, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda - 1/4 = 2B (m + N + 1/2) - (m + N + 1/2)^2; \end{aligned} \quad (3.3.26a)$$

их можно записать в виде одной формулы

$$\begin{aligned} (1) - (2) - (3) \quad m < 2B, \quad \frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \leq B, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda - 1/4 = 2B \left(\frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \right) - \left(\frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.3.26b)$$

Выпишем последнее правило квантования (3.3.26b) в обычных единицах измерения:

$$\lambda - \frac{1}{4} = \rho^2 \lambda_0 - \frac{1}{4}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_0 = \frac{2M}{\hbar^2} \left(E - \frac{P^2}{2M} \right),$$

$$m < 2B, \quad m + N + 1/2 \leq \frac{eB}{\hbar c} \rho^2, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\rho^2 \lambda_0 - \frac{1}{4} = 2 \frac{eB}{\hbar c} \rho^2 \left(\frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \right) - \left(\frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \right)^2. \quad (3.3.27)$$

Из (3.3.27) в пределе плоского пространства получаем известное выражение для спектра энергий [21]:

$$E - \frac{P^2}{2M} = \frac{eB\hbar}{Mc} \left(\frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \right).$$

Обратимся к случаю противоположной ориентации магнитного поля:

$$B < 0.$$

В соответствии с (3.3.1a) дифференциальное уравнение не меняется при одновременном умножении параметров на -1 :

$$m \rightarrow m' = -m, \quad B \rightarrow B' = -B. \quad (3.3.28)$$

Это свойство симметрии прослеживается и при описании связанных состояний согласно (3.3.9c), (3.3.10c). В соответствии с этой симметрией (3.3.25b) дают

отдельные состояния:

$$B' < 0, \quad m' > 2B', \quad -(n + 1/2) \leq B' < -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda - 1/4 = 2B' \left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2 \right) - \left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2 \right)^2; \quad (3.3.29)$$

наборы состояний:

$$B' < 0, \quad m' > 2B', \quad \frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \leq B, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lambda - 1/4 = 2B \left(\frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \right) - \left(\frac{m + |m|}{2} + N + 1/2 \right)^2. \quad (3.3.30)$$

3.4 Анализ дифференциального уравнения для $Z(z)$ в H_3

Рассмотрим дифференциальное уравнение для $Z(z)$ в пространстве Лобачевского:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{dZ}{dz} + 2\epsilon Z - \frac{\lambda}{\operatorname{ch}^2 z} Z = 0. \quad (3.4.1)$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z = y, \quad \frac{d}{dz} &= \operatorname{ch} z \frac{d}{dy}, \\ 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{dZ}{dz} &= 2y \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dz^2} = (1 + y^2) \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Тогда уравнение (3.4.1) примет вид:

$$(1 + y^2) \frac{d^2 Z}{dy^2} + 3y \frac{dZ}{dy} + \left(2\epsilon - \frac{\lambda}{1 + y^2}\right) Z = 0. \quad (3.4.3)$$

У этого уравнения особенности присутствуют в точках $y = +i, -i, \infty$; особые точки $y = \pm i$ лежат вне физической области изменения переменной y . Вместо y введем переменную x :

$$\begin{aligned} y = i(2x - 1), \quad x &= \frac{1 + i \operatorname{sh} z}{2}, \quad (1 - x) = \frac{1 + i \operatorname{sh} z}{2}, \\ \frac{d}{dy} &= \frac{1}{2i} \frac{d}{dx}, \quad 1 + y^2 = 4x(1 - x). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Уравнение примет вид:

$$x(1 - x) \frac{d^2 Z}{dx^2} - 3(2x - 1) \frac{1}{2} \frac{dZ}{dx} - \left(2\epsilon - \frac{\lambda}{4x(1 - x)}\right) Z = 0. \quad (3.4.5)$$

Рассмотрим это уравнение в области около точки $z = 0$ (здесь следует ожидать ситуации, похожей на случай плоского пространства):

$$x \approx \frac{1 - iz}{2}, \quad 1 - x \approx \frac{1 + iz}{2}, \quad z \approx 0. \quad (3.4.6a)$$

Действительно, это имеет место:

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} - 3z \frac{d}{dz} - 2\epsilon + \lambda\right) Z = 0, \quad Z \approx e^{ikz}, \quad \lambda = 2\epsilon - k^2. \quad (3.4.6b)$$

Используем подстановку

$$Z = x^a (1 - x)^b G,$$

из уравнения (3.4.5) получаем

$$\begin{aligned}
 & x(1-x) G'' + \left[2a(1-x) - 2bx - 3x + \frac{3}{2} \right] G' + \\
 & + \left[a(a-1) + \frac{3a}{2} + \frac{\lambda}{4} \right] \frac{1}{x} G + \left[b(b-1) + 3b - \frac{3b}{2} + \frac{\lambda}{4} \right] \frac{1}{1-x} G + \\
 & + \left[-a(a-1) - ab - ab - b(b-1) - 3a - 3b - 2\epsilon \right] G = 0. \quad (3.4.7a)
 \end{aligned}$$

Наложением дополнительных условий

$$\begin{aligned}
 a^2 + \frac{a}{2} + \frac{\lambda}{4} = 0, \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{4}, \\
 b^2 + \frac{b}{2} + \frac{\lambda}{4} = 0, \quad b = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{4} \quad (3.4.7b)
 \end{aligned}$$

сводим (3.4.7a) к уравнению:

$$\begin{aligned}
 & +x(1-x) G'' + \left[(2a + 3/2) - x(2a + 2b + 3) \right] G' - \\
 & - \left[(a + b + 1)^2 + 2\epsilon - 1 \right] G = 0, \quad (3.4.8a)
 \end{aligned}$$

которое является уравнением гипергеометрического типа:

$$x(1-x)G + [C - (A + B + 1)x]G' - AB G = 0. \quad (3.4.8b)$$

Параметры гипергеометрической функции определяются из условий

$$G = G(A, B, C; x), \quad C = 2a + 3/2,$$

$$\begin{cases} A + B = 2(a + b + 1), \\ AB = (a + b + 1)^2 + 2\epsilon - 1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 A &= a + b + 1 + \sqrt{1 - 2\epsilon}, \\
 B &= a + b + 1 - \sqrt{1 - 2\epsilon}, \quad C = 2a + 3/2. \quad (3.4.8c)
 \end{aligned}$$

Напоминаем:

$$\begin{aligned}
 Z &= x^a(1-x)^b G(A, B, C; x), \\
 x &= \frac{1 - i \operatorname{sh} z}{2}, \quad (1-x) = \frac{1 + i \operatorname{sh} z}{2}, \\
 a &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{4}, \quad b = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{4}.
 \end{aligned}$$

Чтобы найти асимптотическое поведение решений на бесконечности, воспользуемся одним из соотношений Куммера, связывающим три разные решения гипергеометрического уравнения:

$$U_1 = F(A, B, C, x),$$

$$\begin{aligned}
U_3 &= (-x)^{-A} F(A, A - C + 1, A - B + 1, x^{-1}), \\
U_4 &= (-x)^{-B} F(B - C + 1, B, B - A + 1, x^{-1}), \\
U_1 &= \frac{\Gamma(C)\Gamma(B - A)}{\Gamma(C - A)\Gamma(B)} U_3 + \frac{\Gamma(C)\Gamma(A - B)}{\Gamma(C - B)\Gamma(A)} U_4, \tag{3.4.9a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z &= x^a(1 - x)^b U_1 = \frac{\Gamma(C)\Gamma(B - A)}{\Gamma(C - A)\Gamma(B)} \times \\
&\times x^a(1 - x)^b (-x)^{-(a+b+1+i\sqrt{2\epsilon-1})} F(A, A - C + 1, A - B + 1, x^{-1}) + \\
&+ \frac{\Gamma(C)\Gamma(A - B)}{\Gamma(C - B)\Gamma(A)} x^a(1 - x)^b (-x)^{-(a+b+1-i\sqrt{2\epsilon-1})} F(B - C + 1, B, B - A + 1, x^{-1}). \tag{3.4.9b}
\end{aligned}$$

И дальше легко устанавливаем требуемые асимптотики (все три решения U_1, U_3, U_4 стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned}
x \rightarrow \infty, \quad Z &= x^a(1 - x)^b U_1 \approx \\
&\approx \frac{\Gamma(C)\Gamma(B - A)}{\Gamma(C - A)\Gamma(B)} x^a(1 - x)^b (-x)^{-a-b-1-i\sqrt{2\epsilon-1}} + \\
&+ \frac{\Gamma(C)\Gamma(A - B)}{\Gamma(C - B)\Gamma(A)} x^a(1 - x)^b (-x)^{-a-b-1+i\sqrt{2\epsilon-1}} \approx \\
&\approx (-1)^a \left[\frac{\Gamma(C)\Gamma(B - A)}{\Gamma(C - A)\Gamma(B)} (-x)^{-1-i\sqrt{2\epsilon-1}} + \frac{\Gamma(C)\Gamma(A - B)}{\Gamma(C - B)\Gamma(A)} (-x)^{-1+i\sqrt{2\epsilon-1}} \right] \rightarrow 0. \tag{3.4.9c}
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай равных a и b :

$$a = b = \frac{-1 \pm 2i\sqrt{\lambda - 1/4}}{4}, \quad a + b = \frac{-1 \pm 2i\sqrt{\lambda - 1/4}}{2},$$

$$Z = x^a(1 - x)^a G(A, B, C; x) = \left(\frac{\text{ch}^2 z}{4}\right)^a G(A, B, C; x),$$

$$A = \frac{1}{2} + i \left(\sqrt{2\epsilon - 1} \pm \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \right),$$

$$B = \frac{1}{2} - i \left(\sqrt{2\epsilon - 1} \mp \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \right),$$

$$C = 1 \pm i\sqrt{\lambda - 1/4}. \tag{3.4.10}$$

Из (3.4.10), в частности, следуют равенства:

$$A - \frac{1}{2} = i \left(\sqrt{2\epsilon - 1} \pm \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \right),$$

$$B - \frac{1}{2} = -i \left(\sqrt{2\epsilon - 1} \mp \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \right),$$

$$\left(A - \frac{1}{2}\right)\left(B - \frac{1}{2}\right) = (2\epsilon - 1) - \left(\lambda - \frac{1}{4}\right). \quad (3.4.11)$$

Вводим обозначение

$$(2\epsilon - 1) - \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = \nu^2$$

или

$$\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = (2\epsilon - 1) - \nu^2; \quad (3.4.12)$$

формула (3.4.12) обобщает соотношение из плоского пространства

$$\lambda = 2\epsilon - k^2.$$

Равенство (3.4.12) позволяет исключить переменную λ в выражениях для параметров гипергеометрической функции:

$$A = \frac{1}{2} + i \left(\sqrt{2\epsilon - 1} \pm \sqrt{(2\epsilon - 1) - \nu^2} \right),$$

$$B = \frac{1}{2} - i \left(\sqrt{2\epsilon - 1} \mp \sqrt{(2\epsilon - 1) - \nu^2} \right),$$

$$C = 1 \pm i \sqrt{(2\epsilon - 1) - \nu^2} = \frac{A + B + 1}{2},$$

$$a = b = \frac{-1 \pm 2i \sqrt{(2\epsilon - 1) - \nu^2}}{4},$$

$$Z = x^a (1 - x)^a F(A, B, C; x) = \left(\frac{\text{ch}^2 z}{4}\right)^a F\left(A, B, \frac{A + B + 1}{2}; x\right). \quad (3.4.13)$$

Получим выражение для оператора с собственным значением $\nu^2 + 3/4$:

$$\hat{\nu}^2 + \frac{3}{4} = 2\hat{H}(r, \phi, z) - \hat{\lambda}(r).$$

Вводим обозначения:

$$\hat{\lambda}(r, \phi) = -\frac{1}{\text{sh } r} \frac{\partial}{\partial r} \text{sh } r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\text{sh}^2 r} \left[i \frac{\partial}{\partial \phi} - B(\text{ch } r - 1) \right]^2,$$

$$2\hat{H}(r, \phi, z) = \frac{1}{\text{ch}^2 z} \hat{\lambda}(r, \phi) - \frac{1}{\text{ch}^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \text{ch}^2 z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.4.14)$$

Следовательно, нужный оператор задается равенством

$$\hat{\nu}^2(r, \phi, z) + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{\text{ch}^2 z} - 1\right) \hat{\lambda}(r, \phi) - \frac{1}{\text{ch}^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \text{ch}^2 z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.4.15)$$

Должно выполняться коммутационное соотношение

$$[2H, \hat{\lambda}(r)] = 0,$$

оно действительно выполняется:

$$\left[\frac{1}{\text{ch}^2 z} \hat{\lambda}(r, \phi) - \frac{1}{\text{ch}^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \text{ch}^2 z \frac{\partial}{\partial z}, \hat{\lambda}(r, \phi) \right] = 0. \quad (3.4.16)$$

3.5 Анализ радиального уравнения в сферическом пространстве

Рассмотрим радиальное дифференциальное уравнение (3.2.4b), возникающее для системы Ландау в сферическом пространстве:

$$-\frac{1}{\sin r} \frac{d}{dr} \sin r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\sin^2 r} \left(m + \frac{eB}{\hbar c} 2\rho^2 \sin^2 \frac{r}{2} \right)^2 R = \lambda R. \quad (3.5.1a)$$

Дальше будем использовать безразмерный параметр

$$\frac{eB}{\hbar c} \rho^2 \implies B;$$

уравнение представим в виде

$$\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{\text{tg } r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{\sin^2 r} [m + B(1 - \cos r)]^2 R + \lambda R = 0. \quad (3.5.1b)$$

Перейдем к новой переменной:

$$1 - \cos r = y, \quad y \in [0, +2],$$

$$\frac{d}{dr} = \sin r \frac{d}{dy} = \sqrt{y(2-y)} \frac{d}{dy}, \quad \frac{1}{\text{tg } r} \frac{d}{dr} = (1-y) \frac{d}{dy},$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = y(2-y) \frac{d^2}{dy^2} + (1-y) \frac{d}{dy};$$

при этом получим:

$$y(2-y) \frac{d^2}{dy^2} + 2(1-y) \frac{d}{dy} - \frac{(m + By)^2}{y(2-y)} R + \lambda R = 0. \quad (3.5.2)$$

Сделаем еще одну замену переменных:

$$y = 2z, \quad \frac{d}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz}, \quad z = \sin^2 \frac{r}{2} \in [0, 1],$$

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} - \frac{(m + 2Bz)^2}{4z(1-z)} + \lambda \right] R = 0. \quad (3.5.3)$$

Для дальнейшего удобнее представить уравнение в виде

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} - \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{z} - 4B^2 + \frac{(m+2B)^2}{1-z} \right) + \lambda \right] R = 0. \quad (3.5.4)$$

Рассмотрим поведение функции R около 0 и 1:

$$z \longrightarrow 0, \quad z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} - \frac{m^2}{4z} R = 0, \quad \underline{R(z) \sim z^a},$$

$$\frac{a(a-1)}{z} + \frac{a}{z} - \frac{m^2}{4z} - \lambda = 0, \quad a = \pm \frac{m}{2}; \quad (3.5.5a)$$

$$z \longrightarrow 1, \quad (1-z) \frac{d^2 R}{dz^2} - \frac{dR}{dz} - \frac{(m+2B)^2}{4(1-z)} R = 0, \quad R(z) \sim (1-z)^b,$$

$$b(b-1) + b - \frac{(m+2B)^2}{4} = 0, \quad b = \pm \frac{m+2B}{2}. \quad (3.5.5b)$$

Сделаем в уравнении (3.5.4) подстановку $R = z^a(1-z)^b F$, уравнение (3.5.4) дает

$$+z(1-z) F'' + [a(1-z) - bz + a(1-z) - bz + (1-2z)] F' +$$

$$+\frac{1}{z} \left[a(a-1) + a - \frac{m^2}{4} \right] F + \frac{1}{1-z} \left[b(b-1) + b - \frac{(m+2B)^2}{4} \right] F -$$

$$-[a(a+1) + 2ab + b(b+1) - B^2 - \lambda] F = 0.$$

Накладываем ограничения на параметры

$$a = \pm \frac{m}{2}, \quad b = \pm \frac{m+2B}{2}; \quad (3.5.6a)$$

приходим к уравнению

$$R = z^a (1-z)^b F,$$

$$+z(1-z) F'' + [(2a+1) - 2(a+b+1)z] F' -$$

$$-[a(a+1) + 2ab + b(b+1) - B^2 - \lambda] F = 0, \quad (3.5.6b)$$

т. е. к уравнению для гипергеометрической функции

$$z(1-z) F + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] F' - \alpha\beta F = 0. \quad (3.5.6c)$$

Исходная подстановка для волновой функции в переменной r выглядит как (будем искать функции, отвечающие связанным состояниям, следовательно, параметры a и b следует выбирать положительными)

$$z = \sin^2 \frac{r}{2}, \quad z \in [0, +1], \quad r \in [0, +\pi],$$

$$R = \left(\sin \frac{r}{2}\right)^{+|m|} \left(\cos \frac{r}{2}\right)^{+|m+2B|} F(\alpha, \beta, \gamma; -\sin^2 \frac{r}{2}); \quad (3.5.7)$$

параметры (α, β, γ) определены равенствами

$$\gamma = + |m| + 1, \quad a = + \frac{|m|}{2}, \quad b = + \frac{|m + 2B|}{2},$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2a + 2b + 1, \\ \alpha \beta = (a + b)(a + b + 1) - B^2 - \lambda; \end{cases}$$

т. е.

$$\gamma = + |m| + 1, \quad a = + \frac{|m|}{2}, \quad b = + \frac{|m + 2B|}{2},$$

$$\alpha = a + b + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} + \lambda}, \quad \beta = a + b + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} + \lambda}. \quad (3.5.8)$$

Условие сведения гипергеометрического ряда к полиному имеет вид:

$$\alpha = a + b + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} + \lambda} = -n = 0, -1, -2, \dots, \quad (3.5.9a)$$

откуда следует правило квантования:

$$\lambda + \frac{1}{4} = -B^2 + \left(a + b + \frac{1}{2} + n\right)^2$$

и соответствующие связанным состояниям радиальные функции R :

$$R = \left(\sin \frac{r}{2}\right)^{+|m|} \left(\cos \frac{r}{2}\right)^{+|m+2B|} \times \\ \times F(-n, |m| + |m + 2B| + 1 + n, |m| + 1; -\sin^2 \frac{r}{2}). \quad (3.5.9b)$$

При анализе решений – волновых функций – следует учитывать особенности параметризации сферического S_3 координатами (t, ϕ, z) . В частности,

$$\begin{aligned} r = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \sin z, \quad u_0 = + \cos z, \quad z \in [-\pi/2, +\pi/2], \\ r = \pi, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \sin z, \quad u_0 = - \cos z, \quad z \in [-\pi/2, +\pi/2]; \end{aligned} \quad (3.5.10a)$$

это означает, что полная замкнутая линия $u_0^2 + u_3^2 = 1$ в S_3 параметризуется двумя кусками:

$$\{ (r = 0, \phi - \text{немая}, z) + (r = \pi, \phi - \text{немая}, z) \}.$$

Соответственно, при ненулевом m от функции $R(r)$ должны требовать обращения в нуль в двух точках:

$$R(0) = 0, \quad R(\pi) = 0. \quad (3.5.10b)$$

Сначала рассмотрим случай нулевого значения $m = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{m = 0}, \quad a = 0, \quad b = +B, \\ \lambda + \frac{1}{4} = 2B(n + 1/2) + (n + 1/2)^2, \\ R = (\cos \frac{r}{2})^{+2B} Y(-n, 2B + n + 1, 1; -\sin^2 \frac{r}{2}), \\ R_{r \rightarrow 0} = 1, \quad R_{r \rightarrow \pi} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Поскольку $m = 0$ и зависимости от координаты ϕ в полной волновой функции Ψ нет, то решение (3.5.11) вполне допустимо по соображениям непрерывности.

Теперь исследуем случай:

$$\begin{aligned} \underline{m > 0}, \quad a = +\frac{m}{2}, \quad b = +\frac{m + 2B}{2}, \\ \lambda + \frac{1}{4} = 2B(n + m + 1/2) + (n + m + 1/2)^2, \\ R = (\sin \frac{r}{2})^{+m} (\cos \frac{r}{2})^{m+2B} \times \\ \times F(-n, 2B + 2m + n + 1, m + 1; -\sin^2 \frac{r}{2}), \\ R_{r \rightarrow 0} = 0, \quad R_{r \rightarrow \pi} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Рассмотрим возможность:

$$\begin{aligned} \underline{m < -2B}, \quad a = -\frac{m}{2}, \quad b = -\frac{m + 2B}{2} > 0, \\ \lambda + \frac{1}{4} = -2B(n - m + 1/2) + (n - m + 1/2)^2 = \\ = (n - m + 1/2)((n - m + 1/2 - 2B) > 0, \\ R = (\sin \frac{r}{2})^{-m} (\cos \frac{r}{2})^{-(m+2B)} \times \\ \times F(-n, -2m - 2B + 1 + n, -m + 1; -\sin^2 \frac{r}{2}), \\ R_{r \rightarrow 0} = 0, \quad R_{r \rightarrow \pi} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Исследуем случай:

$$\underline{-2B < m < 0}, \quad a = -\frac{m}{2} > 0, \quad b = \frac{m + 2B}{2} > 0,$$

$$\begin{aligned}
\lambda + \frac{1}{4} &= 2B(n + 1/2) + (n + 1/2)^2, \\
R &= (\sin \frac{r}{2})^{-m} (\cos \frac{r}{2})^{m+2B} \times \\
&\times F(-n, 2B + n + 1, -m + 1; -\sin^2 \frac{r}{2}), \\
R_{r \rightarrow 0} &= 0, \quad R_{r \rightarrow \pi} = 0.
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Исследуем последнюю возможность:

$$\begin{aligned}
\underline{m = -2B}, \quad a = +B, \quad b = 0, \\
\lambda + \frac{1}{4} &= 2B(n + 1/2) + (n + 1/2)^2, \\
R &= (-\sin \frac{r}{2})^{+2B} Y(-n, 2B + n + 1, -B + 1; -\sin^2 \frac{r}{2}), \\
R_{r \rightarrow +0} &= 0, \quad R_{r \rightarrow +\pi} = 1.
\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Это случай разрывных в пространстве S_3 функций, поскольку у волновой функции сохраняется зависимость от переменной ϕ при $r \rightarrow \pi$.

Соберем результаты относительно квантования величины λ (здесь удобно воспользоваться также графической иллюстрацией – рисунком 3.1):

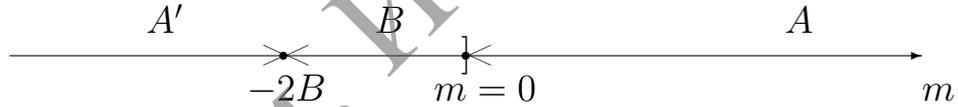


Рисунок 3.1 – Ориентация поля $B > 0$

$$\begin{aligned}
\underline{(A), \quad m > 0}, \quad \lambda + \frac{1}{4} &= (n + 1/2 + m)(n + 1/2 + m + 2B); \\
\underline{(A'), \quad m < -2B}, \quad \lambda + \frac{1}{4} &= (n + 1/2 - m)(n + 1/2 - m - 2B); \\
\underline{(B), \quad -2B < m \leq 0}, \quad \lambda + \frac{1}{4} &= (n + 1/2)(n + 1/2 - 2B).
\end{aligned} \tag{3.5.16}$$

Выпишем эти соотношения в обычных единицах

$$\underline{(A), \quad m > 0}, \quad \rho^2 \lambda_0 + \frac{1}{4} = +2 \frac{eB}{\hbar c} \rho^2 (n + m + 1/2) + (n + m + 1/2)^2;$$

$$\begin{aligned}
\underline{(A')}, \quad m < -2\frac{eB}{\hbar c} \rho^2, \quad \rho^2 \lambda_0 + \frac{1}{4} &= -2\frac{eB}{\hbar c} \rho^2 (n - m + 1/2) + (n - m + 1/2)^2; \\
\underline{(B)}, \quad -2\frac{eB}{\hbar c} \rho^2 < m \leq 0, \quad \rho^2 \lambda_0 + \frac{1}{4} &= 2\frac{eB}{\hbar c} \rho^2 (n + 1/2) + (n + 1/2)^2.
\end{aligned}
\tag{3.5.17}$$

При устремлении радиуса кривизны к бесконечности $\rho \rightarrow \infty$ случай $m < -\infty$ оказывается вырожденным: в него не попадает ни одно состояние, а два оставшихся случая дают

$$\begin{aligned}
\underline{m < 0}, \quad \lambda_0 &= 2\frac{eB}{\hbar c} (n + 1/2); \\
\underline{m \geq 0}, \quad \lambda_0 &= +2\frac{eB}{\hbar c} (n + m + 1/2),
\end{aligned}
\tag{3.5.18}$$

где

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_0 = \frac{2M}{\hbar^2} \left(E - \frac{P^2}{2M} \right).$$

Таким образом, пришли к известному выражению для спектра энергии в случае плоского пространства [21]:

$$E - \frac{P^2}{2M} = \frac{eB\hbar}{Mc} \left(\frac{m + |m|}{2} + n + 1/2 \right).
\tag{3.5.19}$$

3.6 Анализ дифференциального уравнения для $Z(z)$ в S_3

Рассмотрим дифференциальное уравнение для $Z(z)$ в пространстве Римана:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - 2 \frac{\sin z}{\cos z} \frac{dZ}{dz} + 2\epsilon Z - \frac{\lambda}{\cos^2 z} Z = 0.
\tag{3.6.1}$$

Сделаем замену переменных

$$\sin z = y, \quad \frac{d}{dz} = \cos z \frac{d}{dy},$$

$$-2 \frac{\sin z}{\cos z} \frac{dZ}{dz} = -2y \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dz^2} = (1 - y^2) \frac{d^2}{dy^2} - y \frac{d}{dy},
\tag{3.6.2}$$

тогда уравнение (3.6.1) примет вид

$$(1 - y^2) \frac{d^2 Z}{dy^2} - 3y \frac{dZ}{dy} + \left(2\epsilon - \frac{\lambda}{1 - y^2} \right) Z = 0.
\tag{3.6.3}$$

У этого уравнения особенности присутствуют в точках $y = +1, -1, \infty$.
Вместо y введем переменную x :

$$y = (2x - 1), \quad x = \frac{1 + \sin z}{2}, \quad 1 - x = \frac{1 - \sin z}{2},$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}, \quad 1 - y^2 = 4x(1 - x), \quad (3.6.4)$$

уравнение примет вид:

$$x(1 - x) \frac{d^2 Z}{dx^2} - \frac{3}{2}(2x - 1) \frac{dZ}{dx} + \left(2\epsilon - \frac{\lambda}{4x(1 - x)}\right) Z = 0. \quad (3.6.5)$$

Рассмотрим это уравнение в области около точки $z = 0$ (здесь следует ожидать ситуации, похожей на случай плоского пространства):

$$x \approx \frac{1 + z}{2}, \quad 1 - x \approx \frac{1 - z}{2}, \quad z \approx 0. \quad (3.6.6a)$$

Действительно, это имеет место:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + 3z \frac{d}{dz} + 2\epsilon - \lambda\right) Z = 0, \quad Z \approx e^{ikz}, \quad \lambda = 2\epsilon - k^2. \quad (3.6.6b)$$

Используем подстановку $Z = x^a(1 - x)^b G$, уравнение (3.6.5) дает

$$+x(1 - x) G'' + \left[2a(1 - x) - 2bx - 3x + \frac{3}{2}\right] G' +$$

$$+ \left[a(a - 1) + \frac{3a}{2} - \frac{\lambda}{4}\right] \frac{1}{x} G + \left[b(b - 1) + 3b - \frac{3b}{2} - \frac{\lambda}{4}\right] \frac{1}{1 - x} G +$$

$$+ \left[-a(a - 1) - ab - ab - b(b - 1) - 3a - 3b + 2\epsilon\right] G = 0. \quad (3.6.7a)$$

Наложением дополнительных условий

$$a^2 + \frac{a}{2} - \frac{\lambda}{4} = 0, \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{4},$$

$$b^2 + \frac{b}{2} - \frac{\lambda}{4} = 0, \quad b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{4} \quad (3.6.7b)$$

сводим (3.6.7a) к уравнению

$$+x(1 - x) G'' + \left[(2a + 3/2) - x(2a + 2b + 3)\right] G' -$$

$$- \left[(a + b + 1)^2 - 2\epsilon - 1\right] G = 0, \quad (3.6.8a)$$

которое является уравнением гипергеометрического типа:

$$x(1 - x)G + [C - (A + B + 1)x]G' - AB G = 0. \quad (3.6.8b)$$

Параметры гипергеометрической функции определяются из условий

$$G = G(A, B, C; x), \quad C = 2a + 3/2,$$

$$\begin{cases} A + B = 2(a + b + 1), \\ AB = (a + b + 1)^2 - 2\epsilon - 1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{aligned} A &= a + b + 1 + \sqrt{1 + 2\epsilon}, \\ B &= a + b + 1 - \sqrt{1 + 2\epsilon}, \quad C = 2a + 3/2. \end{aligned} \quad (3.6.8c)$$

Поскольку функция должна обращаться в ноль в точках $z = -\pi/2, +\pi/2$, то a и b следует выбирать положительными:

$$\begin{aligned} Z &= x^a(1-x)^b G(A, B, C; x), \\ x &= \frac{1 + \sin z}{2}, \quad (1-x) = \frac{1 - \sin z}{2}, \\ a &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{4}, \quad b = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{4}, \\ C &= 1 + \sqrt{\lambda + 1/4}, \quad A = \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4} + \sqrt{2\epsilon + 1}}, \\ B &= \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4} - \sqrt{2\epsilon + 1}}. \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

Условие обрыва ряда до полинома имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{1}{4} > 0, \quad 2\epsilon + 1 > 0, \\ B = \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4} - \sqrt{2\epsilon + 1}} = -N, \quad N = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

отсюда находим формулу для уровней энергии

$$2\epsilon + 1 = \left(\frac{1}{2} + N + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \right)^2. \quad (3.6.10)$$

Из (3.6.10) следует также равенство

$$(2\epsilon + 1) - \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{2} + N \right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} + N \right) \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}. \quad (3.6.11)$$

Введем обозначение

$$\left(\frac{1}{2} + N \right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} + N \right) \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = \nu^2 > 0, \quad (3.6.12a)$$

тогда

$$(2\epsilon + 1) = \nu^2 + \left(\lambda + \frac{1}{4}\right), \quad (3.6.12b)$$

что обобщает формулу в случае плоского пространства

$$2\epsilon = k^2 + \lambda. \quad (3.6.12c)$$

Равенство (3.6.12b) позволяет в выражениях для параметров гипергеометрической функции перейти к переменным ϵ, ν^2 :

$$\begin{aligned} C &= 1 + \sqrt{(2\epsilon + 1) - \nu^2}, \\ A &= \frac{1}{2} + \sqrt{(2\epsilon + 1) - \nu^2} + \sqrt{2\epsilon + 1}, \\ B &= \frac{1}{2} + \sqrt{(2\epsilon + 1) - \nu^2} - \sqrt{2\epsilon + 1}. \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Впрочем, никаких преимуществ эта запись не дает, поскольку квантование величины $(2\epsilon + 1) - \nu^2$ осуществляется на основе второго дифференциального уравнения для радиальной функции $R(r)$.

Получим выражение для оператора с собственным значением $\nu^2 + 3/4$:

$$\hat{\nu}^2 - \frac{3}{4} = 2\hat{H}(r, \phi, z) - \hat{\lambda}(r).$$

Вводим обозначения

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(r, \phi) &= -\frac{1}{\sin r} \frac{\partial}{\partial r} \sin r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 r} \left[-i \frac{\partial}{\partial \phi} + B(1 - \cos r) \right]^2, \\ 2\hat{H}(r, \phi, z) &= \frac{1}{\cos^2 z} \hat{\lambda}(r, \phi) - \frac{1}{\cos^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \cos^2 z \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Следовательно, нужный оператор задается равенством

$$\hat{\nu}^2(r, \phi, z) - \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{\cos^2 z} - 1 \right) \hat{\lambda}(r, \phi) - \frac{1}{\cos^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \cos^2 z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.6.15)$$

Должно выполняться коммутационное соотношение

$$[2H, \hat{\lambda}(r)] = 0,$$

оно действительно выполняется:

$$\left[\frac{1}{\cos^2 z} \hat{\lambda}(r, \phi) - \frac{1}{\cos^2 z} \frac{\partial}{\partial z} \cos^2 z \frac{\partial}{\partial z}, \hat{\lambda}(r, \phi) \right] = 0. \quad (3.6.16)$$

Глава 4

ЭЛЕКТРОН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ТЕТРАДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

4.1 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве E_3

Воспользуемся известным представлением для векторного потенциала постоянного магнитного поля в плоском пространстве:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} c\mathbf{V} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{V} = (0, 0, B), \quad A^a = \frac{Br}{2} (0; -\sin \phi, \cos \phi, 0). \quad (4.1.1a)$$

Из (4.1.1a) после пересчета к цилиндрическим координатам получаем

$$A_t = 0, \quad A_r = 0, \quad A_z = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}. \quad (4.1.1b)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора

$$F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = Br, \quad (4.1.1c)$$

которая удовлетворяет системе уравнений Максвелла (здесь она сводится к одному нетривиальному уравнению):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} = 0 \implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r F^{\phi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{1}{r^2} \right) Br \equiv 0.$$

Будем рассматривать уравнения Дирака в магнитном поле в плоском пространстве E_3 . Цилиндрическим координатам $x^\alpha = (t, r, \phi, z)$ отвечает тетрада

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad e_{(a)}^\beta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Вычисляем символы Кристоффеля и коэффициенты вращения Риччи:

$$\Gamma^r_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^\phi_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^z_{jk} = 0, \quad \gamma_{122} = \frac{1}{r}. \quad (4.1.3)$$

Общековариантное тетрадное уравнение Дирака имеет вид

$$\left\{ \gamma^c \left[i\hbar \left(e_{(c)}^\beta \partial_\beta + \frac{1}{2} \sigma^{ab} \gamma_{abc} \right) - \frac{e}{c} A_c \right] - mc \right\} \Psi = 0, \quad (4.1.4)$$

где γ_{abc} – символы вращения Риччи, $A_a = e_{(a)}^\beta A_\beta$ – тетрадные компоненты 4-вектора A_β ; $\sigma^{ab} = 1/4(\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a)$ – генераторы биспинорного представления группы Лоренца. Далее используем сокращения $e/c\hbar \Rightarrow e$, $mc/\hbar \Rightarrow M$. При этом уравнение (4.1.4) запишется так:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) + \gamma^2 \left(\frac{i\partial_\phi}{r} + \frac{eBr}{2} \right) + i\gamma^3 \partial_z - M \right] \Psi = 0. \quad (4.1.5)$$

4.2 Разделение переменных в уравнении Дирака в E_3

Можно убрать добавку при операторе дифференцирования по r подстановкой $\Psi = \varphi/\sqrt{r}$:

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \left(\frac{i\partial_\phi}{r} + \frac{eBr}{2} \right) + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right] \varphi = 0. \quad (4.2.1)$$

Подстановка для волновой функции следующая:

$$\varphi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix},$$

$$\left[+\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \left(\frac{m}{r} - \frac{eBr}{2} \right) + -k\gamma^3 - M \right] \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2.2)$$

Далее используем обозначение

$$\mu(r) = \frac{m}{r} - \frac{eBr}{2}.$$

Выбирая матрицы Дирака в спинорном базисе, находим явный вид уравнений для четырех функций $f_a(t, z)$:

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu \right) f_4 + ik f_3 + i(\epsilon f_3 - M f_1) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \mu \right) f_3 - ik f_4 + i(\epsilon f_4 - M f_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \mu\right) f_2 + ik f_1 - i(\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \mu\right) f_1 - ik f_2 - i(\epsilon f_2 - M f_4) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Накладываем линейное ограничение

$$f_3 = A f_1, \quad f_4 = A f_2; \quad (4.2.4)$$

система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \mu\right) f_2 + ik f_1 + i\left(\epsilon - \frac{M}{A}\right) f_1 &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \mu\right) f_2 + ik f_1 + i(-\epsilon + MA) f_1 &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \mu\right) f_1 - ik f_2 + i\left(\epsilon - \frac{M}{A}\right) f_2 &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \mu\right) f_1 - ik f_2 + i(-\epsilon + MA) f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Система (4.2.5) будет совместной, если выполняется условие

$$\epsilon - \frac{M}{A} = -\epsilon + MA \quad \Longrightarrow \quad A = A_{1,2} = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - M^2}}{M}. \quad (4.2.6)$$

Таким образом, задача сведена к системе двух уравнений:

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) f_2 + i(k - \epsilon + MA) f_1 = 0, \quad (4.2.7)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \mu\right) f_1 + i(-k - \epsilon + MA) f_2 = 0. \quad (4.2.8)$$

В соответствии с двумя возможностями имеем два линейно независимых решения:

$$AM = \epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - M^2}, \quad (\sqrt{\epsilon^2 - M^2} = p),$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) f_2 + i(k + p) f_1 = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \mu\right) f_1 - i(k - p) f_2 = 0; \quad (4.2.9)$$

$$AM = \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - M^2}, \quad (\sqrt{\epsilon^2 - M^2} = p),$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) f_2 + i(k - p) f_1 = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \mu\right) f_1 - i(k + p) f_2 = 0. \quad (4.2.10)$$

Для определенности дальше следим за вариантом (4.2.9).

4.3 Решение уравнений по r -переменной

Из (4.2.9) следует уравнение для R_1 :

$$\underline{\lambda^2 = \epsilon^2 - m^2 - k^2},$$

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left[\frac{m}{r^2} + \frac{eB}{2} - \left(\frac{m}{r} - \frac{eBr}{2} \right)^2 + \lambda^2 \right] R_1 = 0. \quad (4.3.1)$$

Физический смысл параметра λ^2 – это вклад в общую энергию поперечного магнитному полю движения электрона: именно эта энергия квантуется.

Прежде чем описывать решения уравнения (4.3.1), отметим существенный момент: диагонализующийся оператор

$$-i \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad -i \frac{\partial}{\partial \phi} \Psi = m \Psi \quad (4.3.2)$$

это пересчитанный от декартовой тетрады к цилиндрической оператор третьей проекции полного момента импульса дираковской частицы:

$$\hat{J}_3 \Psi_{Cart} = \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} + \Sigma_3 \right) \Psi_{Cart} = m \Psi = m \Psi_{Cart}; \quad (4.3.3)$$

т. е. для m разрешены полуцелые значения

$$m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$$

Действительно, поскольку базисы декартовой и цилиндрической тетрад связаны следующим калибровочным преобразованием:

$$\Psi^{cyl} = S \Psi^{Cart}, \quad S = \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} e^{+i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{vmatrix},$$

то оператор \hat{J}_3^{cyl} третьей проекции полного момента в цилиндрическом базисе должен вычисляться согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} \hat{J}_3^{cyl} &= S \hat{J}_3 \Psi_{Cart} S^{-1} = \\ &= \begin{vmatrix} B \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} + (1/2)\sigma_3 \right) B^{-1} & 0 \\ 0 & B \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} + (1/2)\sigma_3 \right) B^{-1} \end{vmatrix} = -i \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Сказанное означает, что однозначная волновая функция электрона в декартовой тетраде перестает быть однозначной в цилиндрической тетраде, однако уравнение на собственные значения третьей проекции оператора полного момента во всех тетрадах приводит к одному и тому же правилу квантования квантового числа m .

Обратимся к анализу уравнения (4.3.1) и введем переменную $x = eBr^2/2$, уравнение запишется так¹:

$$4x \frac{d^2 R_1}{dx^2} + 2 \frac{dR_1}{dx} + \left(\frac{m(1-m)}{x} - x + 1 + 2m + \frac{2\lambda^2}{eB} \right) R_1 = 0. \quad (4.3.5)$$

Ищем решение в виде

$$R_1(x) = x^A e^{-Cx} R(x),$$

R удовлетворяет уравнению

$$4x \frac{d^2 R}{dx^2} + 4 \left(2A + \frac{1}{2} - 2Cx \right) \frac{dR}{dx} + \left[\frac{2A(2A-1) + m(1-m)}{x} + (4C^2 - 1)x - 8AC - 2C + 1 + 2m + \frac{2\lambda^2}{eB} \right] R = 0.$$

При A и C , выбранных согласно

$$A = \frac{m}{2}, \quad \frac{1-m}{2}, \quad C = \pm \frac{1}{2}, \quad (4.3.6)$$

уравнение упрощается

$$x \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(2A + \frac{1}{2} - x \right) \frac{dR}{dx} - \left(A - \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{2eB} \right) R = 0,$$

что является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$x F'' + (\gamma - x) F' - \alpha F = 0,$$

$$\alpha = A - \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{2eB}, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (4.3.7)$$

Для того чтобы получить решения, обращающиеся в ноль в начале координат $r \rightarrow 0$ и на бесконечности $r \rightarrow \infty$, нужно выбирать положительные значения для A, C . Условием обрыва вырожденного гипергеометрического ряда до полинома является $\alpha = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Это приводит к следующему правилу квантования параметра λ^2 :

$$\frac{\lambda^2}{2eB} = A - \frac{m}{2} + n.$$

В зависимости от знака квантового числа m получаем две формулы (напоминаем, что $eB > 0$):

$$\begin{aligned} m > 0, \quad \lambda^2 = 2eB n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ m < 0, \quad \lambda^2 = 2eB \left(n - m + \frac{1}{2} \right) = 2eB N, \quad N = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

¹Без ограничения общности будем считать, что параметр eB положительный – это соответствует тому, что бесконечно большим значениям координаты r соответствуют бесконечно большие и положительные значения координаты x .

Глава 5

ЭЛЕКТРОН В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

5.1 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве H_3

Будем использовать следующую систему координат в пространстве Лобачевского:

$$\begin{aligned} dS^2 &= c^2 dt^2 - \rho^2 [\operatorname{ch}^2 z (dr^2 + \operatorname{sh}^2 r d\phi^2) + dz^2], \\ z &\in (-\infty, +\infty), \quad r \in [0, +\infty), \quad \phi \in [0, 2\pi], \\ u^1 &= \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \cos \phi, \quad u^2 = \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \sin \phi, \\ u^3 &= \operatorname{sh} z, \quad u^0 = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} r. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах легко можно обобщить на случай пространства Лобачевского:

$$A_\phi = -2B \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} = -B (\operatorname{ch} r - 1). \quad (5.1.2)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора $F_{\phi r} = B \operatorname{sh} r$, которая удовлетворяет уравнениям Максвелла в пространстве Лобачевского.

Цилиндрическим координатам гиперболического пространства Лобачевского H_3 отвечает тетрада

$$e_{(a)}^\beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^{-1} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch}^{-1} z \operatorname{sh}^{-1} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.1.3)$$

область изменения координат

$$(r, \phi, z), \quad r \in [0, +\infty), \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad z \in (-\infty, +\infty).$$

Вычисляем символы Кристоффеля и затем коэффициенты Риччи:

$$\Gamma^r_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \operatorname{th} z \\ 0 & -\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r & 0 \\ \operatorname{th} z & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^\phi_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{cth} r & 0 \\ \operatorname{cth} r & 0 & \operatorname{th} z \\ 0 & \operatorname{th} z & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^z_{jk} = \begin{vmatrix} -\text{ch } z \text{ sh } z & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sh } z \text{ ch } z \text{ sh}^2 r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{122} = \frac{1}{\text{ch } z \text{ th } r}, \quad \gamma_{311} = \text{th } z, \quad \gamma_{322} = \text{th } z. \quad (5.1.4)$$

Уравнение Дирака принимает следующий вид:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \left(\frac{\partial_r}{\text{ch } z} - \sigma^{13} \text{th } z \right) + \right. \\ \left. + \gamma^2 \left(\frac{i\partial_\phi + eB(\text{ch } r - 1)}{\text{ch } z \text{ sh } r} + \frac{\sigma^{12}}{\text{ch } z \text{ th } r} - \sigma^{23} \text{th } z \right) + i\gamma^3 \partial_z - M \right] \Psi = 0. \quad (5.1.5)$$

Учтем равенства

$$\gamma^1 \sigma^{13} = -\gamma^3/2, \quad \gamma^2 \sigma^{12} = \gamma^1/2, \quad \gamma^2 \sigma^{23} = -\gamma^3/2;$$

уравнение (5.1.5) упростится:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \frac{i\gamma^1}{\text{ch } z} \left(\partial_r + \frac{1}{2} \frac{1}{\text{th } r} \right) + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\text{ch } r - 1)}{\text{ch } z \text{ sh } r} + \right. \\ \left. + i\gamma^3 (\partial_z + \text{th } z) - M \right] \Psi = 0. \quad (5.1.6)$$

Можно убрать добавки при операторах дифференцирования ∂_r и ∂_z подстановкой

$$\Psi = \frac{\varphi}{\sqrt{\text{sh } r \text{ ch } z}},$$

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\text{ch } r - 1)}{\text{sh } r} + \text{ch } z \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \varphi = 0. \quad (5.1.7)$$

Ищем решения в виде:

$$\varphi = e^{-iet} e^{im\phi} \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix},$$

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \frac{m - eB(\text{ch } r - 1)}{\text{sh } r} + \right. \\ \left. + \text{ch } z \left(\epsilon\gamma^0 + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.1.8)$$

Выбирая матрицы Дирака в спинорном базисе, находим явный вид уравнений для четырех функций $f_a(t, z)$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_4 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_3 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_4}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (\epsilon f_4 - M f_2) &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_1}{\partial z} - i \operatorname{ch} z (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_2}{\partial z} - i \operatorname{ch} z (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

где

$$\mu(r) = \frac{m - eB(\operatorname{ch} r - 1)}{\operatorname{sh} r}.$$

При линейном ограничении

$$f_3 = A f_1, \quad f_4 = A f_2 \tag{5.1.10}$$

система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_1}{\partial z} + i \operatorname{ch} z \left(\epsilon - \frac{M}{A}\right) f_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_1}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (-\epsilon + MA) f_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_2}{\partial z} + i \operatorname{ch} z \left(\epsilon - \frac{M}{A}\right) f_2 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_2}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (-\epsilon + MA) f_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Она будет совместной, если выполняется условие

$$\epsilon - \frac{M}{A} = -\epsilon + MA \quad \Longrightarrow \quad A = A_{1,2} = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - M^2}}{M}. \tag{5.1.12}$$

Таким образом, задача сведена к системе двух уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_1}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (-\epsilon + MA) f_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_2}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (-\epsilon + MA) f_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

В соответствии с двумя возможностями имеем два линейно независимых решения:

$$\begin{aligned}
 AM &= \epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - M^2}, & (\sqrt{\epsilon^2 - M^2} = p) \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_2 &= 0;
 \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

$$\begin{aligned}
 AM &= \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - M^2}, & (\sqrt{\epsilon^2 - M^2} = p) \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Для определенности следим за системой (5.1.14): переход к случаю системы (5.1.15) достигается формальной заменой параметра $p \Rightarrow -p$. Ищем решение в виде:

$$f_1 = Z_1(z) R_1(r), \quad f_2 = Z_2(z) R_2(r), \tag{5.1.16}$$

система (5.1.14) запишется так:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) Z_2 R_2 + \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) Z_1 R_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) Z_1 R_1 - \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) Z_2 R_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

Вводим постоянную разделения

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) Z_1 &= \lambda Z_2, \\
 \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) Z_2 &= \lambda Z_1.
 \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

Система (5.1.17) дает

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) R_2 + \lambda R_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) R_1 - \lambda R_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

5.2 Решение уравнений по z -переменной

Из (5.118) получим дифференциальное уравнение второго порядка для $Z_1(z)$:

$$\frac{d^2}{dz^2} Z_1 + \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{d}{dz} Z_1 + \left(p^2 + ip \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} - \frac{\lambda^2}{\operatorname{ch}^2 z} \right) Z_1 = 0. \quad (5.2.1)$$

Введем новую переменную

$$y = \frac{1 + \operatorname{th} z}{2}, \quad \frac{d}{dz} = 2y(1-y) \frac{d}{dy}, \quad \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{dZ_1}{dz} = (2y-1)2y(1-y) \frac{d}{dy},$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = 4y^2(1-y)^2 \frac{d^2}{dy^2} + 4y(1-y)(1-2y) \frac{d}{dy}.$$

Уравнение (5.2.1) принимает вид:

$$\left[4y(1-y) \frac{d}{dy} + 2(1-2y) \frac{d}{dy} + p^2 \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \right) + \right. \\ \left. + ip \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y} \right) - 4\lambda^2 \right] Z_1 = 0. \quad (5.2.2)$$

В уравнении (5.2.2) сделаем подстановку $Z_1 = y^A(1-y)^B Z(y)$; в результате получаем:

$$4y(1-y) \frac{d^2 Z}{dy^2} + 4 \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dy} + \\ + \left[\frac{2A(2A-1) + p(p-i)}{y} + \frac{2B(2B-1) + p(p+i)}{1-y} - \right. \\ \left. - 4(A+B)^2 - 4\lambda^2 \right] Z = 0. \quad (5.2.3)$$

Требуем выполнения равенств

$$2A(2A-1) + p(p-i) = 0 \implies A = -\frac{ip}{2}, \frac{1+ip}{2},$$

$$2B(2B-1) + p(p+i) = 0 \implies B = \frac{ip}{2}, \frac{1-ip}{2}. \quad (5.2.4)$$

Уравнение (5.2.3) примет более простой вид:

$$y(1-y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dz} - [(A+B)^2 + \lambda^2] Z = 0, \quad (5.2.5)$$

что является уравнением гипергеометрического типа. Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha = +i\lambda + A + B, \quad \beta = -i\lambda + A + B, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (5.2.6)$$

Напоминаем, что

$$A = -\frac{ip}{2}, \frac{1+ip}{2}, \quad B = \frac{ip}{2}, \frac{1-ip}{2},$$

$$Z_1 = \left(\frac{e^z}{\operatorname{ch} z}\right)^A \left(\frac{e^{-z}}{\operatorname{ch} z}\right)^B F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}). \quad (5.2.7)$$

Рассмотрим все четыре возможности для выбора параметров A и B .

Вариант 1: $A = \frac{1+ip}{2}, B = \frac{1-ip}{2}, A+B = 1, A-B = ip,$

$$\alpha = i\lambda + 1, \quad \beta = -i\lambda + 1, \quad \gamma = ip + \frac{3}{2},$$

$$Z_1 = \frac{e^{ipz}}{\operatorname{ch} z} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}),$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad Z_1 \rightarrow \frac{e^{ipz}}{e^z} = 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad Z_1 \rightarrow \frac{e^{ipz}}{e^{-z}} = 0. \quad (5.2.8)$$

Вариант 2: $A = -\frac{ip}{2}, B = \frac{ip}{2}, A+B = 0, A-B = -ip,$

$$\alpha = i\lambda, \quad \beta = -i\lambda, \quad \gamma = -ip + \frac{1}{2},$$

$$Z_1 = e^{-ipz} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}). \quad (5.2.9)$$

Вариант 3: $A = \frac{1+ip}{2}, B = \frac{ip}{2}, A+B = ip + 1/2, A-B = 1/2,$

$$\alpha = +i\lambda + \frac{1}{2} + ip, \quad \beta = -i\lambda + \frac{1}{2} + ip, \quad \gamma = ip + \frac{3}{2},$$

$$Z_1 = \frac{e^{z/2}}{(\operatorname{ch} z)^{ip+1/2}} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}),$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{-ipz}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{+ipz} e^{-\infty} = 0. \quad (5.2.10)$$

Этот вариант не имеет нужного предельного перехода к плоскому пространству и дальше рассматриваться не будет.

Вариант 4: $A = -\frac{ip}{2}, B = \frac{1-ip}{2}, A+B = -ip + 1/2, A-B = -1/2,$

$$\alpha = +i\lambda + \frac{1}{2} - ip, \quad \beta = -i\lambda + \frac{1}{2} - ip, \quad \gamma = -ip + \frac{1}{2},$$

$$Z_1 = \frac{e^{-z/2}}{(\operatorname{ch} z)^{-ip+1/2}} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}),$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{+ipz} e^{-z} = 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{-ipz}. \quad (5.2.11)$$

Этот вариант также не имеет нужного предельного перехода к плоскому пространству и дальше рассматриваться не будет.

5.3 Решение уравнений по r -переменной

Из системы

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) R_2 + \lambda R_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \mu\right) R_1 - \lambda R_2 = 0$$

следует уравнение для R_1 :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d\mu}{dr} - \mu^2 + \lambda^2\right) R_1 = 0. \quad (5.3.1)$$

С учетом (для краткости на некоторое время обозначим eB как B)

$$\mu(r) = \frac{m}{\operatorname{sh} r} - B \frac{\operatorname{ch} r - 1}{\operatorname{sh} r}$$

получим явный вид уравнения.

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left[\frac{m \operatorname{ch} r + B (\operatorname{ch} r - 1)}{\operatorname{sh}^2 r} - \frac{[m - B (\operatorname{ch} r - 1)]^2}{\operatorname{sh}^2 r} + \lambda^2 \right] R_1 = 0. \quad (5.3.2)$$

Введем новую переменную $y = (1 + \operatorname{ch} r)/2$, при этом получаем

$$\begin{aligned} & y(1-y) \frac{d^2 R_1}{dy^2} + \left(\frac{1}{2} - y\right) \frac{dR_1}{dy} - \\ & - \left[\lambda^2 + \frac{m^2}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) + \frac{m}{4} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{mB}{y} - B^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) + \frac{B}{2y} \right] R_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Сделаем подстановку $R_1 = y^A (1-y)^C R(y)$, уравнение (5.3.3) принимает вид:

$$y(1-y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1) y \right] \frac{dR}{dy} +$$

$$+ \left[\frac{A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 - mB - B^2 - B/2}{y} + \frac{C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4}{1-y} - (A+C)^2 - \lambda^2 + B^2 \right] R = 0. \quad (5.3.4)$$

Требуем выполнения равенств

$$\begin{aligned} A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 - mB - B^2 - B/2 = 0 & \implies \\ A = -\frac{2B+m}{2}, \frac{2B+m+1}{2}, \\ C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4 = 0 & \implies C = \frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

при этом уравнение (5.3.4) упростится

$$\begin{aligned} y(1-y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A+2C+1)y \right] \frac{dR}{dy} - \\ - [(A+C)^2 + \lambda^2 - B^2] R = 0, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

что является уравнением гипергеометрического типа. Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha = A + C + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \beta = A + C - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (5.3.7)$$

Напоминаем, что

$$\begin{aligned} R_1 = (1 + \operatorname{ch} r)^A (1 - \operatorname{ch} r)^C F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \operatorname{ch} r}{2}), \\ A = -\frac{2B+m}{2}, \frac{2B+m+1}{2}, \quad C = \frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Чтобы решение было конечным в начале координат $r = 0$ (при этом находимся на оси z : $u_0 = \operatorname{ch} z$, $u_3 = \operatorname{sh} z$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$) и на бесконечности $r \rightarrow \infty$, нужно выбирать положительные значения C и отрицательные значения A такие, что $C + A < 0$:

$$\begin{aligned} R_1 = (1 + \operatorname{ch} r)^A (1 - \operatorname{ch} r)^C F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \operatorname{ch} r}{2}), \\ C \geq 0, \quad A < 0. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Проследим за четырьмя возможными вариантами (для определенности считаем, что $B > 0$ – на общность рассмотрения это не влияет):

$$1. \quad C = \frac{m}{2} \geq 0, \quad A = \frac{2B + m + 1}{2} < 0, \quad C + A = B + m + \frac{1}{2} < 0;$$

этот вариант невозможный.

$$2. \quad C = \frac{m}{2} \geq 0, \quad A = -\frac{2B + m}{2} < 0, \quad C + A = -B < 0;$$

вариант возможный.

$$3. \quad C = \frac{1 - m}{2} \geq 0, \quad A = \frac{2B + m + 1}{2} < 0, \quad C + A = B + 1 < 0;$$

этот вариант невозможный.

$$4. \quad C = \frac{1 - m}{2} \geq 0, \quad A = -\frac{2B + m}{2} < 0, \quad C + A = -B - m + \frac{1}{2} < 0;$$

вариант возможный.

Таким образом, интересны только два варианта:

$$2. \quad m > 0, \quad 4. \quad -2B < m \leq 1. \quad (5.3.10)$$

Соответственно имеем решения.

Вариант 2 ($m > 0$): $C = m/2, \quad A = -B - m/2 < 0,$

$$R_1 = (1 + \operatorname{ch} r)^{-B-m/2} (1 - \operatorname{ch} r)^{m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \operatorname{ch} r}{2}),$$

$$\alpha = -B + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \beta = -B - \sqrt{B^2 - \lambda^2},$$

$$\gamma = -2B - m + \frac{1}{2}; \quad (5.3.11)$$

при этом условие квантования выглядит так:

$$\alpha = -n \implies \sqrt{B^2 - \lambda^2} = B - n \implies$$

$$\lambda^2 = +2Bn - n^2. \quad (5.3.12)$$

Чтобы радиальная функция обращалась в ноль на бесконечности $r \rightarrow \infty$, необходимо выполнение неравенства

$$A + C + n < 0 \implies B - n > 0; \quad (5.3.13)$$

в свою очередь, это условие обеспечивает вещественность и положительность корня квадратного $\sqrt{B^2 - \lambda^2}$.

$$\begin{aligned}
& \text{Вариант 4} \quad \underline{(-2B < m \leq 1)} : \quad C = 1/2 - m/2, \\
& A = -B - m/2 < 0, \quad C + A = -B - m + 1/2 < 0, \\
& R_1 = (1 + \text{ch } r)^{-B-m/2} (1 - \text{ch } r)^{1/2-m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \text{ch } r}{2}), \\
& \alpha = (-B - m + 1/2) + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \\
& \beta = (-B - m + 1/2) - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \gamma = -2B - m + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Здесь условие квантования имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha = -n & \implies \sqrt{B^2 - \lambda^2} = B + m - 1/2 - n, \\
& \implies \lambda^2 = +2B(n - m + \frac{1}{2}) - (n - m + \frac{1}{2})^2.
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Чтобы радиальная функция обращалась в ноль на бесконечности $r \rightarrow \infty$, необходимо выполнение неравенства

$$A + C + n < 0 \implies B + m - 1/2 - n > 0; \tag{5.3.16}$$

последнее неравенство обеспечивает вещественность и положительность корня квадратного $\sqrt{B^2 - \lambda^2}$.

Таким образом, спектр описывается соотношениями:

$$2. \quad n < B, \quad m > 0,$$

$$\lambda^2 = +2Bn - n^2;$$

$$4. \quad n < B + m - 1/2, \quad -2B < m \leq 1,$$

$$\lambda^2 = +2B(n - m + \frac{1}{2}) - (n - m + \frac{1}{2})^2. \tag{5.3.17}$$

Предельный переход к плоскому пространству осуществляется следующим образом:

$$\lambda^2 \rightarrow \frac{P_z^2 \rho^2}{\hbar^2} = \lambda_0^2 \rho^2, \quad B \rightarrow \frac{eB}{\hbar c} \rho^2,$$

$$2. \quad \lambda_0^2 = \frac{2eB}{\hbar c} n;$$

$$4. \quad \lambda_0^2 = \frac{2eB}{\hbar c} (n - m + \frac{1}{2}). \tag{5.3.18}$$

Глава 6

ЭЛЕКТРОН В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА

6.1 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве S_3

Будем использовать следующую систему координат в сферическом пространстве:

$$\begin{aligned} dS^2 &= c^2 dt^2 - \rho^2 [\cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) + dz^2], \\ z &\in [-\pi/2, +\pi/2], \quad r \in [0, +\pi], \quad \phi \in [0, 2\pi], \\ u^1 &= \cos z \sin r \cos \phi, \quad u^2 = \cos z \sin r \sin \phi, \\ u^3 &= \sin z, \quad u^0 = \cos z \cos r; \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

область изменения координат (r, ϕ, z) :

$$G = \{ \rho \in [0, +\pi/2], \phi \in [-\pi, +\pi], z \in [-\pi, +\pi] \}.$$

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах легко можно обобщить и на случай пространства Римана S_3 :

$$A_\phi = -2B \sin^2 \frac{r}{2} = B (\cos r - 1). \quad (6.1.2)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора $F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = B \sin r$.

Будем рассматривать уравнения Дирака в магнитном поле (6.1.2) в пространстве Римана S_3 . Цилиндрическим координатам $x^\alpha = (t, r, \phi, z)$ из (6.1.1) отвечает тетрада

$$e_{(a)}^\beta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^{-1} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^{-1} z \sin^{-1} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.1.3)$$

Вычисляем символы Кристоффеля:

$$\Gamma^r_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\operatorname{tg} z \\ 0 & -\sin r \cos r & 0 \\ -\operatorname{tg} z & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^\phi_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{ctg} r & 0 \\ \operatorname{ctg} r & 0 & -\operatorname{tg} z \\ 0 & -\operatorname{tg} z & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^z_{jk} = \begin{vmatrix} \sin z \cos z & 0 & 0 \\ 0 & \sin z \cos z \sin^2 r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.1.4)$$

Вычисляем коэффициенты вращения Риччи: приводим отличные от нуля коэффициенты:

$$\gamma_{122} = \frac{1}{\cos z \operatorname{tg} r}, \quad \gamma_{311} = -\operatorname{tg} z, \quad \gamma_{322} = -\operatorname{tg} z. \quad (6.1.5)$$

Общековариантное уравнение Дирака принимает следующий вид:

$$\left\{ i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \left(\frac{\partial_r}{\cos z} + \sigma^{13} \operatorname{tg} z \right) + i\gamma^3 \partial_z - M + \right. \\ \left. + \gamma^2 \left[i \left(\frac{\partial_\phi}{\cos z \sin r} + \frac{\sigma^{12}}{\cos z \operatorname{tg} r} + \sigma^{23} \operatorname{tg} z \right) - \frac{eB(\cos r - 1)}{\cos z \sin r} \right] \right\} \Psi = 0. \quad (6.1.6)$$

Учтем равенства

$$\gamma^1 \sigma^{13} = -\gamma^3 / 2, \quad \gamma^2 \sigma^{12} = \gamma^1 / 2, \quad \gamma^2 \sigma^{23} = -\gamma^3 / 2;$$

уравнение (6.1.6) упростится

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \frac{i\gamma^1}{\cos z} \left(\partial_r + \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} r} \right) + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1)}{\cos z \sin r} + \right. \\ \left. + i\gamma^3 (\partial_z - \operatorname{tg} z) - M \right] \Psi = 0. \quad (6.1.7)$$

Найденное представление для уравнения Дирака можно проверить независимым вычислением, если воспользоваться известным представлением уравнения Дирака в ортогональных координатах:

$$\{ \gamma^k [i (e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + B_k) - eA_k] - m \} \Psi = 0, \\ B_k = \frac{1}{2} \nabla_\beta e_{(k)}^\beta, \quad A_k = e_{(k)}^\beta A_\beta. \quad (6.1.8)$$

Учитывая выражения для B_k :

$$B_0(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 z \sin r} \partial_t \cos^2 z \sin r e_{(0)}^t = 0, \\ B_1(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 z \sin r} \partial_r \cos^2 z \sin r e_{(1)}^r = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos z \sin r} \frac{\cos r}{\sin r}, \\ B_2(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 z \sin r} \partial_\phi \cos^2 z \sin r e_{(2)}^\phi = 0, \\ B_3(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 z \sin r} \partial_z \cos^2 z \sin r e_{(3)}^z = -\frac{\sin z}{\cos z},$$

уравнение Дирака (6.1.8) записываем в виде:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \frac{i\gamma^1}{\cos z} \left(\partial_r + \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} r} \right) + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1)}{\cos z \sin r} + \right. \\ \left. + i\gamma^3 (\partial_z - \operatorname{tg} z) - M \right] \Psi = 0, \quad (6.1.9)$$

что совпадает с (6.1.7).

6.2 Разделение переменных в уравнении Дирака в S_3

Полученное выше уравнение Дирака можно переписать в более симметричном виде:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \frac{i\gamma^1}{\cos z} \partial_r + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1) + i\sigma^{12} \cos r}{\cos z \sin r} + \right. \\ \left. + i\gamma^3 \partial_z + i(\gamma^2 \sigma^{23} + \gamma^1 \sigma^{13}) \operatorname{tg} z - M \right] \Psi = 0. \quad (6.2.1)$$

С учетом алгебры матриц Дирака возможно дальнейшее упрощение:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \frac{i\gamma^1}{\cos z} \partial_r + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1) + i\sigma^{12} \cos r}{\cos z \sin r} + \right. \\ \left. + i\gamma^3 (\partial_z - \operatorname{tg} z) - M \right] \Psi = 0. \quad (6.2.2)$$

Можно подобрать множитель, убирающий добавку при операторе ∂_z . Действительно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{tg} z \right) \varphi(z) \Phi = \Phi \left(\frac{\partial}{\partial z} \Phi + \frac{d\varphi}{dz} - \varphi \operatorname{tg} z \right);$$

требуем

$$\frac{d\varphi}{dz} - \varphi \operatorname{tg} z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{1}{\cos z}.$$

Таким образом, уравнение Дирака для функции Φ имеет вид:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + \frac{1}{\cos z} \left(i\gamma^1 \partial_r + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1) + i\sigma^{12} \cos r}{\sin r} \right) + \right. \\ \left. + i\gamma^3 \partial_z - M \right] \Phi = 0. \quad (6.2.3)$$

Его можно записать так:

$$\left[i\gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos r}{2 \sin r} \right) + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1)}{\sin r} + \right.$$

$$+ \cos z \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \Big] \Phi = 0. \quad (6.2.4)$$

Можно убрать добавку при операторе дифференцирования по r подстановкой $\Phi = \varphi/\sqrt{\sin r}$:

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1)}{\sin r} + \cos z \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \varphi = 0. \quad (6.2.5)$$

Ищем решения в виде:

$$\varphi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} \begin{pmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{pmatrix},$$

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \mu(r) + \cos z \left(\epsilon\gamma^0 + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \begin{pmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{pmatrix} = 0, \quad (6.2.6)$$

используем обозначение

$$\mu(r) = \frac{m + eB(\cos r - 1)}{\sin r}.$$

Выбирая матрицы Дирака в спинорном базисе, находим явный вид уравнений для четырех функций $f_a(t, z)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_4 + \cos z \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) f_3 - \cos z \frac{\partial f_4}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_4 - M f_2) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Накладываем линейное ограничение

$$f_3 = A f_1, \quad f_4 = A f_2; \quad (6.2.8)$$

система уравнений принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} + i \cos z \left(\epsilon - \frac{M}{A} \right) f_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} + i \cos z (-\epsilon + MA) f_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} + i \cos z \left(\epsilon - \frac{M}{A}\right) f_2 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} + i \cos z (-\epsilon + MA) f_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Она будет совместной, если выполняется условие

$$\epsilon - \frac{M}{A} = -\epsilon + MA \quad \Longrightarrow \quad A = A_{1,2} = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - M^2}}{M}. \tag{6.2.10}$$

Таким образом, задача сведена к системе двух уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} + i \cos z (-\epsilon + MA) f_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} + i \cos z (-\epsilon + MA) f_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

В соответствии с двумя возможностями имеем два линейно независимых решения:

$$\begin{aligned}
AM = \epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - M^2}, \quad (\sqrt{\epsilon^2 - M^2} = p), \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_2 &= 0;
\end{aligned} \tag{6.2.12a}$$

$$\begin{aligned}
AM = \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - M^2}, \quad (\sqrt{\epsilon^2 - M^2} = p), \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{6.2.12b}$$

Ищем решение в виде (следим за системой (6.2.12a)):

$$\begin{aligned}
f_1 = Z_1(z) R_1(r) = l, \quad f_2 = Z_2(z) R_2(r) = l, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) Z_2 R_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) Z_1 R_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) Z_1 R_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) Z_2 R_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Вводим постоянную разделения

$$\cos z \left(\frac{d}{dz} + ip\right) Z_1 = \lambda Z_2,$$

$$\cos z \left(\frac{d}{dz} - i p \right) Z_2 = \lambda Z_1. \quad (6.2.14)$$

Система (6.2.13) дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \mu \right) R_2 + \lambda R_1 &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \mu \right) R_1 - \lambda R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

6.3 Решение уравнений по z -переменной

Из (6.2.14) получим дифференциальное уравнение второго порядка по переменной z :

$$\frac{d^2 Z_1}{dz^2} - \frac{\sin z}{\cos z} \frac{dZ_1}{dz} + \left(p^2 - ip \frac{\sin z}{\cos z} - \frac{\lambda^2}{\cos^2 z} \right) Z_1 = 0. \quad (6.3.1)$$

Введем новую переменную

$$\begin{aligned} y = \frac{1 + itg z}{2}, \quad \frac{d}{dz} &= 2iy(1-y) \frac{d}{dy}, \quad \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{dZ_1}{dz} = 2(1-2y)y(1-y) \frac{d}{dy}, \\ \frac{d^2}{dz^2} &= -4y^2(1-y)^2 \frac{d}{dy} - 4y(1-y)(1-2y) \frac{d}{dy} \end{aligned}$$

и в полученном уравнении сделаем подстановку:

$$\begin{aligned} Z_1 &= y^A (1-y)^B Z(y), \\ Z_1' &= Ay^{A-1}(1-y)^B Z - By^A(1-y)^{B-1} Z + y^A(1-y)^B Z', \\ Z_1'' &= A(A-1)y^{A-2}(1-y)^B Z - AB y^{A-1}(1-y)^{B-1} Z + Ay^{A-1}(1-y)^B Z' - \\ &\quad - AB y^{A-1}(1-y)^{B-1} Z + B(B-1)y^A(1-y)^{B-2} Z - By^A(1-y)^{B-1} Z' + \\ &\quad + Ay^{A-1}(1-y)^B Z' - By^A(1-y)^{B-1} Z' + y^A(1-y)^B Z''. \end{aligned}$$

Уравнение (6.3.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} 4y(1-y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + 4 \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dz} + \\ + \left[\frac{2A(2A-1) - p(p+1)}{y} + \frac{2B(2B-1) - p(p-1)}{1-y} - \right. \\ \left. - 4(A+B)^2 + 4\lambda^2 \right] Z = 0. \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Требуем выполнения равенств:

$$\begin{aligned} 2A(2A-1) - p(p+1) = 0 &\implies A = -\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \\ 2B(2B-1) - p(p-1) = 0 &\implies B = \frac{p}{2}, \frac{1-p}{2}; \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

уравнение (6.3.2) примет более простой вид:

$$\begin{aligned} y(1-y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dz} - \\ - [(A+B)^2 - \lambda^2] Z = 0, \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

что является уравнением гипергеометрического типа. Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями:

$$\alpha = \lambda + A + B, \quad \beta = -\lambda + A + B, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (6.3.5)$$

Напоминаем, что

$$\begin{aligned} Z_1 = \left(\frac{e^{iz}}{\cos z} \right)^A \left(\frac{e^{-iz}}{\cos z} \right)^B F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}), \\ A = -\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \quad B = \frac{p}{2}, \frac{1-p}{2}, \quad p = \sqrt{\epsilon^2 - M^2}. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Проследим за 4 возможностями (в зависимости от выбора A и C). Для определенности предполагаем, что $\lambda > 0$. Общности рассмотрения это не уменьшает (при отрицательных λ для квантования нужно использовать вместо параметра β параметр α или наоборот).

Вариант 1: $A = \frac{p+1}{2}, B = \frac{1-p}{2}, A+B=1, A-B=p,$

условие квантования

$$\begin{aligned} \beta = -n, \quad \text{спектр} \quad \lambda = 1+n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \alpha = \lambda + 1, \quad \gamma = p + \frac{3}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{ipz}}{\cos z} F(\lambda + 1, -n, p + \frac{3}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}). \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Вариант 2: $A = -\frac{p}{2}, B = \frac{p}{2}, A+B=0, A-B=-p,$

$$\begin{aligned} \beta = -n, \quad \text{спектр} \quad \lambda = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \alpha = +n, \quad \gamma = -p + \frac{1}{2}, \quad Z_1 = e^{-ipz} F(\lambda, -n, -p + \frac{1}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}). \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Обращаем внимание на то, что в этих двух случаях мы не получили условия квантования на параметр p , вместо этого получили условие квантования для параметра λ . Однако условие квантования для параметра λ также будет следовать из системы радиальных уравнений по переменной r , и мы увидим, что эти правила квантования не совпадут. Поэтому дальше решения типов 1 и 2 не рассматриваем.

$$\text{Вариант 3: } A = \frac{p+1}{2}, \quad B = \frac{p}{2}, \quad A+B = p+1/2, \quad A-B = 1/2,$$

$$\beta = -n, \quad \text{спектр } p = +\sqrt{\epsilon^2 - M^2} = \lambda - (n+1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha = \lambda + p + \frac{1}{2}, \quad \gamma = p + \frac{3}{2},$$

$$Z_1 = \frac{e^{iz/2}}{(\cos z)^{p+1/2}} F\left(\lambda + p + \frac{1}{2}, -n, p + \frac{3}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}\right). \quad (6.3.9)$$

$$\text{Вариант 4: } A = -\frac{p}{2}, \quad B = \frac{1-p}{2}, \quad A+B = -p+1/2, \quad A-B = -1/2,$$

$$\alpha = -n, \quad \text{спектр } p = \sqrt{\epsilon^2 - M^2} = \lambda + (n+1/2),$$

$$\beta = -\lambda - p + \frac{1}{2}, \quad \gamma = -p + \frac{1}{2},$$

$$Z_1 = \frac{e^{-iz/2}}{(\cos z)^{-p+1/2}} F\left(\lambda - p + \frac{1}{2}, -n, -p + \frac{1}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}\right). \quad (6.3.10)$$

Наиболее интересными представляются решения типов 3 и 4. Они отвечают качественно разным физическим ситуациям:

$$\text{вариант 3: } p = +\sqrt{\epsilon^2 - m^2} = \lambda - (n+1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{вариант 4: } p = +\sqrt{\epsilon^2 - m^2} = \lambda - (n+1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(6.3.11)$$

В случае 3 движение вдоль оси z уменьшает общую энергию; в случае 4 движение вдоль оси z увеличивает общую энергию. Последний вариант кажется более понятным по физическим соображениям. Вполне возможно, что обе ситуации реализуются физически и являются проявлением действия магнитного поля и геометрии сферического пространства S_3 .

6.4 Решение уравнений по r -переменной

Из системы

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) R_2 + \lambda R_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \mu\right) R_1 - \lambda R_2 = 0 \quad (6.4.1)$$

следует уравнение для R_1 :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d\mu}{dr} - \mu^2 + \lambda^2\right) R_1 = 0.$$

С учетом (для краткости обозначаем eB как B)

$$\mu(r) = \frac{m}{\sin r} + B \frac{\cos r - 1}{\sin r}$$

получим явный вид уравнения

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left[\frac{m \cos r - B (\cos r - 1)}{\sin^2 r} - \frac{[m + B (\cos r - 1)]^2}{\sin^2 r} + \lambda^2 \right] R_1 = 0.$$

Введем новую переменную $y = (1 + \cos r)/2$, при этом получаем

$$y(1-y) \frac{d^2 R_1}{dy^2} + \left(\frac{1}{2} - y\right) \frac{dR_1}{dy} - \left[-\lambda^2 + \frac{m^2}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) + \frac{m}{4} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y}\right) - \frac{mB}{y} - B^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) - \frac{B}{2y} \right] R_1 = 0.$$

Сделаем подстановку $R_1 = y^A(1-y)^C R(y)$, уравнение дает

$$y(1-y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y \right] \frac{dR}{dy} + \left[\frac{A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 + mB - B^2 + B/2}{y} + \frac{C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4}{1-y} - (A+C)^2 + \lambda^2 + B^2 \right] R = 0. \quad (6.4.2)$$

Требуем выполнения равенств:

$$A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 + mB - B^2 + B/2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{2B - m}{2}, \quad \frac{-2B + m + 1}{2};$$

$$C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}. \quad (6.4.3)$$

В результате уравнение (6.4.2) упрощается:

$$y(1-y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y \right] \frac{dR}{dy} - [(A+C)^2 - \lambda^2 - B^2] R = 0, \quad (6.4.4)$$

что является уравнением гипергеометрического типа. Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha = A + C - \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \beta = A + C + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (6.4.5)$$

Напоминаем, что

$$R_1 = (1 + \cos r)^A (1 - \cos r)^C F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2});$$

$$A = -\frac{2B + m}{2}, \quad \frac{2B + m + 1}{2}, \quad C = \frac{m}{2}, \quad \frac{1 - m}{2}. \quad (6.4.6)$$

Чтобы решение обращалось в ноль в начале координат $r = 0$ (при этом находимся на половине замкнутой линии $u_0 = +\cos z$, $u_3 = \sin z$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$) и при $r = \pi$ (при этом находимся на другой половине этой замкнутой линии $u_0 = -\cos z$, $u_3 = \sin z$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$), нужно выбирать положительные значения параметров A и C :

$$R_1 = (1 + \cos r)^A (1 - \cos r)^C F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}),$$

$$A > 0, \quad C > 0. \quad (6.4.7)$$

Проследим за четырьмя возможными вариантами (для определенности считаем, что $B > 0$ – на общность рассмотрения это не влияет).

$$\text{Вариант 1:} \quad C = \frac{m}{2} > 0, \quad A = -\frac{2B + m}{2} > 0,$$

$$C + A = -B > 0;$$

вариант невозможный.

$$\text{Вариант 2:} \quad C = \frac{m}{2} > 0, \quad A = \frac{2B + m + 1}{2} > 0,$$

$$C + A = B + m + \frac{1}{2} > 0.$$

$$\text{Вариант 3:} \quad C = \frac{1 - m}{2} > 0, \quad A = \frac{2B + m + 1}{2} > 0,$$

$$C + A = B + 1 > 0.$$

$$\text{Вариант 4: } C = \frac{1-m}{2} > 0, \quad A = -\frac{2B+m}{2} > 0,$$

$$C + A = -B - m + \frac{1}{2} > 0.$$

Соответственно имеем 3 типа решений.

$$\text{Вариант 2: } m > 0, \quad m \in \{+1, +2, \dots\},$$

$$R_1 = (1 + \cos r)^{B+m/2+1/2} (1 - \cos r)^{m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}),$$

$$\alpha = (B + m + 1/2) - \sqrt{B^2 + \lambda^2},$$

$$\beta = (B + m + 1/2) + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = B + m + 3/2,$$

$$\alpha = -n \quad \implies \quad \sqrt{B^2 + \lambda^2} = B + (m + n + \frac{1}{2}),$$

$$\text{спектр } \lambda^2 = 2B (m + n + \frac{1}{2}) + (m + n + \frac{1}{2})^2. \quad (6.4.8)$$

$$\text{Вариант 3: } -1 - 2B < m < 1, \quad m \in \{-1 - 2B < m_0, \dots, -1, 0\}$$

$$R_1 = (1 + \cos r)^{B+m/2+1/2} (1 - \cos r)^{1/2-m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}),$$

$$\alpha = B + 1 - \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \beta = B + 1 + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = 2B + m + 3/2,$$

$$\alpha = -n \quad \implies \quad \sqrt{B^2 + \lambda^2} = B + n + \frac{1}{2},$$

$$\text{спектр } \lambda^2 = 2B (n + \frac{1}{2}) + (n + \frac{1}{2})^2. \quad (6.4.9)$$

$$\text{Вариант 4: } m < -2B,$$

$$R_1 = (1 + \cos r)^{-B-m/2} (1 - \cos r)^{1/2-m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2});$$

$$\alpha = (-B - m + \frac{1}{2}) - \sqrt{B^2 + \lambda^2},$$

$$\beta = (-B - m + \frac{1}{2}) + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = -2B - m + \frac{1}{2},$$

$$\alpha = -n \quad \implies \quad \sqrt{B^2 + \lambda^2} = -B - m + \frac{1}{2} + n,$$

$$\lambda^2 = 2B (m - \frac{1}{2} - n) + (m - \frac{1}{2} - n)^2. \quad (6.4.10)$$

Глава 7

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДАФФИНА – КЕММЕРА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

7.1 Введение

В научной литературе практически всегда при анализе задачи о движении частицы в постоянном и однородном магнитном поле обсуждается либо нерелятивистский случай шредингеровской частицы со спином 0, либо релятивистский случай дираковской частицы со спином 1/2. Ниже будут получены точные решения волнового уравнения для частицы со спином 1. В качестве рабочего выбрано представление уравнения в матричном формализме Даффина – Кеммера, причем используется его обобщенная форма, которая за счет использования тетрадного формализма лучше приспособлена для учета симметрии задач.

Исходное волновое уравнение Даффина – Кеммера в тетрадной форме имеет вид

$$\left[i \beta^\alpha(x) (\partial_\alpha + B_\alpha - i \frac{e}{\hbar} A_\alpha) - \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi(x) = 0;$$
$$\beta^\alpha(x) = \beta^a e_{(a)}^\alpha(x); \quad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta}, \quad (7.1.1)$$

где $e_{(a)}^\alpha(x)$ – тетрада, J^{ab} – генераторы 10-мерного представления группы Лоренца, отвечающего набору из 4-вектора и антисимметричного тензора (далее для краткости будем использовать обозначение $Mc/\hbar \Rightarrow M$). Однородному постоянному магнитному полю $\vec{B} = (0, 0, B)$ можно сопоставить вектор-потенциал, имеющий в цилиндрической системе координат особенно простой вид:

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}, \quad A_z = 0. \quad (7.1.2)$$

Выбираем диагональную тетраду

$$e_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad e_{(1)}^\alpha = (0, 1, 0, 0), \quad e_{(2)}^\alpha = (0, 0, \frac{1}{r}, 0), \quad e_{(3)}^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (7.1.3)$$

Ей отвечают коэффициенты вращения Риччи $\gamma_{ab0}(x) = 0$, $\gamma_{ab1}(x) = 0$ и

$$\gamma_{ab2}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & -1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_{ab3}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

С учетом явного вида тетрады приходим к следующему представлению уравнения Даффина – Кеммера:

$$\left[i\beta^0 \partial_0 + i\beta^1 \partial_r + i\frac{\beta^2}{r}(\partial_\phi + \frac{ieB}{2\hbar}r^2 + J^{12}) + i\beta^3 \partial_z - M \right] \Psi(t, r, \phi, z) = 0. \quad (7.1.4)$$

Дальше для краткости будем использовать обозначение $(eB/2\hbar) \Rightarrow B$. Для проведения разделения переменных в волновом уравнении нам потребуется явный вид основных матриц β^a ; при этом наиболее удобно будет использовать так называемый циклический базис, в котором генератор J^{12} диагонален (будем выписывать явный вид 10-мерных матриц, разбитых в соответствии со структурой волновой функции на блоки размерностей 1 – 3 – 3 – 3):

$$\beta^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_i \\ -e_i^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_i & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 0, i), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad e_3 = (0, i, 0),$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = s_3.$$

Входящая в уравнение (7.1.4) матрица J^{12} диагональна:

$$J^{12} = \beta^1 \beta^2 - \beta^2 \beta^1 = -i \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_3 \end{vmatrix} = -iS_3.$$

7.2 Разделение переменных

Подстановку для волновой функции выбираем в виде (она отвечает диагонализации проекции импульса вдоль оси z и диагонализации третьей проекции полного момента частицы со спином 1)

$$\Psi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} \Phi_0 \\ \vec{\Phi} \\ \vec{E} \\ \vec{H} \end{vmatrix},$$

$$\left[\epsilon\beta^0 + i\beta^1 \partial_r - \frac{\beta^2}{r} (m + Br^2 - S_3) - k\beta^3 - M \right] \begin{vmatrix} \Phi_0 \\ \vec{\Phi} \\ \vec{E} \\ \vec{H} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.2.1)$$

После необходимых вычислений приходим к системе из 10 радиальных уравнений:

$$\begin{aligned} -b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 - ik E_2 &= M\Phi_0, \\ -ib_{m-1} H_1 + ia_{m+1} H_3 + i\epsilon E_2 &= M\Phi_2, \\ ia_m H_2 + i\epsilon E_1 - k H_1 &= M\Phi_1, \\ -ib_m H_2 + i\epsilon E_3 + k H_3 &= M\Phi_3, \end{aligned} \quad (7.2.2a)$$

$$\begin{aligned} a_m \Phi_0 - i\epsilon \Phi_1 &= ME_1, & -ia_m \Phi_2 + k \Phi_1 &= MH_1, \\ b_m \Phi_0 - i\epsilon \Phi_3 &= ME_3, & ib_m \Phi_2 - k \Phi_3 &= MH_3, \\ -i\epsilon \Phi_2 - ik \Phi_0 &= ME_2, & ib_{m-1} \Phi_1 - ia_{m+1} \Phi_3 &= MH_2, \end{aligned} \quad (7.2.2b)$$

где для сокращения используются обозначения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = a_m, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = b_m.$$

Из (7.2.2a), (7.2.2b) можно получить 4 уравнения второго порядка для компонент Φ_a :

$$\begin{aligned} (-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m - k^2 - M^2) \Phi_0 - \epsilon k \Phi_2 + \\ + i\epsilon (b_{m-1} \Phi_1 + a_{m+1} \Phi_3) = 0, \end{aligned}$$

$$(-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m + \epsilon^2 - M^2) \Phi_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon k \Phi_0 - ik (b_{m-1} \Phi_1 + a_{m+1} \Phi_3) = 0 , \\
& (-a_m b_{m-1} + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_1 + a_m a_{m+1} \Phi_3 + \\
& \quad + i \epsilon a_m \Phi_0 + ik a_m \Phi_2 = 0 , \\
& (-b_m a_{m+1} + \epsilon^2 - M^2 - k^2) \Phi_3 + b_m b_{m-1} \Phi_1 + \\
& \quad + i \epsilon b_m \Phi_0 + ik b_m \Phi_2 = 0 .
\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

7.3 Простой класс решений радиальных уравнений

Покажем, что существует простое линейное ограничение на вектор Φ_a , позволяющее свести задачу к решению дифференциального уравнения второго порядка для одной функции. Пусть $\Phi_1 = 0$, $\Phi_3 = 0$; система (7.2.3) дает

$$\begin{aligned}
& (-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m - k^2 - M^2) \Phi_0 - \epsilon k \Phi_2 = 0 , \\
& (-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m + \epsilon^2 - M^2) \Phi_2 + \epsilon k \Phi_0 = 0 , \\
& i a_m (\epsilon \Phi_0 + ik \Phi_2) = 0 , \quad i b_m (\epsilon \Phi_0 + ik \Phi_2) = 0 .
\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Из двух последних уравнений в (7.3.1) следует

$$\epsilon \Phi_0 + k \Phi_2 = 0 . \tag{7.3.2}$$

С учетом чего первые два уравнения в (7.3.1) принимают вид

$$\begin{aligned}
& (-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_0 = 0 , \\
& (-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_2 = 0 .
\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

Найдем явный вид оператора

$$-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r^2} = \Delta .$$

Соответственно, уравнения (7.3.2) – это дифференциальные уравнения одного и того же вида, возникающего при рассмотрении скалярной частицы в магнитном поле:

$$\begin{aligned}
& (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_0 = 0 , \\
& (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_2 = 0 .
\end{aligned} \tag{7.3.4}$$

При необходимости можно легко найти тензорные компоненты волновой функции:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad \epsilon\Phi_0 + k\Phi_2 = 0, \\
 a_m \Phi_0 &= ME_1, \quad a_m \Phi_2 = iMH_1, \quad b_m \Phi_0 = ME_3, \\
 b_m \Phi_2 &= -iMH_3, \quad (\epsilon\Phi_2 + k\Phi_0) = iME_2, \quad 0 = H_2.
 \end{aligned}
 \tag{7.3.5}$$

Из общих соображений понятно, что должно существовать три линейно независимых решения. Выше построен только один класс решений.

7.4 Общий анализ системы радиальных уравнений

Обратимся к общему анализу системы уравнений (7.2.3). Перепишем ее в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
 [-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m + \epsilon^2 - M^2 - k^2] (k\Phi_0 + \epsilon\Phi_2) &= 0, \\
 [-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2] (\epsilon\Phi_0 + k\Phi_2) &= \\
 = (\epsilon^2 - k^2) [(\epsilon\Phi_0 + k\Phi_2) - (ib_{m-1}\Phi_1 + ia_{m+1}\Phi_3)] &;
 \end{aligned}
 \tag{7.4.1a}$$

$$\begin{aligned}
 (-a_m b_{m-1} + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_1 + a_m a_{m+1} \Phi_3 + i\epsilon a_m \Phi_0 + ik a_m \Phi_2 &= 0, \\
 (-b_m a_{m+1} + \epsilon^2 - M^2 - k^2) \Phi_3 + b_m b_{m-1} \Phi_1 + i\epsilon b_m \Phi_0 + ik b_m \Phi_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.4.1b}$$

Введем новые обозначения:

$$F(r) = k\Phi_0(r) + \epsilon\Phi_2(r), \quad G(r) = \epsilon\Phi_0(r) + k\Phi_2(r).
 \tag{7.4.2}$$

Уравнения (7.4.1a), (7.4.1b) запишутся короче:

$$\begin{aligned}
 [-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m + \epsilon^2 - M^2 - k^2] F &= 0, \\
 [-b_{m-1} a_m - a_{m+1} b_m - M^2] G &= -(\epsilon^2 - k^2) (ib_{m-1}\Phi_1 + ia_{m+1}\Phi_3),
 \end{aligned}
 \tag{7.4.3a}$$

$$\begin{aligned}
 (-a_m b_{m-1} + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_1 + a_m a_{m+1} \Phi_3 + ia_m G &= 0, \\
 (-b_m a_{m+1} + \epsilon^2 - M^2 - k^2) \Phi_3 + b_m b_{m-1} \Phi_1 + i b_m G &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.4.3b}$$

В двух последних уравнениях первое умножим слева на b_{m-1} и второе умножим слева на a_{m+1} ; в результате получим

$$\begin{aligned}
& -b_{m-1}a_m(b_{m-1}\Phi_1) + (\epsilon^2 - k^2 - M^2)(b_{m-1}\Phi_1) + \\
& \quad + b_{m-1}a_m(a_{m+1}\Phi_3) + ib_{m-1}a_mG = 0, \\
& -a_{m+1}b_m(a_{m+1}\Phi_3) + (\epsilon^2 - M^2 - k^2)(a_{m+1}\Phi_3) + \\
& \quad + a_{m+1}b_m(b_{m-1}\Phi_1) + i a_{m+1}b_m G = 0.
\end{aligned} \tag{7.4.4}$$

Введем обозначения:

$$b_{m-1}\Phi_1 = Z_1, \quad a_{m+1}\Phi_3 = Z_3; \tag{7.4.5}$$

система (7.4.4) переписывается так:

$$\begin{aligned}
& -b_{m-1}a_mZ_1 + (\epsilon^2 - k^2 - M^2)Z_1 + b_{m-1}a_mZ_3 + ib_{m-1}a_mG = 0, \\
& -a_{m+1}b_mZ_3 + (\epsilon^2 - M^2 - k^2)Z_3 + a_{m+1}b_mZ_1 + i a_{m+1}b_m G = 0.
\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

Введем новые функции $f(r), g(r)$:

$$Z_1 = \frac{f+g}{2}, \quad Z_3 = \frac{f-g}{2}, \quad Z_1 + Z_3 = f, \quad Z_1 - Z_3 = g; \tag{7.4.7}$$

система (7.4.6) переписывается так:

$$\begin{aligned}
& -b_{m-1}a_m g + (\epsilon^2 - k^2 - M^2)\frac{f+g}{2} + ib_{m-1}a_mG = 0, \\
& a_{m+1}b_m g + (\epsilon^2 - M^2 - k^2)\frac{f-g}{2} + i a_{m+1}b_m G = 0.
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

Вычтем из первого уравнения второе, а также сложим эти уравнения:

$$\begin{aligned}
& [-b_{m-1}a_m - a_{m+1}b_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2] g + i(b_{m-1}a_m - a_{m+1}b_m) G = 0, \\
& (-b_{m-1}a_m + a_{m+1}b_m) g + (\epsilon^2 - k^2 - M^2)f + i(b_{m-1}a_m + a_{m+1}b_m)G = 0.
\end{aligned} \tag{7.4.9}$$

Два уравнения системы (7.4.3a) в этих переменных записываются так:

$$\begin{aligned}
& (-b_{m-1} a_m - a_{m+1}b_m + \epsilon^2 - M^2 - k^2) F = 0, \\
& (-b_{m-1}a_m - a_{m+1}b_m - M^2) G = -i(\epsilon^2 - k^2) f.
\end{aligned} \tag{7.4.10}$$

Используя равенства

$$-b_{m-1} a_m - a_{m+1}b_m = \Delta, \quad -b_{m-1} a_m + a_{m+1}b_m = 2B, \tag{7.4.11}$$

уравнения (7.4.9) и (7.4.10) записываем в виде

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \epsilon^2 - M^2 - k^2) F &= 0, \\
 \Delta G &= M^2 G - i(\epsilon^2 - k^2) f, \\
 (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) g &= 2iB G, \\
 (\epsilon^2 - k^2 - M^2) f - i\Delta G + 2B g &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.4.12}$$

Пользуясь вторым уравнением, из четвертого находим линейное условие

$$f = -i G + \frac{2B}{M^2} g. \tag{7.4.13}$$

Исключим функцию f из второго уравнения в (7.4.12):

$$(\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) G = -i(\epsilon^2 - k^2) \frac{2B}{M^2} g. \tag{7.4.14}$$

Таким образом задача сведена к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \epsilon^2 - M^2 - k^2) F &= 0, \\
 f &= -i G + \frac{2B}{M^2} g, \\
 (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) g &= 2iB G, \\
 (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) G &= -2iB \frac{\epsilon^2 - k^2}{M^2} g.
 \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

Отмечаем, что структура полученной системы уравнений такова, что одно из линейно независимых решений строится следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f(r) &= 0, & g(r) &= 0, & H(r) &= 0, \\
 F(r) &\neq 0, & (\Delta - k^2 - M^2 + \epsilon^2) F &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

Это уравнение имеет известные решения и спектр значений энергии (см. ниже).

Запишем два последних уравнения в (7.4.15) в матричном виде (пусть $\gamma = (\epsilon^2 - k^2)/M^2$):

$$(\Delta + \epsilon^2 - M^2 - k^2) \begin{vmatrix} g(r) \\ G(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2iB \\ -2iB\gamma & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(r) \\ G(r) \end{vmatrix}. \tag{7.4.17}$$

Нужно найти преобразование, приводящее матрицу справа к диагональному виду:

$$(\Delta + \epsilon^2 - M^2 - k^2) \begin{vmatrix} g' \\ G' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g' \\ G' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} g' \\ G' \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} g \\ G \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}. \quad (7.4.18)$$

Задача сводится к решению уравнения

$$S \begin{vmatrix} 0 & 2iB \\ -2iB\gamma & 0 \end{vmatrix} S^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

В результате приходим к двум (однородным линейным) системам уравнений

$$\begin{cases} -\lambda_1 s_{11} - 2iB\gamma s_{12} = 0, \\ 2iB s_{11} - \lambda_1 s_{12} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\lambda_2 s_{21} - 2iB\gamma s_{22} = 0, \\ 2iB s_{21} - \lambda_2 s_{22} = 0. \end{cases}$$

Собственные значения λ_1, λ_2 определяются равенствами

$$\lambda_1 = \pm 2B\sqrt{\gamma}, \quad \lambda_2 = \pm 2B\sqrt{\gamma}. \quad (7.4.19)$$

Чтобы матрица S была невырожденной, следует использовать различающие знаком собственные значения λ_1, λ_2 .

$$\text{Вариант (A):} \quad \lambda'_1 = +2B\sqrt{\gamma}, \quad \lambda'_2 = -2B\sqrt{\gamma},$$

$$i s_{11} - \sqrt{\gamma} s_{12} = 0, \quad i s_{21} + \sqrt{\gamma} s_{22} = 0;$$

$$(7.4.20a)$$

выберем

$$s_{12} = 1, \quad s_{22} = 1, \quad s_{11} = -i\sqrt{\gamma}, \quad s_{21} = +i\sqrt{\gamma}, \quad S = \begin{vmatrix} -i\sqrt{\gamma} & 1 \\ +i\sqrt{\gamma} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(7.4.20b)$$

$$\text{Вариант (B):} \quad \lambda''_1 = -2B\sqrt{\gamma} = \lambda'_2, \quad \lambda''_2 = +2B\sqrt{\gamma} = \lambda'_1,$$

$$i s_{11} + \sqrt{\gamma} s_{12} = 0, \quad i s_{21} - \sqrt{\gamma} s_{22} = 0;$$

$$(7.4.21a)$$

выберем

$$s_{12} = 1, \quad s_{22} = 1, \quad s_{11} = +i\sqrt{\gamma}, \quad s_{21} = -i\sqrt{\gamma}, \quad S = \begin{vmatrix} +i\sqrt{\gamma} & 1 \\ -i\sqrt{\gamma} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(7.4.21b)$$

Уравнения (7.4.17) принимают в новом (штрихованном) базисе вид двух несвязанных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(A) \quad (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 - 2B\sqrt{\gamma}) g' = 0,$$

$$(\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 + 2B\sqrt{\gamma}) G' = 0; \quad (7.4.22a)$$

$$(B) \quad (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 + 2B\sqrt{\gamma}) g'' = 0, \\ (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 - 2B\sqrt{\gamma}) G'' = 0. \quad (7.4.22b)$$

Учитывая явный вид оператора Δ , приходим к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r^2} + \lambda^2 \right) \varphi(r) = 0, \\ \lambda^2 = \epsilon^2 - k^2 - M^2 \pm 2B\sqrt{\gamma}, \quad \sqrt{\gamma} = \frac{\sqrt{\epsilon^2 - k^2}}{M}. \quad (7.4.23)$$

Введем переменную $x = Br^2$, уравнение примет вид²:

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{m^2}{4x} + \frac{x}{4} + \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{4B} \right) \varphi = 0. \quad (7.4.24)$$

Ищем решение в виде $\varphi(x) = x^A e^{-Cx} f(x)$, функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A + 1 - 2Cx) \frac{df}{dx} + \\ + \left[\frac{A^2 - m^2/4}{x} + (C^2 - \frac{1}{4})x - 2AC - C - \frac{m}{2} + \frac{\lambda^2}{4B} \right] f = 0.$$

Выбираем $A = + |m|/2$, $C = +1/2$; уравнение упрощается:

$$x \frac{d^2 R}{dx^2} + (2A + 1 - x) \frac{dR}{dx} - \left(A + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{4B} \right) R = 0,$$

что является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$x F'' + (\gamma - x)F' - \alpha F = 0,$$

$$\alpha = \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{4B}, \quad \gamma = |m| + 1.$$

Условием обрыва вырожденного гипергеометрического ряда до полинома является равенство $\alpha = -n$; это приводит к правилу квантования параметра λ^2 :

$$\lambda^2 = 4B \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m| + m}{2} \right). \quad (7.4.25)$$

²Без ограничения общности будем считать, что параметр eB положительный. Это соответствует тому, что бесконечно большим значениям координаты r соответствуют бесконечно большие и положительные значения координаты x .

Учитывая (7.4.22a), (7.4.22b), имеем два представления для возможных спектров энергии:

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & (\Delta + (\epsilon^2 - k^2) - M^2 - 2B \frac{\sqrt{\epsilon^2 - k^2}}{M})g' = 0, \\
 & \sqrt{\epsilon^2 - k^2} = \frac{+B + \sqrt{B^2 + M^2(M^2 + \lambda^2)}}{M}, \\
 & (\Delta + (\epsilon^2 - k^2) - M^2 + 2B \frac{\sqrt{\epsilon^2 - k^2}}{M})G' = 0, \\
 & \sqrt{\epsilon^2 - k^2} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + M^2(M^2 + \lambda^2)}}{M}; \\
 (B) \quad & (\Delta + (\epsilon^2 - k^2) - M^2 + 2B \frac{\sqrt{\epsilon^2 - k^2}}{M})g'' = 0, \\
 & \sqrt{\epsilon^2 - k^2} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + M^2(M^2 + \lambda^2)}}{M}, \\
 & (\Delta + (\epsilon^2 - k^2) - M^2 - 2B \frac{\sqrt{\epsilon^2 - k^2}}{M})G'' = 0, \\
 & \sqrt{\epsilon^2 - k^2} = \frac{+B + \sqrt{B^2 + M^2(M^2 + \lambda^2)}}{M}.
 \end{aligned}$$

Замечаем, что здесь фактически есть только две возможности:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\epsilon^2 - k^2} &= \frac{+B + \sqrt{B^2 + M^2(M^2 + \lambda^2)}}{M}, & q'(r) \neq 0, G' = 0; \\
 \sqrt{\epsilon^2 - k^2} &= \frac{-B + \sqrt{B^2 + M^2(M^2 + \lambda^2)}}{M}, & q'(r) = 0, G' \neq 0.
 \end{aligned} \tag{7.4.26}$$

Спектр энергии, отвечающий случаю (7.4.16), имеет вид

$$\epsilon^2 = M^2 + k^2 + \lambda^2. \tag{7.4.27}$$

Таким образом, на основе использования матричного 10-мерного формализма Даффина – Кеммера в цилиндрических координатах и в тетраде построены точные решения уравнения для частицы со спином 1 во внешнем постоянном и однородном магнитном поле. Выделено три линейно независимых типа решений, в каждом случае найден спектр энергии частицы.

Глава 8

О КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕ СО СПИНОМ 1 В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

8.1 Введение

Ниже будут получены точные решения волнового уравнения для частицы со спином 1 в нерелятивистском пределе. В качестве рабочего выбрано представление уравнений для частицы со спином 1 в матричном формализме Даффина – Кеммера.

Исходное волновое уравнение Даффина – Кеммера в тетрадной форме имеет вид

$$\left[i \beta^\alpha(x) (\partial_\alpha + B_\alpha - i \frac{e}{\hbar} A_\alpha) - \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi(x) = 0,$$

$$\beta^\alpha(x) = \beta^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta} \quad (8.1.1)$$

(далее для краткости будем использовать обозначение $Mc/\hbar \implies M$). Однородному постоянному магнитному полю $\vec{B} = (0, 0, B)$ можно сопоставить вектор-потенциал

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}, \quad A_z = 0. \quad (8.1.2)$$

Выбираем диагональную цилиндрическую тетраду

$$e_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad e_{(1)}^\alpha = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_{(2)}^\alpha = (0, 0, \frac{1}{r}, 0), \quad e_{(3)}^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (8.1.3)$$

С учетом явного вида тетрады приходим к следующему представлению уравнения Даффина – Кеммера:

$$\left[i\beta^0 \partial_0 + i\beta^1 \partial_r + i\frac{\beta^2}{r} (\partial_\phi + \frac{ieB}{2\hbar} r^2 + J^{12}) + i\beta^3 \partial_z - M \right] \Psi(t, r, \phi, z) = 0. \quad (8.1.4)$$

Дальше для краткости будем использовать обозначение $(eB/2\hbar) \implies B$.

Для проведения разделения переменных в волновом уравнении нам потребуется явный вид основных матриц β^a ; при этом наиболее удобно будет использовать циклический базис, в котором генератор J^{12} диагонален.

8.2 Разделение переменных

Подстановку для волновой функции выбираем в виде (она отвечает диагонализации проекции импульса вдоль оси z и диагонализации третьей проекции полного момента частицы)

$$\Psi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} \Phi_0 \\ \vec{\Phi} \\ \vec{E} \\ \vec{H} \end{vmatrix},$$

$$\left[\epsilon\beta^0 + i\beta^1 \partial_r - \frac{\beta^2}{r} (m + Br^2 - S_3) - k\beta^3 - M \right] \begin{vmatrix} \Phi_0 \\ \vec{\Phi} \\ \vec{E} \\ \vec{H} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.2.1)$$

После необходимых вычислений приходим к системе из 10 радиальных уравнений:

$$\begin{aligned} -b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 - ik E_2 &= M\Phi_0, \\ -ib_{m-1} H_1 + ia_{m+1} H_3 + i\epsilon E_2 &= M\Phi_2, \\ ia_m H_2 + i\epsilon E_1 - k H_1 &= M\Phi_1, \\ -ib_m H_2 + i\epsilon E_3 + k H_3 &= M\Phi_3, \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

$$\begin{aligned} a_m \Phi_0 - i\epsilon \Phi_1 &= ME_1, & -ia_m \Phi_2 + k \Phi_1 &= MH_1, \\ b_m \Phi_0 - i\epsilon \Phi_3 &= ME_3, & ib_m \Phi_2 - k \Phi_3 &= MH_3, \\ -i\epsilon \Phi_2 - ik \Phi_0 &= ME_2, & ib_{m-1} \Phi_1 - ia_{m+1} \Phi_3 &= MH_2, \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

где для сокращения используются обозначения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = a_m, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = b_m.$$

8.3. Переход к нерелятивистским уравнениям

Нединамическими переменными являются функции Φ_0, H_1, H_2, H_3 :

$$\begin{aligned} -b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 - ik E_2 &= M\Phi_0, & -ia_m \Phi_2 + k \Phi_1 &= MH_1, \\ ib_{m-1} \Phi_1 - ia_{m+1} \Phi_3 &= MH_2, & ib_m \Phi_2 - k \Phi_3 &= MH_3. \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Исключая их, получаем шесть уравнений:

$$\begin{aligned}
& -ib_{m-1} (-ia_m \Phi_2 + k \Phi_1) + ia_{m+1} (ib_m \Phi_2 - k \Phi_3) + i\epsilon M E_2 = M^2 \Phi_2, \\
& ia_m (ib_{m-1} \Phi_1 - ia_{m+1} \Phi_3) + i\epsilon M E_1 - k (-ia_m \Phi_2 + k \Phi_1) = M^2 \Phi_1, \\
& -ib_m (ib_{m-1} \Phi_1 - ia_{m+1} \Phi_3) + i\epsilon M E_3 + k (ib_m \Phi_2 - k \Phi_3) = M^2 \Phi_3, \\
& -i\epsilon M \Phi_1 + a_m (-b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 - ik E_2) = M^2 E_1, \\
& -i\epsilon M \Phi_2 - ik (-b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 - ik E_2) = M^2 E_2, \\
& -i\epsilon M \Phi_3 + b_m (-b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 - ik E_2) = M^2 E_3.
\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

После перегруппировки они выглядят так:

$$\begin{aligned}
& +i\epsilon M E_1 - a_m b_{m-1} \Phi_1 - k^2 \Phi_1 + ika_m \Phi_2 + a_m a_{m+1} \Phi_3 = M^2 \Phi_1, \\
& +i\epsilon M E_2 - ik b_{m-1} \Phi_1 - b_{m-1} a_m \Phi_2 - a_{m+1} b_m \Phi_2 - ik a_{m+1} \Phi_3 = M^2 \Phi_2, \\
& +i\epsilon M E_3 + b_m b_{m-1} \Phi_1 + ik b_m \Phi_2 - b_m a_{m+1} \Phi_3 - k^2 \Phi_3 = M^2 \Phi_3, \\
& -i\epsilon M \Phi_1 - a_m b_{m-1} E_1 - ik a_m E_2 - a_m a_{m+1} E_3 = M^2 E_1, \\
& -i\epsilon M \Phi_2 + ik b_{m-1} E_1 - k^2 E_2 + ika_{m+1} E_3 = M^2 E_2, \\
& -i\epsilon M \Phi_3 - b_m b_{m-1} E_1 - ik b_m E_2 - b_m a_{m+1} E_3 = M^2 E_3.
\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

Вводим разбиение на большие и малые компоненты согласно

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= B_1 + M_1, & iE_1 &= B_1 - M_1, \\
\Phi_2 &= B_2 + M_2, & iE_2 &= B_2 - M_2, \\
\Phi_3 &= B_3 + M_3, & iE_3 &= B_3 - M_3,
\end{aligned} \tag{8.3.4}$$

получаем (одновременно выделяем энергию покоя формальной заменой $\epsilon \Rightarrow \epsilon + M$)

$$\begin{aligned}
& (\epsilon + M)M (B_1 - M_1) - a_m b_{m-1} (B_1 + M_1) - k^2 (B_1 + M_1) + \\
& + ika_m (B_2 + M_2) + a_m a_{m+1} (B_3 + M_3) = M^2 (B_1 + M_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\epsilon + M)M (B_2 - M_2) - ik b_{m-1} (B_1 + M_1) - b_{m-1} a_m (B_2 + M_2) - \\
& - ika_{m+1} (B_3 + M_3) - a_{m+1} b_m (B_2 + M_2) = M^2 (B_2 + M_2),
\end{aligned}$$

$$(\epsilon + M)M(B_3 - M_3) + b_m b_{m-1}(B_1 + M_1) + \\ + ikb_m(B_2 + M_2) - b_m a_{m+1}(B_3 + M_3) - k^2(B_3 + M_3) = M^2(B_3 + M_3),$$

$$-i(\epsilon + M)M(B_1 + M_1) + ia_m b_{m-1}(B_1 - M_1) - \\ - k a_m(B_2 - M_2) + ia_m a_{m+1}(B_3 - M_3) = -iM^2(B_1 - M_1),$$

$$-i(\epsilon + M)M(B_2 + M_2) + kb_{m-1}(B_1 - M_1) + ik^2(B_2 - M_2) + \\ + ka_{m+1}(B_3 - M_3) = -iM^2(B_2 - M_2),$$

$$-i(\epsilon + M)M(B_3 + M_3) + ib_m b_{m-1}(B_1 - M_1) - k b_m(B_2 - M_2) + \\ + ib_m a_{m+1}(B_3 - M_3) = -iM^2(B_3 - M_3).$$

После простых алгебраических преобразований и перегруппировки система принимает вид:

$$\epsilon M(B_1 - M_1) - a_m b_{m-1}(B_1 + M_1) - k^2(B_1 + M_1) + \\ + ik a_m(B_2 + M_2) + a_m a_{m+1}(B_3 + M_3) = 2M^2 M_1, \\ \epsilon M(B_1 + M_1) - a_m b_{m-1}(B_1 - M_1) - \\ - ik a_m(B_2 - M_2) - a_m a_{m+1}(B_3 - M_3) = -2M^2 M_1,$$

$$\epsilon M(B_2 - M_2) - ik b_{m-1}(B_1 + M_1) - b_{m-1} a_m(B_2 + M_2) - \\ - a_{m+1} b_m(B_2 + M_2) - ik a_{m+1}(B_3 + M_3) = 2M^2 M_2,$$

$$\epsilon M(B_2 + M_2) + ik b_{m-1}(B_1 - M_1) - k^2(B_2 - M_2) + \\ + ik a_{m+1}(B_3 - M_3) = -2M^2 M_2,$$

$$\epsilon M(B_3 - M_3) + b_m b_{m-1}(B_1 + M_1) + \\ + ik b_m(B_2 + M_2) - b_m a_{m+1}(B_3 + M_3) - k^2(B_3 + M_3) = 2M^2 M_3,$$

$$\epsilon M(B_3 + M_3) - b_m b_{m-1}(B_1 - M_1) - ik b_m(B_2 - M_2) - \\ - b_m a_{m+1}(B_3 - M_3) = -2M^2 M_3.$$

Чтобы получить три уравнения для трех больших в нерелятивистском приближении компонент, достаточно сложить уравнения в пределах каждой пары:

$$(2\epsilon M - 2a_m b_{m-1} - k^2) B_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} (2\epsilon M - b_{m-1}a_m - a_{m+1}b_m - k^2) B_2 &= 0, \\ (2\epsilon M - 2b_m a_{m+1} - k^2) B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

С учетом явного вида операторов

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1+Br^2}{r} \right) = a_{m+1}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dr} + \frac{m-1+Br^2}{r} \right) = b_{m-1}$$

уравнения (8.3.5) приводятся к виду:

$$\frac{d^2 B_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_1}{dr} - \left[\frac{(m-1)^2}{r^2} + r^2 B^2 + k^2 + 2Bm - 2\epsilon M \right] B_1 = 0, \quad (8.3.6)$$

$$\frac{d^2 B_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_2}{dr} - \left[\frac{m^2}{r^2} + r^2 B^2 + k^2 + 2Bm - 2\epsilon M \right] B_2 = 0, \quad (8.3.7)$$

$$\frac{d^2 B_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_3}{dr} - \left[\frac{(m+1)^2}{r^2} + r^2 B^2 + k^2 + 2Bm - 2\epsilon M \right] B_3 = 0. \quad (8.3.8)$$

Введем переменную $x = Br^2$, уравнения переписутся так:

$$x \frac{d^2 B_1}{dx^2} + \frac{dB_1}{dx} - \frac{1}{4} \left[\frac{(m-1)^2}{x} + x + \frac{k^2 + 2Bm - 2\epsilon M}{B} \right] B_1 = 0, \quad (8.3.9)$$

$$x \frac{d^2 B_2}{dx^2} + \frac{dB_2}{dx} - \frac{1}{4} \left[\frac{m^2}{x} + x + \frac{k^2 + 2Bm - 2\epsilon M}{B} \right] B_2 = 0, \quad (8.3.10)$$

$$x \frac{d^2 B_3}{dx^2} + \frac{dB_3}{dx} - \frac{1}{4} \left[\frac{(m+1)^2}{x} + x + \frac{k^2 + 2Bm - 2\epsilon M}{B} \right] B_3 = 0. \quad (8.3.11)$$

Рассмотрим (8.3.9). Ищем решение в виде $B_1(x) = x^A e^{-Cx} f(x)$, $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A + 1 - 2Cx) \frac{df}{dx} + \\ & + \left[\frac{A^2 - (m-1)^2/4}{x} + (C^2 - \frac{1}{4})x - 2AC - C - \frac{k^2}{4B} - \frac{m}{2} + \frac{\epsilon M}{2B} \right] f = 0. \end{aligned}$$

Выбираем $A = +\frac{1}{2} |m-1|$, $C = +1/2$; уравнение упрощается

$$x \frac{d^2 R}{dx^2} + (2A + 1 - x) \frac{dR}{dx} - \left(A + \frac{1}{2} + \frac{k^2}{4B} + \frac{m}{2} - \frac{2\epsilon M}{4B} \right) R = 0,$$

что является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$x F'' + (\gamma - x)F' - \alpha F = 0, \quad \gamma = |m - 1| + 1,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(|m - 1| + 1 + \frac{k^2}{2B} + m - \frac{\epsilon M}{B}).$$

Условием обрыва вырожденного гипергеометрического ряда до полинома является равенство $\alpha = -n$. Это дает

$$|m - 1| + 1 + \frac{k^2}{2B} + m - \frac{2\epsilon M}{2B} = -2n;$$

откуда следует правило квантования

$$2\epsilon M - k^2 = 2B (|m - 1| + m + 1 + 2n). \quad (8.3.12)$$

Аналогично рассмотрим уравнение (8.3.10). Ищем решение в виде $B_2(x) = x^A e^{-Cx} f(x)$, $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A + 1 - 2Cx) \frac{df}{dx} + \left[\frac{A^2 - m^2/4}{x} + (C^2 - \frac{1}{4})x - 2AC - C - \frac{k^2}{4B} - \frac{m}{2} + \frac{\epsilon M}{2B} \right] f = 0.$$

При $A = +\frac{1}{2}|m|$, $C = +1/2$ уравнение упрощается

$$x \frac{d^2 R}{dx^2} + (2A + 1 - x) \frac{dR}{dx} - \left(A + \frac{1}{2} + \frac{k^2}{4B} + \frac{m}{2} - \frac{\epsilon M}{2B} \right) R = 0$$

и является вырожденным гипергеометрическим уравнением с параметрами

$$\alpha = \frac{1}{2}(|m| + 1 + \frac{k^2}{2B} + m - \frac{\epsilon M}{B}), \quad \gamma = |m| + 1.$$

Условием обрыва вырожденного гипергеометрического ряда до полинома является равенство $\alpha = -n$; это приводит к правилу квантования:

$$2\epsilon M - k^2 = 2B (|m| + m + 1 + 2n). \quad (8.3.13)$$

Остается рассмотреть уравнение (8.3.11). Ищем решение в виде $B_3(x) = x^A e^{-Cx} f(x)$, $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A + 1 - 2Cx) \frac{df}{dx} + \left[\frac{A^2 - (m + 1)^2/4}{x} + (C^2 - \frac{1}{4})x - 2AC - C - \frac{k^2}{4B} - \frac{m}{2} + \frac{\epsilon M}{2B} \right] f = 0.$$

При $A = +\frac{1}{2} |m + 1|$, $C = +1/2$ уравнение упрощается

$$x \frac{d^2 R}{dx^2} + (2A + 1 - x) \frac{dR}{dx} - \left(A + \frac{1}{2} + \frac{k^2}{4B} + \frac{m}{2} - \frac{\epsilon M}{2B} \right) R = 0$$

и является вырожденным гипергеометрическим уравнением с параметрами

$$\alpha = \frac{1}{2} (|m + 1| + 1 + \frac{k^2}{2B} + m - \frac{\epsilon M}{B}), \quad \gamma = |m + 1| + 1.$$

Условием обрыва вырожденного гипергеометрического ряда до полинома является равенство $\alpha = -n$; это приводит к правилу квантования:

$$2\epsilon M - k^2 = 2B (|m + 1| + m + 1 + 2n). \quad (8.3.14)$$

Таким образом, на основе использования матричного 10-мерного формализма Даффина – Кеммера в цилиндрических координатах и тетраде построены точные решения уравнения для частицы со спином 1 во внешнем постоянном и однородном магнитном поле в нерелятивистском пределе. Выделено три линейно независимых типа решений, в каждом случае найден спектр поперечной части энергии частицы $E = 2\epsilon M - k^2$:

$$\begin{aligned} E &= 2B (m + |m - 1| + 1 + 2n), \\ E &= 2B (m + |m| + 1 + 2n), \\ E &= 2B (m + |m + 1| + 1 + 2n). \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Глава 9

ЗАРЯЖЕННАЯ СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА С ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

9.1 Введение

В работах Федорова – Плетюхова [56]–[59] было предложено обобщенное релятивистское волновое уравнение для скалярной частицы, имеющей, помимо электрического заряда, некоторую дополнительную характеристику. Такая скалярная частица требует для своего описания в рамках теории релятивистских уравнений первого порядка 15-компонентной волновой функции, состоящей из скаляра $C(x)$, двух 4-векторов $C_a(x)$, $\Phi_a(x)$ и антисимметричного тензора $\Phi_{ab}(x)$.

Причем параллельно развивалась 15-компонентная теория для частицы со спином 0 и аналогичная 15-компонентная теория частицы со спином 1. При этом в обоих случаях использовался один и тот же набор тензорных полей $C(x)$, $C_a(x)$, $\Phi_a(x)$, $\Phi_{ab}(x)$, а различие теорий формально сводилось к различию основных наборов 15-мерных матриц Γ^a , задающих явный вид обобщенных релятивистских волновых уравнений.

В ряде работ (см. детальное изложение в [28]) была развита техника работы с обобщенными 15-компонентными уравнениями, основанная на использовании тетрадного формализма. Формально эта техника применима при рассмотрении этих уравнений в любом искривленном пространстве-времени, что открывает возможности анализа проявлений дополнительной характеристики частиц во внешних гравитационных полях и неинерциальных системах отсчета. Эта тетрадная техника позволяет ввиду существования свободы в выборе тетрады при фиксированной метрике пространства-времени специальным образом выбирать тетраду, чтобы максимально учесть присущую конкретной задаче симметрию.

9.2 Основные обозначения

Исходное волновое уравнение имеет вид

$$\left[\Gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + B_\alpha - i \frac{e}{\hbar} A_\alpha) - i \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi(x) = 0, \quad (9.2.1)$$

где

$$\Gamma^\alpha(x) = \Gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta};$$

$e_{(a)}^\alpha(x)$ – тетрада, J^{ab} – генераторы 15-мерного представления группы Лоренца, отвечающего набору тензорных полей; дальше будем использовать обозначение $\mu = iMc/\hbar$.

Однородному постоянному магнитному полю $\vec{B} = (0, 0, B)$ можно сопоставить вектор-потенциал:

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}, \quad A_z = 0. \quad (9.2.2)$$

Выбираем диагональную сферическую тетраду

$$e_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad e_{(1)}^\alpha = (0, 1, 0, 0), \quad e_{(2)}^\alpha = (0, 0, \frac{1}{r}, 0), \quad e_{(3)}^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (9.2.3)$$

Ей отвечают следующего вида коэффициенты вращения Риччи:

$$\begin{aligned} \gamma_{ab0}(x) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \gamma_{ab1}(x) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \gamma_{ab2}(x) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & -1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \gamma_{ab3}(x) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Обобщенные матрицы $\Gamma^\alpha(x)$ имеют в выбранной тетраде вид:

$$\Gamma^\alpha(x) = (\Gamma^t(x), \Gamma^r(x), \Gamma^\phi(x), \Gamma^z(x)) = (\Gamma^0, \Gamma^1, \frac{1}{r} \Gamma^2, \Gamma^3). \quad (9.2.5)$$

Находим выражение для свертки

$$\Gamma^\alpha(x) B_\alpha(x) = \frac{1}{2} \Gamma^a J^{bc} \gamma_{bca}(x) = \frac{1}{r} \Gamma^2 J^{12}. \quad (9.2.6)$$

Учитывая (9.2.5) и (9.2.6), приходим к явному виду исходного волнового уравнения (9.2.1) в цилиндрической тетраде:

$$\left[\Gamma^0 \partial_0 + \Gamma^1 \partial_r + \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) + \Gamma^3 \partial_z - \mu \right] \Psi(t, r, \phi, z) = 0. \quad (9.2.7)$$

Поскольку присутствие внешнего электромагнитного поля учитывается известным приемом удлинения производной

$$\partial_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \partial_\alpha - \frac{ie}{\hbar} A_\alpha, \quad (9.2.8a)$$

то учет постоянного однородного магнитного поля осуществляется одной формальной заменой в третьем члене уравнения (9.2.7):

$$\frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + \frac{ieB}{2\hbar} r^2 + J^{12}). \quad (9.2.8b)$$

Дальше при проведении разделения переменных, чтобы не загромождать формул, мы не будем выписывать рядом с вкладом от члена ∂_ϕ в волновом уравнении вклад от магнитного поля: учтем последний в самом конце.

Для проведения разделения переменных в волновом уравнении нам потребуется явный вид основных матриц Γ^a ; при этом наиболее удобно будет использовать так называемый циклический базис, в котором генератор J^{12} диагонален (будем выписывать явный вид 15-мерных матриц, разбитых в соответствии со структурой волновой функции на блоки размерностей $1 - 1 - 3 - 1 - 3 - 3 - 3$):

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 1 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & -\sigma I & 0 \\ 1 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & \pm I & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\vec{e}_i & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & -\sigma \vec{e}_i & \vec{0} \\ \vec{e}_i^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & -\sigma \tau_i \\ 0 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{e}_i^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & -(\pm) \vec{e}_i^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & (\pm) \tau_i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.2.9a)$$

где $\vec{e}_i, \vec{e}_i^t, \tau_i$ обозначают:

$$\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{e}_2 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{e}_3 = (0, 1, 0),$$

$$\vec{e}_1^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2^t = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.2.9b)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = -i \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Входящая в уравнение (9.2.7) матрица J^{12} диагональна:

$$J^{12} = \text{diag} (0, 0, \tau_3, 0, \tau_3, \tau_3, \tau_3).$$

9.3 Разделение переменных

Будем искать решения уравнения (9.2.7) в виде:

$$\begin{aligned} \Psi &= \{ C, C_0, \vec{C}, \Phi_0, \vec{\Phi}, \vec{E}, \vec{H} \}, & C(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C(r), \\ C_0(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C_0(r), & \vec{C}(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \\ C_3(r) \end{vmatrix}, \\ \Phi_0(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \Phi_0(r), & \vec{\Phi}(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \\ \Phi_3(r) \end{vmatrix}, \\ \vec{E}(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} E_1(r) \\ E_2(r) \\ E_3(r) \end{vmatrix}, & \vec{H}(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

В качестве первого шага учтем в уравнении (9.2.7) блочную структуру всех входящих матриц и волновой функции; в результате получаем:

$$\begin{aligned} -i \frac{\epsilon}{c\hbar} C_0 - \vec{e}_1 \partial_r \vec{C} - \frac{1}{r} \vec{e}_2 (i m + \tau_3) \vec{C} - i k \vec{e}_3 C &= \mu C, \\ -i \frac{\epsilon}{c\hbar} C - \sigma \vec{e}_1 \partial_r \vec{E} - \frac{1}{r} \sigma \vec{e}_2 (i m + \tau_3) \vec{E} - i k \sigma \vec{e}_3 \vec{E} &= \mu C_0, \\ +i \frac{\epsilon}{c\hbar} \sigma \vec{E} + \vec{e}_1^t \partial_r C - \sigma \tau_1 \partial_r \vec{H} + \frac{i m}{r} \vec{e}_2^t C - \frac{\sigma}{r} \tau_2 (i m + \tau_3) \vec{H} + \\ + i k (\vec{e}_3^t C - \sigma \tau_3 \vec{H}) &= \mu \vec{C}, \quad -i \frac{\epsilon}{c\hbar} C = \mu \Phi_0, \\ \vec{e}_1^t \partial_r C + \frac{i m}{r} \vec{e}_2^t C + i k \vec{e}_3^t C &= \mu \vec{\Phi}, \\ \mp i \frac{\epsilon}{c\hbar} \vec{\Phi} \mp \vec{e}_1^t \partial_r \Phi_0 \mp \frac{i m}{r} \vec{e}_2^t \Phi_0 \mp i k \vec{e}_3^t \Phi_0 &= \mu \vec{E}, \end{aligned}$$

$$\pm \tau_1 \partial_r \vec{\Phi} \pm \frac{1}{r} \tau_2 (i m + \tau_3) \vec{\Phi} \pm i k \tau_3 \vec{\Phi} = \mu \vec{H}. \quad (9.3.2)$$

Теперь получаем последовательно 15 радиальных уравнений (используем обозначение $a = 1/\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned} & -i \frac{\epsilon}{c\hbar} C_0 - a (\partial_r C_3 - \partial_r C_1) - \\ & - \frac{a}{r} [(m-1) C_1 + (m+1) C_3] - i k C_2 = \mu C; \end{aligned} \quad (9.3.3a)$$

$$\begin{aligned} & -i \frac{\epsilon}{c\hbar} C - \sigma a (\partial_r E_3 - \partial_r E_1) - \\ & - \frac{\sigma a}{r} [(m-1) E_1 + (m+1) E_3] - i k \sigma E_2 = \mu C_0, \\ & + i \frac{\epsilon}{c\hbar} \sigma E_1 - a \partial_r C + i \sigma a \partial_r H_2 - \frac{a m}{r} C + \\ & + \sigma \frac{i a m}{r} H_2 - \sigma k H_1 = \mu C_1, \\ & + i \frac{\epsilon}{c\hbar} \sigma E_2 + i \sigma a (\partial_r H_1 + \partial_r H_3) - \\ & - \sigma \frac{i a}{r} [(m-1) H_1 - (m+1) H_3] + i k C = \mu C_2, \\ & + i \frac{\epsilon}{c\hbar} \sigma E_3 + a \partial_r C + i \sigma a \partial_r H_2 - \frac{a m}{r} C - \\ & - \sigma \frac{i a m}{r} H_2 + \sigma k H_3 = \mu C_3; \end{aligned} \quad (9.3.3b)$$

$$\begin{aligned} & -i \frac{\epsilon}{c\hbar} C = \mu \Phi_0, \quad -a \partial_r C - \frac{a m}{r} C = \mu \Phi_1, \\ & + i k C = \mu \Phi_2, \quad +a \partial_r C - \frac{a m}{r} C = \mu \Phi_3; \end{aligned} \quad (9.3.3c)$$

$$\begin{aligned} & \mp i \frac{\epsilon}{c\hbar} \Phi_1 \pm a \partial_r \Phi_0 \pm \frac{a m}{r} \Phi_0 = \mu E_1, \\ & \mp i \frac{\epsilon}{c\hbar} \Phi_2 \mp i k \Phi_0 = \mu E_2, \end{aligned}$$

$$\mp i \frac{\epsilon}{c\hbar} \Phi_3 \mp a \partial_r \Phi_0 \pm \frac{a m}{r} \Phi_0 = \mu E_3, \quad (9.3.3d)$$

$$\mp i a \partial_r \Phi_2 \mp \frac{i a m}{r} \Phi_2 \pm k \Phi_1 = \mu H_1,$$

$$\mp i a (\partial_r \Phi_1 + \partial_r \Phi_3) \pm \frac{i a}{r} [(m-1) \Phi_1 - (m+1) \Phi_3] = \mu H_2,$$

$$\mp i a \partial_r \Phi_2 \pm \frac{i a m}{r} \Phi_2 \mp k \Phi_3 = \mu H_3.$$

$$(9.3.3e)$$

Теперь мы должны из этих 15 уравнений, исключая все лишние, получить одно дифференциальное уравнение второго порядка для функции $C(r)$. Предварительно во всех уравнениях (9.3.3) нужно в соответствии с равенствами (9.2.8) сделать формальную замену, учитывающую присутствие однородного магнитного поля:

$$m \quad \Longrightarrow \quad m + \frac{eB}{2\hbar} r^2. \quad (9.3.4a)$$

Чтобы не загромождать формулы будем считать, что $c = 1$, $\hbar = 1$, а в окончательном ответе вернемся к нормальным размерным единицам:

$$\frac{\epsilon}{c\hbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon, \quad \frac{eB}{2\hbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{eB}{2}. \quad (9.3.4b)$$

Сначала из уравнений (9.3.3c) выразим $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\mu} (-i\epsilon) C, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{\mu} \left[-a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right], \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\mu} (ik) C, \\ \Phi_3 &= \frac{1}{\mu} \left[+a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right]. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Подставляем эти выражения в уравнения (9.3.3d), (9.3.3e):

$$\begin{aligned} \mu E_1 &= \pm \left[-i\epsilon \Phi_1 + a \partial_r \Phi_0 + \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_0 \right] = \\ &= \pm \left\{ (-i\epsilon) \frac{1}{\mu} \left[-a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] + \right. \\ &\quad \left. + a \partial_r \frac{(-i\epsilon)}{\mu} C + \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \frac{(-i\epsilon)}{\mu} C \right\} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{E_1 = 0}; \end{aligned}$$

$$\mu E_2 = \pm [-i\epsilon \Phi_2 - i\epsilon \Phi_0] =$$

$$= \pm \left[(-i\epsilon) \frac{ik}{\mu} C - ik \frac{-i\epsilon}{\mu} C \right] \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{E_2 = 0};$$

$$\mu E_3 = \pm \left[-i\epsilon \Phi_3 - a \partial_r \Phi_0 + \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_0 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \left\{ (-i\epsilon) \frac{1}{\mu} \left[+a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] - \right. \\
&- \left. a \partial_r \frac{(-i\epsilon)}{\mu} C + \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \frac{(-i\epsilon)}{\mu} C \right\} \equiv 0 \implies \underline{E_3 = 0};
\end{aligned} \tag{9.3.6a}$$

$$\begin{aligned}
\mu H_1 &= \pm \left[-i a \partial_r \Phi_2 - \frac{i a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_2 + k \Phi_1 \right] = \\
&= \pm \left\{ (-i a) \left[\partial_r \Phi_2 + \frac{1}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_2 \right] + k \Phi_1 \right\} = \\
&= \pm \left\{ (-i a) \left[\partial_r \frac{i k}{\mu} C + \frac{1}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \frac{i k}{\mu} C \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{k}{\mu} \left[-a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] \right\} \equiv 0 \implies \underline{H_1 = 0};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu H_3 &= \pm \left[-i a \partial_r \Phi_2 + \frac{i a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_2 - k \Phi_3 \right] = \\
&= \pm \left\{ (-i a) \left[\partial_r \Phi_2 - \frac{1}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_2 \right] - k \Phi_3 \right\} = \\
&= \pm \left\{ (-i a) \left[\partial_r \frac{i k}{\mu} C - \frac{1}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) \frac{i k}{\mu} C \right] - \right. \\
&- \left. \frac{k}{\mu} \left[+a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] \right\} \equiv 0 \implies \underline{H_3 = 0};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu H_2 &= \pm \left\{ (-i a) (\partial_r \Phi_1 + \partial_r \Phi_3) + \right. \\
&+ \left. \frac{i a}{r} \left[\left(m - 1 + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_1 - \left(m + 1 + \frac{eB}{2} r^2 \right) \Phi_3 \right] \right\} = \\
&= \pm (i a) \left\{ -\partial_r \frac{1}{\mu} \left[-a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] - \right. \\
&- \partial_r \frac{1}{\mu} \left[+a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \left(m - 1 + \frac{eB}{2} r^2 \right) \frac{1}{\mu} \left[-a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] - \\
&- \left. \frac{1}{r} \left(m + 1 + \frac{eB}{2} r^2 \right) \frac{1}{\mu} \left[+a \partial_r C - \frac{a}{r} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right) C \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда после необходимых вычислений получаем

$$H_2(r) = \pm \frac{i e B}{\mu^2} C(r) \equiv b C(r). \quad (9.3.6b)$$

Таким образом, установлены равенства

$$\begin{aligned} E_1(r) = 0, \quad E_2(r) = 0, \quad E_3(r) = 0, \\ H_1(r) = 0, \quad H_3(r) = 0, \quad H_2(r) = \pm \frac{i e B}{\mu^2} C(r). \end{aligned} \quad (9.3.7)$$

Учтем их в уравнениях (9.3.3b), т. е. выражаем C_0, C_1, C_2, C_3 через C :

$$\begin{aligned} \mu C_0 &= -i\epsilon C, & \mu C_2 &= +ik C, \\ \mu C_1 &= a \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{eB}{2} r\right) C + i\sigma \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{eB}{2} r\right) b C \right], \\ \mu C_3 &= a \left[+\left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{eB}{2} r\right) C + i\sigma \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{eB}{2} r\right) b C \right]. \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

Учтем (9.3.8) в уравнении (9.3.3a), переписанном в виде:

$$\begin{aligned} \mu^2 C &= (-i\epsilon) \mu C_0 - (ik) \mu C_2 + \\ &+ a \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} - \frac{eB}{2} r\right) \mu C_1 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} + \frac{eB}{2} r\right) \mu C_3 \right]. \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

Таким образом, для скалярной функции $C(r)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} \mu^2 C &= -\epsilon^2 C + k^2 C + a^2 \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} - \frac{eB}{2} r\right) \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{eB}{2} r\right) C + i\sigma \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{eB}{2} r\right) b C \right] - \right. \\ &\left. \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} + \frac{eB}{2} r\right) \left[+\left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{eB}{2} r\right) C + i\sigma \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{eB}{2} r\right) b C \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

Последовательно вычисляем:

$$\begin{aligned} &-a^2 \left(\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} - \frac{eB}{2} r\right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{eB}{2} r\right) C - \\ &-a^2 \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} + \frac{eB}{2} r\right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{eB}{2} r\right) C = \end{aligned}$$

$$= -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right)^2, \quad (9.3.11a)$$

$$\begin{aligned} i\sigma a^2 \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} - \frac{eB}{2} r \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{eB}{2} r \right) b C - \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} + \frac{eB}{2} r \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{eB}{2} r \right) b C \right] = \\ = i\sigma \frac{eB}{2} b C = -(\pm\sigma) \frac{e^2 B^2}{2\mu^2} C(r). \end{aligned} \quad (9.3.11b)$$

Следовательно, для функции $C(r)$ получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} C + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} C + \left[\epsilon^2 - k^2 + \left(\mu^2 \pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2\mu^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \left(m + \frac{eB}{2} r^2 \right)^2 \right] C = 0 \end{aligned} \quad (9.3.12a)$$

или в обычных единицах:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} C + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} C + \left[\frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{P^2}{\hbar^2} - \left(\frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \left(m + \frac{eB}{2\hbar c} r^2 \right)^2 \right] C = 0. \end{aligned} \quad (9.3.12b)$$

9.4 Решение радиального уравнения, спектр энергий

Найдем решения дифференциального уравнения (9.3.12), отвечающие дискретному спектру энергий:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} C + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} C + \left[\frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{P^2}{\hbar^2} - \left(\frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \left(m + \frac{eB}{2\hbar c} r^2 \right)^2 \right] C = 0. \end{aligned} \quad (9.4.1a)$$

Введем сокращенное обозначение

$$K = \frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{P^2}{\hbar^2} - \left(\frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^4} \right). \quad (9.4.1b)$$

Тогда уравнение (9.4.1a) записывается как

$$\frac{d^2}{dr^2} C + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} C + \left[K - \frac{1}{r^2} \left(m + \frac{eB}{2\hbar c} r^2 \right)^2 \right] C = 0. \quad (9.4.1c)$$

Перейдем к новой радиальной переменной $r = kr^2$, уравнение (9.4.1c) преобразуется в

$$4kr \frac{d^2}{dr^2} C + 4k \frac{d}{dr} C + \left[K - \frac{k}{r} \left(m + \frac{eB}{2\hbar c} \frac{r}{k} \right)^2 \right] C = 0. \quad (9.4.2a)$$

Пусть

$$k = \frac{eB}{2\hbar c}, \quad \Lambda = \frac{K}{4k},$$

тогда радиальное уравнение примет вид

$$r \frac{d^2}{dr^2} C + \frac{d}{dr} C + \left[\Lambda - \frac{1}{4r} (m + r)^2 \right] C = 0$$

или

$$r \frac{d^2}{dr^2} C + \frac{d}{dr} C + \left(\Lambda - \frac{m}{2} - \frac{m^2}{4r} - \frac{r}{4} \right) C = 0. \quad (9.4.2b)$$

Дальше следуем стандартной процедуре. Ищем решение уравнения (9.4.2b) около начала координат

$$r \frac{d^2}{dr^2} C + \frac{d}{dr} C - \frac{m^2}{4r} C = 0$$

в виде степенной функции:

$$C(r) = r^a, \quad \frac{dC}{dr} = a r^{a-1}, \quad \frac{d^2C}{dr^2} = a(a-1) r^{a-2}. \quad (9.4.3a)$$

Получаем

$$a(a-1) r^{a-1} + a r^{a-1} - \frac{m^2}{4} r^{a-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \pm \frac{|m|}{2}. \quad (9.4.3b)$$

Выбору $a = |m|/2$ отвечает регулярное (обращающееся в нуль) в начале координат решение, выбору $a = -|m|/2$ отвечает сингулярное (обращающееся в бесконечность) в начале координат решение. При очень больших r решение уравнения ищем в экспоненциальном виде:

$$C(r) = e^{br}, \quad r \frac{d^2}{dr^2} C + \frac{d}{dr} C - \frac{r}{4} C = 0. \quad (9.4.4a)$$

Получаем

$$b^2 r e^{br} + b e^{br} - \frac{r}{4} e^{br} = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \pm \frac{1}{2}. \quad (9.4.4b)$$

Отрицательное $b = -1/2$ отвечает регулярному на бесконечности решению. С учетом установленного для функции $C(r)$ используем подстановку

$$C(r) = r^a e^{br} F(r), \quad (9.4.5a)$$

где

$$a = \pm \frac{|m|}{2}, \quad b = \pm \frac{1}{2}. \quad (9.4.5b)$$

Подставляем выражения для первой и второй производных

$$\begin{aligned} C' &= a r^{a-1} e^{br} F + b r^a e^{br} F + r^a e^{br} F', \\ C'' &= a(a-1) r^{a-2} e^{br} F + ab r^{a-1} e^{br} F + a r^{a-1} e^{br} F' + \\ &+ ab r^{a-1} e^{br} F + b^2 r^a e^{br} F + b r^a e^{br} F' + \\ &+ a r^{a-1} e^{br} F' + b r^a e^{br} F' + r^a e^{br} F'' \end{aligned}$$

в уравнение (9.4.2c):

$$\begin{aligned} &a(a-1) r^{a-1} e^{br} F + ab r^a e^{br} F + a r^a e^{br} F' + \\ &+ ab r^a e^{br} F + b^2 r^{a+1} e^{br} F + b r^{a+1} e^{br} F' + \\ &+ a r^a e^{br} F' + b r^{a+1} e^{br} F' + r^{a+1} e^{br} F'' + \\ &+ a r^{a-1} e^{br} F + b r^a e^{br} F + r^a e^{br} F' + \\ &+ \left(\Lambda - \frac{m}{2} - \frac{m^2}{4r} - \frac{r}{4} \right) r^a e^{br} F = 0. \end{aligned}$$

После необходимой перегруппировки членов получаем

$$\begin{aligned} &r \frac{d^2}{dr^2} F + (2a + 2br + 1) \frac{d}{dr} F + \\ &\left[+a^2 \frac{1}{r} + 2ab + b^2 r + b + \Lambda - \frac{m}{2} - \frac{m^2}{4r} - \frac{r}{4} \right] F = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение значительно упрощается при учете (9.4.4a), (9.4.4b):

$$r \frac{d^2}{dr^2} F + (2a + 2br + 1) \frac{d}{dr} F + \left(2ab + b + \Lambda - \frac{m}{2} \right) F = 0. \quad (9.4.6a)$$

Регулярному в нуле и на бесконечности решению отвечает набор

$$a = + \frac{|m|}{2}, \quad b = -\frac{1}{2} \quad (9.4.6b)$$

и следующее дифференциальное уравнение для F :

$$r \frac{d^2}{dr^2} F + (|m| + 1 - r) \frac{d}{dr} F + \left(\Lambda - \frac{|m| + m + 1}{2} \right) F = 0. \quad (9.4.6c)$$

Решение для функции $F(r)$ будем искать в виде степенного ряда

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots \quad (9.4.7a)$$

Дифференцируем два раза этот ряд

$$\frac{dF}{dr} = c_1 + 2c_2r + 3c_3r^2 + 4c_4r^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}r^k,$$

$$\frac{d^2F}{dr^2} = 2c_2 + (3 \times 2)c_3r + (4 \times 3)c_4r^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}r^k.$$

Находим также

$$r \frac{d^2F}{dr^2} = r [2c_2 + (3 \times 2)c_3r + (4 \times 3)c_4r^2 + \dots] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}r^{k+1},$$

что с использованием новой дискретной переменной

$$k+1 = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

примет вид:

$$\begin{aligned} r \frac{d^2F}{dr^2} &= r [2c_2 + (3 \times 2)c_3r + (4 \times 3)c_4r^2 + \dots] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}r^n. \end{aligned} \quad (9.4.7b)$$

Также вычисляем

$$\begin{aligned} (|m|+1-r) \frac{d}{dr} F &= (|m|+1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}r^k = \\ &= (|m|+1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}r^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}r^{k+1}. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом снова переходим к новой дискретной переменной $k+1 = n, n = 1, 2, 3, \dots$, получаем

$$\begin{aligned} (|m|+1-r) \frac{d}{dr} F &= (|m|+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}r^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n r^n = \\ &= (|m|+1) c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(|m|+1)(n+1)c_{n+1} - nc_n] r^n. \end{aligned} \quad (9.4.7c)$$

Подставляем разложения (9.4.7) в уравнение (9.4.6с):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}r^n + (|m|+1) c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(|m|+1)(n+1)c_{n+1} - nc_n] r^n +$$

$$+ \left(\Lambda - \frac{|m| + m + 1}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = 0,$$

что после перегруппировки членов дает

$$0 = \left[\left(\Lambda - \frac{|m| + m + 1}{2} \right) c_0 + (|m| + 1) c_1 \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1)c_{n+1} + (n+1)(|m| + 1)c_{n+1} - nc_n + \right. \\ \left. + \left(\Lambda - \frac{|m| + m + 1}{2} \right) c_n \right] r^n$$

или

$$0 = \left[\left(\Lambda - \frac{|m| + m + 1}{2} \right) c_0 + (|m| + 1) c_1 \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+|m|+1)c_{n+1} + \left(\Lambda - \frac{|m| + m + 1}{2} - n \right) c_n \right] r^n.$$

Приравниваем все коэффициенты к нулю, получаем рекуррентные соотношения:

$$c_1 = - \frac{\Lambda - (|m| + m + 1)/2}{(|m| + 1)} c_0, \\ c_{n+1} = - \frac{\Lambda - n - (|m| + m + 1)/2}{(n+1)(n+|m|+1)} c_n. \quad (9.4.8a)$$

Условие обрыва ряда до полинома степени N имеет вид

$$C_{N+1} = 0; \quad \Rightarrow \quad \Lambda - N - (|m| + m + 1)/2 = 0. \quad (9.4.8b)$$

Отсюда следует

$$\Lambda = N + \frac{|m| + m + 1}{2}.$$

Вспоминая, что

$$\Lambda = \frac{K}{4k}, \quad k = \frac{eB}{2\hbar c}, \\ K = \frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{P^2}{\hbar^2} - \left(\frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^4} \right),$$

получаем формулу для спектра энергий:

$$\frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} = + \frac{P^2}{\hbar^2} + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} + \\ + \left[\pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^4} \right] + 4 \frac{eB}{2\hbar c} \left(N + \frac{|m| + m + 1}{2} \right).$$

Глава 10

ЗАРЯЖЕННАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 И ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

10.1 Основные обозначения

Исходное волновое уравнение имеет вид:

$$\left[\Gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + B_\alpha - i \frac{e}{\hbar} A_\alpha) - i \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi(x) = 0,$$

$$\Gamma^\alpha(x) = \Gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta}; \quad (10.1.1)$$

$e_{(a)}^\alpha(x)$ – тетрада, J^{ab} – генераторы 15-мерного представления группы Лоренца, отвечающего набору тензорных полей; далее будем использовать обозначение $M \Leftarrow Mc/\hbar$. Однородному постоянному магнитному полю $\vec{B} = (0, 0, B)$ можно сопоставить вектор-потенциал

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}, \quad A_z = 0.$$

Выбираем диагональную цилиндрическую тетраду и сопутствующие ей коэффициенты вращения Риччи:

$$\gamma_{ab0}(x) = 0, \quad \gamma_{ab1}(x) = 0, \quad \gamma_{ab2}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & -1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_{ab3}(x) = 0.$$

Обобщенные матрицы $\Gamma^\alpha(x)$ имеют в выбранной тетраде вид:

$$\Gamma^\alpha(x) = (\Gamma^t(x), \Gamma^r(x), \Gamma^\phi(x), \Gamma^z(x)) = (\Gamma^0, \Gamma^1, \frac{\Gamma^2}{r}, \Gamma^3).$$

Таким образом, приходим к явному виду исходного волнового уравнения в цилиндрической тетраде:

$$\left[\Gamma^0 \partial_0 + \Gamma^1 \partial_r + \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) + \Gamma^3 \partial_z - M \right] \Psi(t, r, \phi, z) = 0. \quad (10.1.2)$$

Поскольку присутствие внешнего электромагнитного поля учитывается известным приемом удлинения производной $\partial_\alpha \Rightarrow \partial_\alpha - (ie/c\hbar) A_\alpha$,

то учет постоянного однородного магнитного поля осуществляется одной формальной заменой в третьем члене уравнения (10.1.2):

$$\frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) \implies \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + \frac{ieB}{2\hbar} r^2 + J^{12}).$$

Дальше, чтобы не загромождать формулы, не будем выписывать рядом с вкладом от члена ∂_ϕ в волновом уравнении вклад от магнитного поля – учтем его в самом конце.

Для разделения переменных в волновом уравнении нам потребуется явный вид основных матриц Γ^a ; при этом наиболее удобным будет использовать циклический базис, в котором генератор J^{12} диагонален (будем выписывать явный вид 15-мерных матриц, разбитых в соответствии со структурой волновой функции на блоки размерностей 1 – 1 – 3 – 1 – 3 – 3 – 3):

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 1 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & -\sigma I & 0 \\ 1 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & \pm I & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\vec{e}_i & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & -\sigma \vec{e}_i & \vec{0} \\ \vec{e}_i^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & -\sigma \tau_i \\ 0 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{e}_i^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & -(\pm)\vec{e}_i^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & (\pm)\tau_i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{e}_i, \vec{e}_i^t, \tau_i$ обозначают

$$\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{e}_2 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{e}_3 = (0, 1, 0),$$

$$\vec{e}_1^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2^t = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = -i \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрица J^{12} диагональна:

$$J^{12} = \text{diag} (0, 0, \tau_3, 0, \tau_3, \tau_3, \tau_3).$$

10.2 Разделение переменных

Будем искать решения в виде цилиндрических волн:

$$\Psi = \{ C, C_0, \vec{C}, \Phi_0, \vec{\Phi}, \vec{E}, \vec{H} \}, \quad C(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C(r),$$

$$C_0(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C_0(r), \quad \vec{C}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \\ C_3(r) \end{vmatrix},$$

$$\Phi_0(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \Phi_0(r), \quad \vec{\Phi}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \\ \Phi_3(r) \end{vmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} E_1(r) \\ E_2(r) \\ E_3(r) \end{vmatrix}, \quad \vec{H}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \end{vmatrix}.$$

(10.2.1)

Учтем в уравнении (10.1.2) блочную структуру всех входящих матриц и волновой функции, в результате получаем:

$$-i \frac{\epsilon}{\hbar c} C_0 - \vec{e}_1 \frac{d}{dr} \vec{C} - \frac{1}{r} \vec{e}_2 (im + \tau_3) \vec{C} - ik \vec{e}_3 \vec{C} = M C,$$

(10.2.2)

$$- \vec{e}_1 \frac{d}{dr} \vec{E} - \frac{1}{r} \vec{e}_2 (im + \tau_3) \vec{E} - ik \vec{e}_3 \vec{E} = M C_0,$$

$$+i \frac{\epsilon}{\hbar c} - \tau_1 \frac{d}{dr} \vec{H} - \frac{1}{r} \tau_2 (im + \tau_3) \vec{H} - ik \tau_3 \vec{H} = M \vec{C},$$

(10.2.3)

$$-i \frac{\epsilon}{\hbar c} \sigma C - \vec{e}_1 \frac{d}{dr} \vec{E} - \frac{1}{r} \vec{e}_2 (im + \tau_3) \vec{E} - ik \vec{e}_3 \vec{E} = M \Phi_0,$$

$$\begin{aligned}
& +i\frac{\epsilon}{\hbar c} \vec{E} + \sigma \vec{e}_1^t \frac{d}{dr} C - \tau_1 \frac{d}{dr} \vec{H} + \\
& + \frac{1}{r} [im \sigma \vec{e}_2^t C - \tau_2 (im + \tau_3) \vec{H}] + ik (\sigma \vec{e}_3^t C - \tau_3 \vec{H}) = M \vec{\Phi},
\end{aligned} \tag{10.2.4}$$

$$\begin{aligned}
& -i\frac{\epsilon}{\hbar c} \vec{\Phi} - \vec{e}_1^t \frac{d}{dr} \Phi_0 - \frac{1}{r} im \vec{e}_2^t \Phi_0 - ik \vec{e}_3^t \Phi_0 = M \vec{E}, \\
& \tau_1 \frac{d}{dr} \vec{\Phi} + \frac{1}{r} \tau_2 (im + \tau_3) \vec{\Phi} + ik \tau_3 \vec{\Phi} = M \vec{H}.
\end{aligned} \tag{10.2.5}$$

С использованием следующих обозначений (учитываем присутствие внешнего магнитного поля)

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{\hbar c} & \Longrightarrow \epsilon, & m & \Longrightarrow m + \frac{eB}{2\hbar} Br^2 \Longrightarrow m + Br^2, \\
\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) & = \hat{a}_m, & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) & = \hat{b}_m
\end{aligned}$$

полученную систему уравнений записываем в виде:

$$-i\epsilon C_0 - \hat{b}_{m-1} C_1 - \hat{a}_{m+1} C_3 - ik C_2 = M C, \tag{10.2.6}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{b}_{m-1} E_1 - \hat{a}_{m+1} E_3 - ik E_2 = M C_0, \\
& i\epsilon E_1 + i\hat{a}_m H_2 - ik H_1 = M C_1, \\
& i\epsilon E_2 - i\hat{b}_{m-1} H_1 + i\hat{a}_{m+1} H_3 = M C_2, \\
& i\epsilon E_3 - i\hat{b}_m H_2 + k H_3 = M C_3,
\end{aligned} \tag{10.2.7}$$

$$\begin{aligned}
& -i\epsilon \sigma C - \hat{b}_{m-1} E_1 - \hat{a}_{m+1} E_3 - ik E_2 = M \Phi_0, \\
& i\epsilon E_1 - \sigma \hat{a}_m C + i\hat{a}_m H_2 - k H_1 = M \Phi_1, \\
& i\epsilon E_2 - i\hat{b}_{m-1} H_1 + i\hat{a}_{m+1} H_3 + i k \sigma C = M \Phi_2, \\
& i\epsilon E_3 - \sigma \hat{b}_m C - i\hat{b}_m H_2 + k H_3 = M \Phi_3,
\end{aligned} \tag{10.2.8}$$

$$\begin{aligned}
& -i\epsilon \Phi_1 + \hat{a}_m \Phi_0 = M E_1, & -i\epsilon \Phi_2 - ik \Phi_0 = M E_2, \\
& -i\epsilon \Phi_3 + \hat{b}_m \Phi_0 = M E_3, & -i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1 = M H_1, \\
& i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3 = M H_2, & i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3 = M H_3.
\end{aligned} \tag{10.2.9}$$

10.3 Решение радиальных уравнений

С учетом (10.2.6) уравнения (10.2.8) принимают вид:

$$\begin{aligned} -i\epsilon \sigma C + M C_0 &= M \Phi_0, & -\sigma \hat{a}_m C + M C_1 &= M \Phi_1, \\ ik\sigma C + M C_2 &= M \Phi_2, & -\sigma \hat{b}_m C + M C_3 &= M \Phi_3; \end{aligned}$$

откуда находим следующие представления для C_a :

$$\begin{aligned} C_0 &= \Phi_0 + i \frac{\epsilon \sigma}{M} C, & C_1 &= \Phi_1 + \frac{\sigma}{M} \hat{a}_m C, \\ C_2 &= \Phi_2 - i \frac{k \sigma}{M} C, & C_3 &= \Phi_3 + \frac{\sigma}{M} \hat{b}_m C. \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

Подставляем эти формулы для C_a в уравнение (10.2.6):

$$\begin{aligned} -i\epsilon(\Phi_0 + i \frac{\epsilon \sigma}{M} C) - \hat{b}_{m-1}(\Phi_1 + \frac{\sigma}{M} \hat{a}_m C) - \\ - \hat{a}_{m+1}(\Phi_3 + \frac{\sigma}{M} \hat{b}_m C) - ik(\Phi_2 - i \frac{k \sigma}{M} C) = M C, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} M(\hat{b}_{m-1} \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3) = \\ = -iM(\epsilon\Phi_0 + k\Phi_2) + \sigma(-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2)C - M^2C. \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Это уравнение потребуется ниже. Обращаемся к уравнениям (10.2.8), (10.2.9). Замечаем, что в них входят основные 4-вектор и 4-тензор и вспомогательная функция C :

$$\begin{aligned} -i\epsilon \sigma C - \hat{b}_{m-1} E_1 - \hat{a}_{m+1} E_3 - ik E_2 &= M \Phi_0, \\ i\epsilon E_1 - \sigma \hat{a}_m C + i \hat{a}_m H_2 - k H_1 &= M \Phi_1, \\ i\epsilon E_2 - i\hat{b}_{m-1} H_1 + \hat{a}_{m+1} H_3 + i k \sigma C &= M \Phi_2, \\ i\epsilon E_3 - \sigma \hat{b}_m C - i\hat{b}_m H_2 + k H_3 &= M \Phi_3; \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

$$\begin{aligned} -i\epsilon \Phi_1 + \hat{a}_m \Phi_0 &= M E_1, & -i\epsilon \Phi_2 - ik \Phi_0 &= M E_2, \\ -i\epsilon \Phi_3 + \hat{b}_m \Phi_0 &= M E_3, & -i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1 &= M H_1, \\ i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3 &= M H_2, & i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3 &= M H_3. \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

В уравнениях (10.3.3) будем исключать тензорные компоненты, пользуясь уравнениями (10.3.4). Так из уравнения в (10.3.3), содержащего Φ_0 , получаем

$$-i\epsilon \sigma M C + (-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m - k^2 - M^2)\Phi_0 +$$

$$+ i\epsilon(\hat{b}_{m-1} \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3 + ik \Phi_2) = 0. \quad (10.3.5)$$

Аналогично из уравнения в (10.3.3), содержащего Φ_2 , находим

$$ik\sigma M C + (\epsilon^2 - \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m - M^2) \Phi_2 - \\ - ik(i\epsilon\Phi_0 + \hat{b}_{m-1} \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3) = 0. \quad (10.3.6)$$

Умножаем уравнение (10.3.5) на $+ik$, а уравнение (10.3.6) – на $i\epsilon$, и результаты складываем:

$$k\epsilon\sigma M C + (-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m - k^2 - M^2) (ik\Phi_0) - \\ - k\epsilon(\hat{b}_{m-1} \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3 + ik \Phi_2) - \\ - k\epsilon\sigma M C + (\epsilon^2 - \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m - M^2)(i\epsilon \Phi_2) + \\ + k\epsilon(i\epsilon \Phi_0 + \hat{b}_{m-1} \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3) = 0,$$

что после упрощения дает

$$(-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m - k^2 - M^2 + \epsilon^2) (k \Phi_0 + \epsilon \Phi_2) = 0. \quad (10.3.7)$$

Если учесть явный вид операторов \hat{a} , \hat{b} , то последнее уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r} + \epsilon^2 - M^2 - k^2 \right) (k\Phi_0 + \epsilon\Phi_2) = 0. \quad (10.3.8)$$

Дальше будем использовать обозначение

$$\Delta = -\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r}.$$

Аналогично, комбинируя уравнения (10.3.5), (10.3.6) с другими коэффициентами, находим

$$\epsilon^2\sigma M C + (-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m - k^2 - M^2) (i\epsilon \Phi_0) - \\ - \epsilon^2(\hat{b}_{m-1} \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3 + ik \Phi_2) - \\ - k^2\sigma M C + (\epsilon^2 - \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m - M^2)(ik \Phi_2) + \\ + k^2(i\epsilon \Phi_0 + \hat{b}_{m-1} \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3) = 0$$

или

$$(-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m - M^2) (\epsilon \Phi_0 + k\Phi_2) = \\ = -i(\epsilon^2 - k^2) (\hat{b}_{m-1}\Phi_1 + \hat{a}_{m+1}\Phi_3) + i\sigma M (\epsilon^2 - k^2) C. \quad (10.3.9)$$

Таким образом, получены два уравнения второго порядка:

$$(-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m - k^2 - M^2 + \epsilon^2) (k \Phi_0 + \epsilon \Phi_2) = 0, \quad (10.3.10)$$

$$\begin{aligned} & (-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m - M^2) (\epsilon \Phi_0 + k\Phi_2) = \\ & = -i(\epsilon^2 - k^2) (\hat{b}_{m-1}\Phi_1 + \hat{a}_{m+1}\Phi_3) + i\sigma M (\epsilon^2 - k^2) C. \end{aligned} \quad (10.3.11)$$

Обратимся теперь к уравнениям из (10.3.3), содержащим функции $M\Phi_1$ и $M\Phi_3$:

$$\begin{aligned} i\epsilon (-i\epsilon \Phi_1 + \hat{a}_m \Phi_0) - M\sigma \hat{a}_m C + i\hat{a}_m (i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3) - \\ - k (-i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1) = M^2 \Phi_1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (-\hat{a}_m\hat{b}_{m-1} + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_1 + \\ & + \hat{a}_m\hat{a}_{m+1} \Phi_3 + i\hat{a}_m (\epsilon \Phi_0 + k\Phi_2) - M\sigma \hat{a}_m C = 0 \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

и

$$\begin{aligned} i\epsilon (-i\epsilon \Phi_3 + \hat{b}_m \Phi_0) - M\sigma \hat{b}_m C - i\hat{b}_m (i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3) + \\ + k (i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3) = M^2 \Phi_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (-\hat{b}_m\hat{a}_{m+1} + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \Phi_3 + \\ & + \hat{b}_m\hat{b}_{m-1} \Phi_1 + i\hat{b}_m (\epsilon\Phi_0 + k\Phi_2) - M\sigma \hat{b}_m C = 0. \end{aligned} \quad (10.3.13)$$

В двух последних уравнениях (10.3.12), (10.3.13) первое умножим слева на \hat{b}_{m-1} и второе умножим слева на \hat{a}_{m+1} ; в результате получим

$$\begin{aligned} & (-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \hat{b}_{m-1}\Phi_1 + \\ & + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m\hat{a}_{m+1} \Phi_3 + i\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m (\epsilon \Phi_0 + k\Phi_2) - M\sigma \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m C = 0; \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

$$\begin{aligned} & (-\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \hat{a}_{m+1}\Phi_3 + \\ & + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m\hat{b}_{m-1} \Phi_1 + i\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m (\epsilon\Phi_0 + k\Phi_2) - M\sigma \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m C = 0. \end{aligned} \quad (10.3.15)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} F(r) = k \Phi_0 + \epsilon \Phi_2, \quad G(r) = \epsilon \Phi_0 + k \Phi_2, \\ \hat{b}_{m-1}\Phi_1 = Z_1, \quad \hat{a}_{m+1}\Phi_3 = Z_3. \end{aligned} \quad (10.3.16)$$

Система (10.3.14), (10.3.15) переписывается так:

$$\begin{aligned} & (-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) Z_1 + \\ & + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m Z_3 + i\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m G - M\sigma \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m C = 0, \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

$$\begin{aligned} & (-\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) Z_3 + \\ & + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m Z_1 + i\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m G - M\sigma \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m C = 0. \end{aligned} \quad (10.3.18)$$

Введем новые функции $f(r)$, $g(r)$:

$$Z_1 = \frac{f+g}{2}, \quad Z_3 = \frac{f-g}{2}, \quad Z_1 + Z_3 = f, \quad Z_1 - Z_3 = g. \quad (10.3.19)$$

Система (10.3.17), (10.3.18) примет вид:

$$\begin{aligned} & (-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \frac{f+g}{2} + \\ & + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m \frac{f-g}{2} + i\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m G - M\sigma \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m C = 0, \end{aligned} \quad (10.3.20)$$

$$\begin{aligned} & (-\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2) \frac{f-g}{2} + \\ & + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m \frac{f+g}{2} + i\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m G - M\sigma \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m C = 0. \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

Вычтем друг из друга и сложим два последние уравнения, соответственно получаем:

$$\begin{aligned} & [-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2] g + \\ & + (-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) (-iG + M\sigma C) = 0, \end{aligned} \quad (10.3.22)$$

$$\begin{aligned} & (-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g + (\epsilon^2 - k^2 - M^2)f + \\ & + (-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) (-iG + M\sigma C) = 0. \end{aligned} \quad (10.3.23)$$

Используя равенства

$$-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m = \Delta, \quad -\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m + \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m = 2B,$$

уравнения (10.3.22), (10.3.23) переписываем таким образом:

$$[\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2] g + 2B (-iG + M\sigma C) = 0, \quad (10.3.24)$$

$$2B g + (\epsilon^2 - k^2 - M^2)f + \Delta (-iG + M\sigma C) = 0. \quad (10.3.25)$$

В свою очередь, уравнения (10.3.10), (10.3.11) принимают в этих обозначениях вид

$$(\Delta - k^2 - M^2 + \epsilon^2) F = 0, \quad (10.3.26)$$

$$(\Delta - M^2) G = -i(\epsilon^2 - k^2) f + i\sigma M (\epsilon^2 - k^2) C. \quad (10.3.27)$$

Соберем полученные уравнения вместе:

$$(\Delta - k^2 - M^2 + \epsilon^2) F = 0, \quad (10.3.28a)$$

$$(\Delta - M^2) G = -i(\epsilon^2 - k^2) f + i\sigma M (\epsilon^2 - k^2) C, \quad (10.3.28b)$$

$$(\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) g + 2B (-iG + M\sigma C) = 0, \quad (10.3.28c)$$

$$2B g + (\epsilon^2 - k^2 - M^2) f + \Delta (-iG + M\sigma C) = 0. \quad (10.3.28d)$$

Существует простая возможность исключить из этой системы функцию $C(r)$. Для этого, с учетом двух уравнений из (10.3.3), содержащих члены $M \Phi_1$, $M \Phi_3$, найдем выражение для комбинации

$$\begin{aligned} & \hat{b}_{m-1} M \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3 = \\ & = i\epsilon \hat{b}_{m-1} E_1 - \sigma \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m C + i \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m H_2 - k \hat{b}_{m-1} H_1 + \\ & + i\epsilon \hat{a}_{m+1} E_3 - \sigma \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m C - i \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m H_2 + k \hat{a}_{m+1} H_3 = \\ & = i\epsilon (\hat{b}_{m-1} E_1 + \hat{a}_{m+1} E_3) - \sigma (\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m + \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m) C + \\ & + i (\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m) H_2 - k (\hat{b}_{m-1} H_1 - \hat{a}_{m+1} H_3), \end{aligned}$$

и дальше, используя первое и третье уравнения

$$(\hat{b}_{m-1} E_1 + \hat{a}_{m+1} E_3) = -i\epsilon \sigma C - ik E_2 - M \Phi_0,$$

$$(\hat{b}_{m-1} H_1 - \hat{a}_{m+1} H_3) = \epsilon E_2 + k\sigma C + iM \Phi_2,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \hat{b}_{m-1} M \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3 = \\ & = i\epsilon (-i\epsilon \sigma C - ik E_2 - M \Phi_0) - \sigma (\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m + \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m) C + \\ & + i (\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m) H_2 - k (\epsilon E_2 + k\sigma C + iM \Phi_2). \quad (10.3.29) \end{aligned}$$

Отсюда после очевидного преобразования приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \hat{b}_{m-1} M \Phi_1 + \hat{a}_{m+1} \Phi_3 = -iM (\epsilon \Phi_0 + k \Phi_2) + \\ & + \sigma (-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2) C - 2iB H_2. \quad (10.3.30) \end{aligned}$$

Из сопоставления уравнений (10.3.30) и (10.3.2) приходим к линейному соотношению

$$2iB H_2(r) = M^2 C(r). \quad (10.3.31)$$

Поскольку

$$i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3 = M H_2 \quad \Longrightarrow \quad ig = M H_2,$$

то функция $C(r)$ может быть выражена через функцию $g(r)$:

$$C(r) = -\frac{2B}{M^3} g(r). \quad (10.3.32)$$

Соответственно система уравнений (10.3.28) после исключения переменной $C(r)$ примет вид:

$$\begin{aligned} (\Delta - k^2 - M^2 + \epsilon^2) F &= 0, \\ (\Delta - M^2) G &= -i(\epsilon^2 - k^2) f - i\sigma(\epsilon^2 - k^2) \frac{2B}{M^2} g, \\ \left[\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 - \sigma \left(\frac{2B}{M} \right)^2 \right] g - 2iB G &= 0, \\ 2B g + (\epsilon^2 - k^2 - M^2) f + \Delta \left(-iG - \sigma \frac{2B}{M^2} g \right) &= 0. \end{aligned} \quad (10.3.33)$$

Отмечаем, что структура системы (10.3.33) такова, что одно из линейно независимых решений строится следующим образом:

$$\begin{aligned} f(r) = 0, \quad g(r) \neq 0, \quad H(r) = 0, \quad F(r) \neq 0, \\ (\Delta - k^2 - M^2 + \epsilon^2) F = 0. \end{aligned} \quad (10.3.34)$$

Это уравнение имеет известные решения и спектр значений энергии (см. ниже).

Таким образом, нужно найти решения оставшейся системы из трех уравнений в (10.3.33). С помощью уравнений

$$\begin{aligned} \Delta G &= M^2 G - i(\epsilon^2 - k^2) f - i\sigma(\epsilon^2 - k^2) \frac{2B}{M^2} g, \\ \Delta g &= -\left[\epsilon^2 - k^2 - M^2 - \sigma \left(\frac{2B}{M} \right)^2 \right] g - 2iB G \end{aligned}$$

можно одно из трех уравнений (последнее) привести к виду линейного соотношения:

$$\begin{aligned} 2B g + (\epsilon^2 - k^2 - M^2) f - iM^2 G - (\epsilon^2 - k^2) f - \sigma(\epsilon^2 - k^2) \frac{2B}{M^2} g + \\ + \sigma \frac{2B}{M^2} \left[\epsilon^2 - k^2 - M^2 - \sigma \frac{4B^2}{M^2} \right] g + i\sigma \frac{4B^2}{M^2} G = 0 \quad \Longrightarrow \\ M^2 f = i \left(-M^2 + \sigma \frac{4B^2}{M^2} \right) G + 2B \left(1 - \sigma - \frac{\sigma^2 4B^2}{M^2 M^2} \right) g. \end{aligned} \quad (10.3.35)$$

Теперь возвратимся к оставшимся трем уравнениям в (10.3.33) и исключим функцию f . Введем обозначения:

$$\gamma = \frac{\epsilon^2 - k^2}{M^2}, \quad \beta = \sigma \frac{4B^2}{M^2}, \quad \alpha = \gamma \rho, \quad \rho = 1 - \frac{4B^2\sigma^2}{M^4}.$$

Тогда приходим к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) g &= \beta g(r) + 2iB G(r), \\ (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2) G &= -2iB\alpha g(r) + \beta\gamma G(r). \end{aligned}$$

Запишем их в матричном виде

$$(\Delta + \epsilon^2 - M^2 - k^2) \begin{vmatrix} g(r) \\ G(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & 2iB \\ -2iB\alpha & \beta\gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(r) \\ G(r) \end{vmatrix}. \quad (10.3.36)$$

Нужно найти преобразование, приводящее матрицу справа к диагональному виду:

$$\begin{aligned} (\Delta + \epsilon^2 - M^2 - k^2) \begin{vmatrix} g' \\ G' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g' \\ G' \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} g' \\ G' \end{vmatrix} &= S \begin{vmatrix} g \\ G \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (10.3.37)$$

Задача сводится к решению уравнения

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta & 2iB \\ -2iB\alpha & \beta\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}.$$

В результате приходим к линейной системе относительно $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$:

$$\begin{cases} (\beta - \lambda_1) s_{11} - 2iB\alpha s_{12} = 0, \\ 2iB s_{11} + (\beta\gamma - \lambda_1) s_{12} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (\beta - \lambda_2) s_{21} - 2iB\alpha s_{22} = 0, \\ 2iB s_{21} + (\beta\gamma - \lambda_2) s_{22} = 0. \end{cases}$$

Условием существования нетривиальных решений является равенство нулю двух определителей:

$$\det \begin{vmatrix} (\beta - \lambda_1) & -2iB\alpha \\ 2iB & (\beta\gamma - \lambda_1) \end{vmatrix} = \lambda_1^2 - \beta(1 + \gamma)\lambda_1 + \beta^2\gamma - 4B^2\alpha = 0,$$

$$\det \begin{vmatrix} (\beta - \lambda_2) & -2iB\alpha \\ 2iB & (\beta\gamma - \lambda_2) \end{vmatrix} = \lambda_2^2 - \beta(1 + \gamma)\lambda_2 + \beta^2\gamma - 4B^2\alpha = 0.$$

Собственные значения λ_1, λ_2 определяются равенствами

$$\lambda_1 = \frac{\beta(1 + \gamma) \pm \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2\rho\gamma}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta(1 + \gamma) \mp \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2\rho\gamma}}{2}. \quad (10.3.38)$$

Чтобы матрица S была невырожденной, следует использовать различающиеся знаком собственные значения:

$$(A) \quad \lambda'_1 = \frac{\beta(1 + \gamma) + \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2\rho\gamma}}{2},$$

$$\lambda'_2 = \frac{\beta(1 + \gamma) - \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2\rho\gamma}}{2}; \quad (10.3.39)$$

выберем

$$s_{12} = 1, \quad s_{22} = 1, \quad s_{11} = \frac{\lambda'_1 - \beta\gamma}{2iB}, \quad s_{21} = \frac{\lambda'_2 - \beta\gamma}{2iB},$$

$$g' = \frac{\lambda'_1 - \beta\gamma}{2iB}g + G, \quad G' = \frac{\lambda'_2 - \beta\gamma}{2iB}g + G. \quad (10.3.40)$$

$$(B) \quad \lambda''_1 = \frac{\beta(1 + \gamma) - \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2\rho\gamma}}{2} = \lambda'_2,$$

$$\lambda''_2 = \frac{\beta(1 + \gamma) + \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2\rho\gamma}}{2} = \lambda'_1;$$

(10.3.41)

выберем

$$s_{12} = 1, \quad s_{22} = 1, \quad s_{11} = \frac{\lambda''_1 - \beta\gamma}{2iB} = \frac{\lambda'_2 - \beta\gamma}{2iB}, \quad s_{21} = \frac{\lambda''_2 - \beta\gamma}{2iB} = \frac{\lambda'_1 - \beta\gamma}{2iB};$$

$$g'' = \frac{\lambda''_1 - \beta\gamma}{2iB}g + G = G', \quad G'' = \frac{\lambda''_2 - \beta\gamma}{2iB}g + G = g'. \quad (10.3.42)$$

Уравнения (10.3.36) принимают в новом (штрихованном) базисе вид двух несвязанных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(A) \quad (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 - \lambda'_1) g' = 0,$$

$$(\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 - \lambda'_2) G' = 0; \quad (10.3.43)$$

$$(B) \quad (\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 - \lambda'_2) g'' = 0,$$

$$(\Delta + \epsilon^2 - k^2 - M^2 - \lambda'_1) G'' = 0. \quad (10.3.44)$$

Отмечаем, что фактически здесь есть только две разные ситуации, описываемые уравнениями для функций $g'(G'')$ и $G'(g'')$.

Учитывая явный вид оператора Δ , рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r^2} + \lambda^2 \right) \varphi(r) = 0.$$

Введем переменную $x = Br^2$, уравнение примет вид (без ограничения общности будем считать, что параметр eB положительный – это соответствует тому, что бесконечно большим значениям координаты r соответствуют бесконечно большие и положительные значения координаты x)

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{m^2}{4x} + \frac{x}{4} + \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{4B} \right) \varphi = 0.$$

Ищем решение в виде $\varphi(x) = x^A e^{-Cx} f(x)$, функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A + 1 - 2Cx) \frac{df}{dx} + \left[\frac{A^2 - m^2/4}{x} + (C^2 - \frac{1}{4})x - 2AC - C - \frac{m}{2} + \frac{\lambda^2}{4B} \right] f = 0.$$

При $A = + |m|/2$ и $C = +1/2$ уравнение упрощается:

$$x \frac{d^2 R}{dx^2} + (2A + 1 - x) \frac{dR}{dx} - \left(A + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{4B} \right) R = 0,$$

что является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$x F'' + (\gamma - x) F' - \alpha F = 0,$$

$$\alpha = \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{\lambda^2}{4B}, \quad \gamma = |m| + 1.$$

Условием сведения вырожденного гипергеометрического ряда к полиному является равенство $\alpha = -n$; это приводит к правилу квантования параметра λ^2

$$\lambda^2 = 4B \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m| + m}{2} \right). \quad (10.3.45)$$

Учитывая (10.3.43), (10.3.44), имеем следующие два представления для возможных спектров энергии:

$$\begin{aligned} g' \neq 0, \quad G' = 0, \quad \epsilon^2 - k^2 &= \lambda^2 + M^2 + \lambda'_1; \\ g' = 0, \quad G' \neq 0, \quad \epsilon^2 - k^2 &= \lambda^2 + M^2 + \lambda'_2. \end{aligned} \quad (10.3.46)$$

Два уравнения (10.3.46) для энергий можно записать в виде:

$$M^2 \gamma = \lambda^2 + M^2 + \frac{\beta(1 + \gamma) \pm \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2 \rho \gamma}}{2}. \quad (10.3.47)$$

В системе (10.3.47) введем переменную $x = \gamma - 1$, также с помощью равенств

$$\beta = \sigma \frac{4B^2}{M^2}, \quad \rho = 1 - \frac{4B^2\sigma^2}{M^4} = 1 - \frac{\beta^2}{4B^2}, \quad 16\rho B^2 = 16B^2 - 4\beta^2$$

исключим промежуточный параметр ρ :

$$(2M^2 - \beta)x - 2(\lambda^2 + \beta) = \pm \sqrt{\beta^2 x^2 + (16B^2 - 4\beta^2)(x + 1)}.$$

Отсюда приходим к квадратному уравнению

$$\begin{aligned} M^2(M^2 - \beta)x^2 - [(\lambda^2 + \beta)(2M^2 - \beta) + (4B^2 - \beta^2)]x + \\ + (\lambda^2 + \beta)^2 - (4B^2 - \beta^2) = 0, \end{aligned} \quad (10.3.48)$$

решение этого уравнения $ay^2 - by + c = 0$ можно записать в краткой форме

$$x = \frac{\epsilon^2 - M^2 - k^2}{M^2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

или более детально:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 - M^2 - k^2 &= xM^2 = \\ &= \frac{1}{2(M^2 - \beta)} \{ [(\lambda^2 + \beta)(2M^2 - \beta) + (4B^2 - \beta^2)] \pm \\ &\quad \pm [[(\lambda^2 + \beta)(2M^2 - \beta) + (4B^2 - \beta^2)]^2 - \\ &\quad - 4M^2(M^2 - \beta)(\lambda^2 + \beta)^2 - (4B^2 - \beta^2)]^{1/2} \}. \end{aligned} \quad (10.3.49)$$

Отметим, что решениям, описываемым случаем (10.3.34), отвечает спектр энергии согласно

$$\epsilon^2 = M^2 + k^2 + \lambda^2; \quad (10.3.50)$$

т. е. в этом классе решений поляризуемость никак себя не проявляет в магнитном поле.

Глава 11

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 И ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

11.1 Введение

Ниже найдено точное решение задачи о векторной частице с поляризуемостью в магнитном поле в нерелятивистском пределе. В качестве рабочего используется тетрадное 15-компонентное уравнение.

11.2 Основные обозначения

Исходное волновое уравнение имеет вид:

$$\left[\Gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + B_\alpha - i \frac{e}{\hbar} A_\alpha) - i \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi(x) = 0. \quad (11.2.1)$$

Однородное магнитное поле $\vec{B} = (0, 0, B)$ описывается вектор-потенциалом

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}, \quad A_z = 0.$$

В базисе диагонально цилиндрической тетрады исходное свободное волновое уравнение имеет вид:

$$\left[\Gamma^0 \partial_0 + \Gamma^1 \partial_r + \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) + \Gamma^3 \partial_z - M \right] \Psi = 0. \quad (11.2.2)$$

Учет постоянного однородного магнитного поля осуществляется одной формальной заменой в третьем члене уравнения (11.2.2):

$$\frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + \frac{ieB}{2\hbar} r^2 + J^{12}). \quad (11.2.3)$$

Дальше при проведении разделения переменных, чтобы не загромождать формул, не будем выписывать рядом с вкладом от члена ∂_ϕ в волновом уравнении вклад от магнитного поля, а учтем его в самом конце.

11.3 Разделение переменных, решение радиальных уравнений

Будем искать решения в виде цилиндрических волн:

$$\Psi = \{ C, C_0, \vec{C}, \Phi_0, \vec{\Phi}, \vec{E}, \vec{H} \}, C(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C(r),$$

$$C_0(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C_0(r), \vec{C}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \\ C_3(r) \end{vmatrix},$$

$$\Phi_0(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \Phi_0(r), \vec{\Phi}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \\ \Phi_3(r) \end{vmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} E_1(r) \\ E_2(r) \\ E_3(r) \end{vmatrix}, \vec{H}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{vmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \end{vmatrix}.$$

(11.3.1)

Учтем в уравнении (11.2.3) блочную структуру всех входящих матриц и волновой функции. В результате получаем:

$$-i\frac{\epsilon}{\hbar c} C_0 - \vec{e}_1 \frac{d}{dr} \vec{C} - \frac{1}{r} \vec{e}_2 (im + \tau_3) \vec{C} - ik \vec{e}_3 \vec{C} = M C,$$

(11.3.2)

$$- \vec{e}_1 \frac{d}{dr} \vec{E} - \frac{1}{r} \vec{e}_2 (im + \tau_3) \vec{E} - ik \vec{e}_3 \vec{E} = M C_0,$$

$$+i\frac{\epsilon}{\hbar c} - \tau_1 \frac{d}{dr} \vec{H} - \frac{1}{r} \tau_2 (im + \tau_3) \vec{H} - ik \tau_3 \vec{H} = M \vec{C},$$

(11.3.3)

$$-i\frac{\epsilon}{\hbar c} \sigma C - \vec{e}_1 \frac{d}{dr} \vec{E} - \frac{1}{r} \vec{e}_2 (im + \tau_3) \vec{E} - ik \vec{e}_3 \vec{E} = M \Phi_0,$$

$$+i\frac{\epsilon}{\hbar c} \vec{E} + \sigma \vec{e}_1^t \frac{d}{dr} C - \tau_1 \frac{d}{dr} \vec{H} +$$

$$+ \frac{1}{r} [im \sigma \vec{e}_2^t C - \tau_2 (im + \tau_3) \vec{H}] + ik (\sigma \vec{e}_3^t C - \tau_3 \vec{H}) = M \vec{\Phi},$$

(11.3.4)

$$-i\frac{\epsilon}{\hbar c} \vec{\Phi} - \vec{e}_1^t \frac{d}{dr} \Phi_0 - \frac{1}{r} im \vec{e}_2^t \Phi_0 - ik \vec{e}_3^t \Phi_0 = M \vec{E},$$

(11.3.5)

$$\tau_1 \frac{d}{dr} \vec{\Phi} + \frac{1}{r} \tau_2 (im + \tau_3) \vec{\Phi} + ik \tau_3 \vec{\Phi} = M \vec{H}. \quad (11.3.6)$$

С использованием следующих обозначений (учитываем присутствие внешнего магнитного поля):

$$\frac{\epsilon}{\hbar c} \implies \epsilon, \quad m \implies m + \frac{eB}{2\hbar} r^2 \implies m + Br^2;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = \hat{a}_m, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = \hat{b}_m$$

получающуюся систему уравнений записываем в виде:

$$-i\epsilon C_0 - \hat{b}_{m-1} C_1 - \hat{a}_{m+1} C_3 - ik C_2 = M C, \quad (11.3.7)$$

$$\begin{aligned} -\hat{b}_{m-1} E_1 - \hat{a}_{m+1} E_3 - ik E_2 &= M C_0, \\ i\epsilon E_1 + i\hat{a}_m H_2 - k H_1 &= M C_1, \\ i\epsilon E_2 - i\hat{b}_{m-1} H_1 + i\hat{a}_{m+1} H_3 &= M C_2, \\ i\epsilon E_3 - i\hat{b}_m H_2 + k H_3 &= M C_3, \end{aligned} \quad (11.3.8)$$

$$\begin{aligned} -i\epsilon \sigma C - \hat{b}_{m-1} E_1 - \hat{a}_{m+1} E_3 - ik E_2 &= M \Phi_0, \\ i\epsilon E_1 - \sigma \hat{a}_m C + i\hat{a}_m H_2 - k H_1 &= M \Phi_1, \\ i\epsilon E_2 - i\hat{b}_{m-1} H_1 + i\hat{a}_{m+1} H_3 + i k \sigma C &= M \Phi_2, \\ i\epsilon E_3 + \sigma \hat{b}_m C - i\hat{b}_m H_2 + k H_3 &= M \Phi_3, \end{aligned} \quad (11.3.9)$$

$$\begin{aligned} -i\epsilon \Phi_1 + \hat{a}_m \Phi_0 &= M E_1, & -i\epsilon \Phi_2 - ik \Phi_0 &= M E_2, \\ -i\epsilon \Phi_3 + \hat{b}_m \Phi_0 &= M E_3, & -i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1 &= M H_1, \\ i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3 &= M H_2, & i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3 &= M H_3. \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

Исключим из основных 10 уравнений (11.3.9), (11.3.10) вспомогательную функцию C , используя равенство

$$\begin{aligned} M^2 C &= -i\epsilon (-\hat{b}_{m-1} E_1 - \hat{a}_{m+1} E_3 - ik E_2) - \\ &- \hat{b}_{m-1} (i\epsilon E_1 + i\hat{a}_m H_2 - k H_1) - \\ &- \hat{a}_{m+1} (i\epsilon E_3 - i\hat{b}_m H_2 + k H_3) - \\ &- ik (i\epsilon E_2 - i\hat{b}_{m-1} H_1 + i\hat{a}_{m+1} H_3) \end{aligned}$$

или

$$M^2 C = i(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m - \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m) H_2 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{2iB}{M^2} H_2.$$

В результате получаем систему из 10 уравнений для основных функций:

$$\begin{aligned} -i\epsilon\sigma \frac{2iB}{M^2} H_2 - \hat{b}_{m-1} E_1 - \hat{a}_{m+1} E_3 - ik E_2 &= M \Phi_0, \\ i\epsilon E_1 - \sigma \hat{a}_m \frac{2iB}{M^2} H_2 + i \hat{a}_m H_2 - k H_1 &= M \Phi_1, \\ i\epsilon E_2 - i\hat{b}_{m-1} H_1 + i\hat{a}_{m+1} H_3 + i k\sigma \frac{2iB}{M^2} H_2 &= M \Phi_2, \\ i\epsilon E_3 - \sigma \hat{b}_m \frac{2iB}{M^2} H_2 - i\hat{b}_m H_2 + k H_3 &= M \Phi_3, \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

$$\begin{aligned} -i\epsilon \Phi_1 + \hat{a}_m \Phi_0 &= M E_1, & -i\epsilon \Phi_2 - ik \Phi_0 &= M E_2, \\ -i\epsilon \Phi_3 + \hat{b}_m \Phi_0 &= M E_3, & -i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1 &= M H_1, \\ i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3 &= M H_2, & i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3 &= M H_3. \end{aligned} \quad (11.3.12)$$

Исключим нединамические переменные Φ_0, H_1, H_2, H_3 с помощью равенств:

$$\begin{aligned} \frac{2\epsilon\sigma B}{M^2} (i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3) - \hat{b}_{m-1} M E_1 - \\ - ik M E_2 - \hat{a}_{m+1} M E_3 &= M^2 \Phi_0, \\ -i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1 &= M H_1, & i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3 &= M H_2, \\ i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3 &= M H_3. \end{aligned}$$

В результате приходим к 6 уравнениям для динамических переменных:

$$\begin{aligned} i\epsilon M E_1 + \left(1 - \frac{2\sigma B}{M^2}\right) i\hat{a}_m (i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3) - \\ - k(-i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1) &= M^2 \Phi_1, \\ i\epsilon M E_2 - i\hat{b}_{m-1}(-i\hat{a}_m \Phi_2 + k \Phi_1) - \\ - \frac{2k\sigma B}{M^2} (i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3) + i\hat{a}_{m+1} (i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3) &= M^2 \Phi_2, \\ i\epsilon M E_3 - \left(1 + \frac{2\sigma B}{M^2}\right) i\hat{b}_m (i\hat{b}_{m-1} \Phi_1 - i\hat{a}_{m+1} \Phi_3) + \\ + k(i\hat{b}_m \Phi_2 - k \Phi_3) &= M^2 \Phi_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\epsilon M\Phi_1 + \hat{a}_m \left[\frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} (i\hat{b}_{m-1}\Phi_1 - i\hat{a}_{m+1}\Phi_3) - \right. \\
& \quad \left. - \hat{b}_{m-1} E_1 - ikE_2 - \hat{a}_{m+1}E_3 \right] = M^2 E_1, \\
& -i\epsilon M\Phi_2 - ik \left[\frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} (i\hat{b}_{m-1}\Phi_1 - i\hat{a}_{m+1}\Phi_3) - \right. \\
& \quad \left. - \hat{b}_{m-1} E_1 - ikE_2 - \hat{a}_{m+1}E_3 \right] = M^2 E_2, \\
& -i\epsilon M\Phi_3 + \hat{b}_m \left[\frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} (i\hat{b}_{m-1}\Phi_1 - \right. \\
& \quad \left. - i\hat{a}_{m+1}\Phi_3) - \hat{b}_{m-1} E_1 - ikE_2 - \hat{a}_{m+1}E_3 \right] = M^2 E_3.
\end{aligned}$$

Вводим разбиение на большие и малые компоненты согласно

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= B_1 + M_1, & iE_1 &= B_1 - M_1, \\
\Phi_2 &= B_2 + M_2, & iE_2 &= B_2 - M_2, \\
\Phi_3 &= B_3 + M_3, & iE_3 &= B_3 - M_3.
\end{aligned}$$

Получаем, одновременно выделяем энергию покоя формальной заменой $\epsilon \Rightarrow \epsilon + M$:

$$\begin{aligned}
(\epsilon + M)M(B_1 - M_1) + \left(1 - \frac{2\sigma B}{M^2}\right) i\hat{a}_m [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] - \\
- k [-i\hat{a}_m(B_2 + M_2) + k(B_1 + M_1)] = M^2(B_1 + M_1),
\end{aligned}$$

$$(\epsilon + M)M(B_2 - M_2) - i\hat{b}_{m-1}[-i\hat{a}_m(B_2 + M_2) + k(B_1 + M_1)] -$$

$$- \frac{2k\sigma B}{M^2} [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] +$$

$$+ i\hat{a}_{m+1} [i\hat{b}_m(B_2 + M_2) - k(B_3 + M_3)] = M^2(B_2 + M_2),$$

$$(\epsilon + M)M(B_3 - M_3) - \left(1 + \frac{2\sigma B}{M^2}\right) i\hat{b}_m [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] +$$

$$+ k [i\hat{b}_m(B_2 + M_2) - k(B_3 + M_3)] = M^2(B_3 + M_3),$$

$$-i(\epsilon + M)M(B_1 + M_1) + \hat{a}_m \left[\frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + i\hat{b}_{m-1}(B_1 - M_1) - k(B_2 - M_2) + i\hat{a}_{m+1}(B_3 - M_3) \Big] = -iM^2(B_1 - M_1), \\
& -i(\epsilon + M)M(B_2 + M_2) - ik \left[\frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] + \right. \\
& \left. + i\hat{b}_{m-1}(B_1 - M_1) - k(B_2 - M_2) + i\hat{a}_{m+1}(B_3 - M_3) \right] = -iM^2(B_2 - M_2), \\
& -i(\epsilon + M)M(B_3 + M_3) + \hat{b}_m \left[\frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] + \right. \\
& \left. + i\hat{b}_{m-1}(B_1 - M_1) - k(B_2 - M_2) + i\hat{a}_{m+1}(B_3 - M_3) \right] = -iM^2(B_3 - M_3).
\end{aligned}$$

После элементарных сокращений и перегруппировок приходим к системе

$$\begin{aligned}
& \epsilon M(B_1 - M_1) + (1 - \frac{2\sigma B}{M^2})[-\hat{a}_m \hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) + \hat{a}_m \hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] + \\
& \quad + ik\hat{a}_m(B_2 + M_2) - k^2(B_1 + M_1) = 2M^2 M_1, \\
& \epsilon M(B_1 + M_1) + \frac{2\epsilon\sigma B}{M^3}[-\hat{a}_m \hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) + \hat{a}_m \hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] - \\
& - \hat{a}_m \hat{b}_{m-1}(B_1 - M_1) - ik\hat{a}_m(B_2 - M_2) - \hat{a}_m \hat{a}_{m+1}(B_3 - M_3) = -2M^2 M_1, \\
& \epsilon M(B_2 - M_2) - \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m(B_2 + M_2) - ik\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - \frac{2k\sigma B}{M^2} [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - \\
& - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m(B_2 + M_2) - ik\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3) = 2M^2 M_2, \\
& \epsilon M(B_2 + M_2) + \frac{2\epsilon k\sigma B}{M^3} [i\hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - i\hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] + \\
& + ik\hat{b}_{m-1}(B_1 - M_1) - k^2(B_2 - M_2) + ik\hat{a}_{m+1}(B_3 - M_3) = -2M^2 M_2, \\
& \epsilon M(B_3 - M_3) + (1 + \frac{2\sigma B}{M^2}) [\hat{b}_m \hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) - \hat{b}_m \hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] + \\
& \quad + ik\hat{b}_m(B_2 + M_2) - k^2(B_3 + M_3) = 2M^2 M_3, \\
& \epsilon M(B_3 + M_3) + \frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} [-\hat{b}_m \hat{b}_{m-1}(B_1 + M_1) + \hat{b}_m \hat{a}_{m+1}(B_3 + M_3)] - \\
& - \hat{b}_m \hat{b}_{m-1}(B_1 - M_1) - ik\hat{b}_m(B_2 - M_2) - \hat{b}_m \hat{a}_{m+1}(B_3 - M_3) = -2M^2 M_3.
\end{aligned}$$

Чтобы получить нерелятивистские уравнения, следует в пределах каждой пары сложить уравнения и пренебречь малыми компонентами M_j в сравнении с большими B_j . Так получаем

$$\begin{aligned} & \left[\left(-2 + \frac{2\sigma B}{M^2} - \frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} \right) \hat{a}_m \hat{b}_{m-1} + 2\epsilon M - k^2 \right] B_1 + \\ & + \left(-\frac{2\sigma B}{M^2} + \frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} \right) \hat{a}_m \hat{a}_{m+1} B_3 = 0, \end{aligned} \quad (11.3.13)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] B_2 + \\ & + \left(-\frac{2\sigma B}{M^2} + \frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} \right) ik \hat{b}_{m-1} B_1 + \left(\frac{2k\sigma B}{M^2} - \frac{2\epsilon k\sigma B}{M^3} \right) i \hat{a}_{m+1} B_3 = 0, \end{aligned} \quad (11.3.14)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(-2 - \frac{2\sigma B}{M^2} + \frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} \right) \hat{b}_m \hat{a}_{m+1} + 2\epsilon M - k^2 \right] B_3 + \\ & + \left(\frac{2\sigma B}{M^2} - \frac{2\epsilon\sigma B}{M^3} \right) \hat{b}_m \hat{b}_{m-1} B_1 = 0. \end{aligned} \quad (11.3.15)$$

Уравнения (11.3.13)–(11.3.15) можно записать короче:

$$\begin{aligned} & \left[-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] B_2 + ik \Sigma (\hat{a}_{m+1} B_3 - \hat{b}_{m-1} B_1) = 0, \\ & \left[(-2 + \Sigma) \hat{a}_m \hat{b}_{m-1} + 2\epsilon M - k^2 \right] B_1 - \Sigma \hat{a}_m \hat{a}_{m+1} B_3 = 0, \\ & \left[(-2 - \Sigma) \hat{b}_m \hat{a}_{m+1} + 2\epsilon M - k^2 \right] B_3 + \Sigma \hat{b}_m \hat{b}_{m-1} B_1 = 0, \end{aligned} \quad (11.3.16)$$

где использовано обозначение

$$\Sigma = \frac{2\sigma B(M - \epsilon)}{M^3} \approx \frac{2\sigma B}{M^2}, \quad \epsilon \ll M.$$

Под действием на второе уравнение слева оператором \hat{b}_{m-1} , на третье уравнение слева – оператором \hat{a}_{m+1} и введем новые полевые переменные:

$$\hat{b}_{m-1} B_1 = G_1, \quad \hat{a}_{m+1} B_3 = G_3.$$

Система уравнений относительно функций B_2, G_1, G_2 имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left[-\hat{b}_{m-1} \hat{a}_m - \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] B_2 + ik \Sigma (G_3 - G_1) = 0, \\ & \left[(-2 + \Sigma) \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] G_1 - \Sigma \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m G_3 = 0, \\ & \left[(-2 - \Sigma) \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] G_3 + \Sigma \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m G_1 = 0. \end{aligned} \quad (11.3.17)$$

Введем разложения:

$$G_1 = \frac{f+g}{2}, \quad G_3 = \frac{f-g}{2}; \quad G_1 + G_3 = f, \quad G_1 - G_3 = g.$$

В системе (11.3.17) сложим и вычтем второе и третье уравнения:

$$\begin{aligned} & \left[-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] B_2 - ik\Sigma g = 0, \\ & \left[(-2 + \Sigma) \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] \frac{f+g}{2} - \Sigma \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m \frac{f-g}{2} + \\ & + \left[(-2 - \Sigma) \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] \frac{f-g}{2} + \Sigma \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m \frac{f+g}{2} = 0, \\ & \left[(-2 + \Sigma) \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] \frac{f+g}{2} - \Sigma \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m \frac{f-g}{2} - \\ & - \left[(-2 - \Sigma) \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] \frac{f-g}{2} - \Sigma \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m \frac{f+g}{2} = 0. \end{aligned} \quad (11.3.18)$$

Последние два уравнения дают:

$$\begin{aligned} & (2\epsilon M - k^2)f - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) f + \frac{1}{2}\Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) f - \\ & - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g + \frac{1}{2}\Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g + \\ & + \frac{1}{2}\Sigma(-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) f + \frac{1}{2}\Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2\epsilon M - k^2)g - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) f + \frac{1}{2}\Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) f - \\ & - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g + \frac{1}{2}\Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g + \\ & + \frac{1}{2}\Sigma(-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) f + \frac{1}{2}\Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (11.3.18) принимают вид:

$$\left[-\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + 2\epsilon M - k^2 \right] B_2 - ik\Sigma g = 0,$$

$$\begin{aligned} & (2\epsilon M - k^2)f - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) f - \\ & - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g + \Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) g = 0, \end{aligned}$$

$$(2\epsilon M - k^2)g - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m)g + \Sigma(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m)g - (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m)f = 0. \quad (11.3.19)$$

Учитывая тождества

$$-(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r^2} = \Delta, \\ -\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m = 2B, \quad (11.3.20)$$

уравнения (11.3.19) для трех функций B_2 , f , g записываем короче (для сокращения формул будем использовать обозначение $2\epsilon M - k^2 = \lambda$):

$$(\Delta + \lambda) B_2 - ik\Sigma g = 0, \\ \lambda f + \Delta f + 2B g - \Sigma\Delta g = 0, \\ \lambda g + \Delta g + 2B f - 2\Sigma B g = 0. \quad (11.3.21)$$

Третье уравнение позволяет выразить

$$\Delta g = -\lambda g - 2B f + 2\Sigma B g.$$

С учетом полученного равенства второе уравнение дает

$$\Delta f = -(\lambda + 2B\Sigma) f + (2B\Sigma^2 - \Sigma\lambda - 2B) g.$$

Первое уравнение можно представить как

$$\Delta B_2 = -\lambda B_2 + ik\Sigma g.$$

Таким образом, система уравнений (11.3.21) приводится к следующему виду:

$$\Delta B_2 = -\lambda B_2 + ik\Sigma g, \\ \Delta f = -(\lambda + 2B\Sigma) f + (2B\Sigma^2 - \Sigma\lambda - 2B) g, \\ \Delta g = -2B f + (2\Sigma B - \lambda) g. \quad (11.3.22)$$

Ее удобнее записать в матричной форме:

$$\Delta \begin{vmatrix} B_2(r) \\ f(r) \\ g(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & ik\Sigma \\ 0 & -(2B\Sigma + \lambda) & (2B\Sigma^2 - \Sigma\lambda - 2B) \\ 0 & -2B & (2B\Sigma - \lambda) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_2(r) \\ f(r) \\ g(r) \end{vmatrix}. \quad (11.3.23)$$

Приведем матрицу справа к диагональному виду:

$$\begin{vmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \\ \psi_3(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_2(r) \\ f(r) \\ g(r) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & ik\Sigma \\ 0 & -(2B\Sigma + \lambda) & (2B\Sigma^2 - \Sigma\lambda - 2B) \\ 0 & -2B & (2B\Sigma - \lambda) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

т. е. приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & ik\Sigma \\ 0 & -(2B\Sigma + \lambda) & [\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] \\ 0 & -2B & (2B\Sigma - \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (11.3.24)$$

Отсюда находим три уравнения на собственные значения:

$$\begin{vmatrix} (-\lambda - \lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & (-2B\Sigma - \lambda - \lambda_1) & -2B \\ ik\Sigma & [\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] & +(2B\Sigma - \lambda - \lambda_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (-\lambda - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & (-2B\Sigma - \lambda - \lambda_2) & -2B \\ ik\Sigma & [\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] & +(2B\Sigma - \lambda - \lambda_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (-\lambda - \lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & (-2B\Sigma - \lambda - \lambda_3) & -2B \\ ik\Sigma & [\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] & +(2B\Sigma - \lambda - \lambda_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (11.3.25)$$

По существу есть три собственных значения, и нужно построить линейно независимые собственные векторы **a**, **b**, **c**. Условие существования решений – равенство нулю определителя, отсюда получаем уравнение (обозначаем три собственных значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ как μ):

$$(-\lambda - \mu) \{ (-2B\Sigma - \lambda - \mu)(+2B\Sigma - \lambda - \mu) +$$

$$+ 2B[\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] \} = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$\lambda_1 = -\lambda, \quad \lambda_2 = -\lambda + \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda},$$

$$\lambda_3 = -\lambda - \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}. \quad (11.3.26)$$

При

$$\lambda_1 = -\lambda$$

система уравнений принимает вид:

$$-2B\Sigma a_2 - 2B a_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_3 = -\Sigma a_2,$$

$$ik\Sigma a_1 + [\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] a_2 + 2B\Sigma a_3 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$ik\Sigma a_1 = (\Sigma\lambda + 2B) a_2;$$

выбираем решение так:

$$a_2 = k\Sigma, \quad a_1 = -i(\Sigma\lambda + 2B), \quad a_3 = -k\Sigma^2;$$

т. е.

$$\lambda_1, \quad \Psi_1(r) = -i(\Sigma\lambda + 2B) B_2(r) + k\Sigma f(r) - k\Sigma^2 g(r). \quad (11.3.27)$$

При $\lambda_2 = -\lambda + \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}$ система уравнений принимает вид:

$$(-\lambda - \lambda_2)b_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b_1 = 0,$$

$$(-2B\Sigma - \lambda - \lambda_2)b_2 - 2Bb_3 = 0,$$

$$ik\Sigma b_1 + [\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] b_2 + (2B\Sigma - \lambda - \lambda_2) b_3 = 0;$$

выбираем решение с $b_2 = 1$:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = \frac{-2B\Sigma - \lambda - \lambda_2}{2B};$$

т. е.

$$\lambda_2, \quad \Psi_2(r) = f(r) + \frac{-2B\Sigma - \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}}{2B} g(r). \quad (11.3.28)$$

Наконец, при

$$\lambda_3 = -\lambda - \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}$$

система уравнений принимает вид:

$$(-\lambda - \lambda_3)c_1 = 0,$$

$$(-2B\Sigma - \lambda - \lambda_3) c_2 - 2B c_3 = 0,$$

$$ik\Sigma c_1 + [\Sigma(2B\Sigma - \lambda) - 2B] c_2 + (2B\Sigma - \lambda - \lambda_3) c_3 = 0.$$

Выбираем решение так:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{-2B\Sigma - \lambda - \lambda_3}{2B};$$

т. е.

$$\lambda_3, \quad \Psi_3(r) = f(r) + \frac{-2B\Sigma + \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}}{2B} g(r). \quad (11.3.29)$$

В итоге задача сведена к трем уравнениям:

$$(\Delta - \lambda_1)\psi_1(r) = 0,$$

$$(\Delta - \lambda_2)\psi_2(r) = 0,$$

$$(\Delta - \lambda_3)\psi_3(r) = 0.$$

Диагонализация достигается с помощью линейного преобразования, задаваемого матрицей:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i(\Sigma\lambda + 2B) & k\Sigma & -k\Sigma^2 \\ 0 & 1 & \frac{-2B\Sigma - \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}}{2B} \\ 0 & 1 & \frac{-2B\Sigma + \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}}{2B} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(\Delta - \mu)\varphi(r) = 0.$$

Учитывая явный вид Δ , рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r^2} - \mu \right) \varphi(r) = 0. \quad (11.3.30)$$

Введем переменную $x = Br^2$, уравнение примет вид³:

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{m^2}{4x} + \frac{x}{4} + \frac{m}{2} + \frac{\mu}{4B} \right) \varphi = 0. \quad (11.3.31)$$

Ищем решение в виде $\varphi(x) = x^A e^{-Cx} f(x)$. Функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A + 1 - 2Cx) \frac{df}{dx} + \left[\frac{A^2 - m^2/4}{x} + (C^2 - \frac{1}{4})x - 2AC - C - \frac{m}{2} - \frac{\mu}{4B} \right] f = 0.$$

При $A = + |m|/2$, $C = +1/2$ уравнение упрощается:

$$x \frac{d^2 R}{dx^2} + (2A + 1 - x) \frac{dR}{dx} - \left(A + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{\mu}{4B} \right) R = 0,$$

³Без ограничения общности будем считать, что параметр eB положительный: это соответствует тому, что бесконечно большим значениям координаты r соответствуют бесконечно большие и положительные значения координаты x .

что является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$x F'' + (\gamma - x)F' - \alpha F = 0,$$

$$\alpha = \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{\mu}{4B}, \quad \gamma = |m| + 1.$$

Условием обрыва вырожденного гипергеометрического ряда до полинома является равенство $\alpha = -n$. Это приводит к правилу квантования параметра μ (нужно помнить про соглашение $B \Rightarrow eB/2$):

$$-\mu = 4B \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m| + m}{2} \right). \quad (11.3.32)$$

Пусть $\mu = \lambda_1$, тогда условие квантования дает

$$\begin{aligned} -\mu &= \lambda = 2M\epsilon - k^2, \\ 2M\epsilon - k^2 &= 4B \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m| + m}{2} \right). \end{aligned} \quad (11.3.33)$$

Пусть $\mu = \lambda_2$, тогда условие квантования (11.3.33) дает

$$\begin{aligned} -\mu &= \lambda - \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}, \quad \lambda + \mu > 0 \quad \Rightarrow \\ \lambda &= -\mu + B\Sigma \pm \sqrt{B^2\Sigma^2 + 4B^2 - 2\mu B\Sigma}, \\ -\mu &= 4B \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m| + m}{2} \right). \end{aligned} \quad (11.3.34)$$

Пусть $\mu = \lambda_3$, тогда условие квантования (11.3.33) приводит к

$$\begin{aligned} -\mu &= \lambda + \sqrt{4B^2 + 2B\Sigma\lambda}, \quad \lambda + \mu < 0 \quad \Rightarrow \\ \lambda &= -\mu + B\Sigma \mp \sqrt{B^2\Sigma^2 + 4B^2 - 2\mu B\Sigma}, \\ -\mu &= 4B \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m| + m}{2} \right). \end{aligned} \quad (11.3.35)$$

При положительном $\Sigma = \sigma(2B/M^2)$ нужно использовать верхние знаки, при отрицательном – нижние.

Таким образом, на основе использования общековариантного тетрадного формализма в теории Федорова – Плетюхова для частицы со спином 1 с электромагнитной характеристикой – поляризуемостью – построены точные решения квантовомеханического волнового уравнения для этой частицы во внешнем постоянном однородном магнитном поле в нерелятивистском приближении. Выделено три линейно независимых типа решений, в каждом случае найден спектр энергии частицы.

Глава 12

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ В ПРОСТРАНСТВАХ H_3 И S_3

12.1 Разделение переменных в уравнении Дирака в S_3

Для параметризации сферического пространства используем следующую (цилиндрическую) систему координат:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \rho^2 [\cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) + dz^2],$$

$$z \in [-\pi/2, +\pi/2], \quad r \in [0, +\pi], \quad \phi \in [0, 2\pi]. \quad (12.1.1)$$

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах обобщается на случай пространства Римана S_3 так:

$$A_\phi = B (\cos r - 1). \quad (12.1.2)$$

Будем рассматривать уравнения Дирака в магнитном поле (12.1.2) в пространстве Римана S_3 . Оно принимает следующий вид:

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi - eB(\cos r - 1)}{\sin r} + \cos z \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \varphi = 0. \quad (12.1.3)$$

Для сокращения записи формул вводим специальное обозначение для $\mu(r)$. С использованием следующей подстановки

$$\varphi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix}, \quad \mu(r) = \frac{m + eB(\cos r - 1)}{\sin r},$$

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \mu(r) + \cos z \left(\epsilon\gamma^0 + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix} = 0 \quad (12.1.4)$$

находим уравнения для четырех функций $f_a(t, z)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_4 + \cos z \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_3 - M f_1) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) f_3 - \cos z \frac{\partial f_4}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_4 - M f_2) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0.
\end{aligned} \tag{12.1.5}$$

Накладывая линейное ограничение

$$f_3 = A f_1, \quad f_4 = A f_2, \quad A = \frac{\epsilon \pm p}{M}, \quad p = \sqrt{\epsilon^2 - M^2},$$

сводим задачу к двум системам уравнений:

$$A = (\epsilon + p)/M,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_2 &= 0;
\end{aligned} \tag{12.1.6a}$$

$$A = (\epsilon - p)/M,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{12.1.6b}$$

Ищем решение в виде (для определенности следим за системой (12.1.6a)):

$$f_1 = Z_1(z) R_1(r), \quad f_2 = Z_2(z) R_2(r),$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) Z_2 R_2 + \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) Z_1 R_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) Z_1 R_1 - \cos z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) Z_2 R_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{12.1.7}$$

Вводим постоянную разделения

$$\begin{aligned}
\cos z \left(\frac{d}{dz} + ip\right) Z_1 &= \lambda Z_2, \\
\cos z \left(\frac{d}{dz} - ip\right) Z_2 &= \lambda Z_1.
\end{aligned} \tag{12.1.8}$$

Система (12.1.7) дает

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) R_2 + \lambda R_1 &= 0, \\
\left(\frac{d}{dr} - \mu\right) R_1 - \lambda R_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{12.1.9}$$

12.2 Нерелятивистское приближение в уравнениях по z -переменной

Из (12.1.8) получим дифференциальное уравнение второго порядка по переменной z :

$$\frac{d^2 Z_1}{dz^2} - \frac{\sin z}{\cos z} \frac{dZ_1}{dz} + \left(p^2 - ip \frac{\sin z}{\cos z} - \frac{\lambda^2}{\cos^2 z} \right) Z_1 = 0. \quad (12.2.1)$$

Переход к нерелятивистскому случаю осуществляется следующим образом: нужно выделить энергию покоя (по существу, это достигается отделением фактора e^{-iMt}) и считать, что значения энергии много меньше этой энергии покоя:

$$\epsilon = M + E, \quad E \ll M; \quad (12.2.2a)$$

параметр при этом трансформируется в следующий

$$p = \sqrt{(M + E)^2 - M^2} \approx +\sqrt{2ME}. \quad (12.2.2b)$$

Введем новую переменную

$$y = \frac{1 + i \operatorname{tg} z}{2}$$

и сделаем подстановку $Z_1 = y^A (1 - y)^B Z(y)$, при этом получаем

$$4y(1 - y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + 4 \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dz} + \left[\frac{2A(2A - 1) - p(p + 1)}{y} + \frac{2B(2B - 1) - p(p - 1)}{1 - y} - 4(A + B)^2 + 4\lambda^2 \right] Z = 0. \quad (12.2.3)$$

Требуем выполнения равенств:

$$A = -\frac{p}{2}, \quad \frac{p + 1}{2}, \quad B = \frac{p}{2}, \quad \frac{1 - p}{2}. \quad (12.2.4)$$

Уравнение (12.2.3) примет более простой вид:

$$y(1 - y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dz} - [(A + B)^2 - \lambda^2] Z = 0,$$

что является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\alpha = \lambda + A + B, \quad \beta = -\lambda + A + B, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (12.2.5)$$

Напоминаем, что

$$Z_1 = \left(\frac{e^{iz}}{\cos z} \right)^A \left(\frac{e^{-iz}}{\cos z} \right)^B F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}),$$

$$A = -\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \quad B = \frac{p}{2}, \frac{1-p}{2}, \quad p = +\sqrt{2ME}. \quad (12.2.6)$$

Проследим за 4 возможностями в зависимости от выбора A, C . Для определенности предполагаем, что $\lambda > 0$. Общности рассмотрения это не уменьшает (при отрицательных λ для квантования нужно использовать вместо параметра β параметр α или наоборот).

Вариант 1: $A = \frac{p+1}{2}, B = \frac{1-p}{2}, A+B=1, A-B=p,$

условие квантования

$$\beta = -n, \quad \text{спектр} \quad \lambda = 1+n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha = \lambda + 1, \quad \gamma = p + \frac{3}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{ipz}}{\cos z} F(\lambda + 1, -n, p + \frac{3}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}). \quad (12.2.7)$$

Вариант 2: $A = -\frac{p}{2}, B = \frac{p}{2}, A+B=0, A-B=-p,$

$$\beta = -n, \quad \text{спектр} \quad \lambda = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha = +n, \quad \gamma = -p + \frac{1}{2}, \quad Z_1 = e^{-ipz} F(\lambda, -n, -p + \frac{1}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}). \quad (12.2.8)$$

Обращаем внимание на то, что в этих двух случаях мы не получили условия квантования на параметр p . Вместо этого получили условие квантования для параметра λ . Но следует обратить внимание на то, что условие квантования для параметра λ также будет следовать из системы радиальных уравнений по переменной r , и мы увидим, что эти два правила квантования не совпадут. Поэтому решения типов 1 и 2 далее не рассматриваем.

Вариант 3: $A = \frac{p+1}{2}, B = \frac{p}{2}, A+B=p+1/2, A-B=1/2,$

$$\beta = -n, \quad \text{спектр} \quad p = +\sqrt{2ME} = \lambda - (n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha = \lambda + p + \frac{1}{2}, \quad \gamma = p + \frac{3}{2},$$

$$Z_1 = \frac{e^{iz/2}}{(\cos z)^{p+1/2}} F\left(\lambda + p + \frac{1}{2}, -n, p + \frac{3}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}\right). \quad (12.2.9)$$

Вариант 4: $A = -\frac{p}{2}$, $B = \frac{1-p}{2}$, $A + B = -p + 1/2$, $A - B = -1/2$,

$$\alpha = -n, \quad \text{спектр } p = \sqrt{2ME} = \lambda + (n + 1/2),$$

$$\beta = -\lambda - p + \frac{1}{2}, \quad \gamma = -p + \frac{1}{2},$$

$$Z_1 = \frac{e^{-iz/2}}{(\cos z)^{-p+1/2}} F\left(\lambda - p + \frac{1}{2}, -n, -p + \frac{1}{2}; \frac{e^{iz}}{2 \cos z}\right). \quad (12.2.10)$$

Наиболее интересными представляются решения 3 и 4 типов. Они отвечают качественно разным физическим ситуациям:

$$\text{вариант 3: } E = \frac{[\lambda - (n + 1/2)]^2}{2M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{вариант 4: } E = \frac{[\lambda + (n + 1/2)]^2}{2M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.2.11)$$

12.3 Решение уравнений по r -переменной

Из системы (12.1.9) следует уравнение для R_1 :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d\mu}{dr} - \mu^2 + \lambda^2 \right) R_1 = 0. \quad (12.3.1)$$

С учетом выражения $\mu(r)$ (для краткости на время обозначаем eB как B) получим явный вид уравнения:

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left[\frac{m \cos r - B(\cos r - 1)}{\sin^2 r} - \frac{[m + B(\cos r - 1)]^2}{\sin^2 r} + \lambda^2 \right] R_1 = 0.$$

Введем новую переменную $y = (1 + \cos r)/2$ и затем сделаем подстановку $R_1 = y^A(1 - y)^C R(y)$, в результате получим

$$y(1 - y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y \right] \frac{dR}{dy} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 + mB - B^2 + B/2}{y} + \right. \\
& \left. + \frac{C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4}{1-y} - (A+C)^2 + \lambda^2 + B^2 \right] R = 0.
\end{aligned} \tag{12.3.2}$$

Требуем выполнения равенств:

$$A = \frac{2B - m}{2}, \quad \frac{-2B + m + 1}{2}, \quad C = \frac{m}{2}, \quad \frac{1 - m}{2}, \tag{12.3.3}$$

в результате уравнение (12.3.2) упрощается:

$$\begin{aligned}
& y(1-y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y \right] \frac{dR}{dy} - \\
& - [(A+C)^2 - \lambda^2 - B^2] R = 0,
\end{aligned} \tag{12.3.4}$$

что является уравнением гипергеометрического типа с параметрами:

$$\alpha = A + C - \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \beta = A + C + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \tag{12.3.5}$$

Чтобы решение обращалось в ноль в начале координат $r = 0$ (при этом находимся на половине замкнутой линии: $u_0 = +\cos z$, $u_3 = \sin z$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$) и при $r = \pi$ (при этом находимся на другой половине этой замкнутой линии $u_0 = -\cos z$, $u_3 = \sin z$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$), нужно выбирать положительные значения параметров A и C :

$$\begin{aligned}
R_1 &= (1 + \cos r)^A (1 - \cos r)^C F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}); \\
& A > 0, \quad C > 0.
\end{aligned} \tag{12.3.6}$$

Проследим за 4 возможными вариантами (для определенности считаем, что $B > 0$; на общность рассмотрения это не влияет).

$$\begin{aligned}
\text{Вариант 1:} \quad C &= \frac{m}{2} > 0, \quad A = -\frac{2B + m}{2} > 0, \\
& C + A = -B > 0;
\end{aligned}$$

вариант невозможный.

$$\begin{aligned}
\text{Вариант 2:} \quad C &= \frac{m}{2} > 0, \quad A = \frac{2B + m + 1}{2} > 0, \\
& C + A = B + m + \frac{1}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Вариант 3: $C = \frac{1-m}{2} > 0, A = \frac{2B+m+1}{2} > 0,$
 $C + A = B + 1 > 0.$

Вариант 4: $C = \frac{1-m}{2} > 0, A = -\frac{2B+m}{2} > 0,$
 $C + A = -B - m + \frac{1}{2} > 0.$

Соответственно имеем следующие решения

Вариант 2: $m > 0, m \in \{+1, +2, \dots\},$

$$R_1 = (1 + \cos r)^{B+m/2+1/2} (1 - \cos r)^{m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}),$$

$$\alpha = (B + m + 1/2) - \sqrt{B^2 + \lambda^2},$$

$$\beta = (B + m + 1/2) + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = B + m + 3/2,$$

$$\alpha = -n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{B^2 + \lambda^2} = B + (m + n + \frac{1}{2}),$$

$$\text{спектр} \quad \lambda^2 = 2B (m + n + \frac{1}{2}) + (m + n + \frac{1}{2})^2.$$

(12.3.7)

Вариант 3: $-1 - 2B < m < 1, m \in \{-1 - 2B < m_0, \dots, -1, 0\},$

$$R_1 = (1 + \cos r)^{B+m/2+1/2} (1 - \cos r)^{1/2-m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}),$$

$$\alpha = B + 1 - \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \beta = B + 1 + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = 2B + m + 3/2,$$

$$\alpha = -n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{B^2 + \lambda^2} = B + n + \frac{1}{2},$$

$$\text{спектр} \quad \lambda^2 = 2B (n + \frac{1}{2}) + (n + \frac{1}{2})^2.$$

(12.3.8)

Вариант 4: $m < -2B,$

$$R_1 = (1 + \cos r)^{-B-m/2} (1 - \cos r)^{1/2-m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \cos r}{2}),$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(-B - m + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \\
\beta &= \left(-B - m + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{B^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = -2B - m + \frac{1}{2}, \\
\alpha = -n &\implies \sqrt{B^2 + \lambda^2} = -B - m + \frac{1}{2} + n, \\
\lambda^2 &= 2B \left(m - \frac{1}{2} - n\right) + \left(m - \frac{1}{2} - n\right)^2.
\end{aligned} \tag{12.3.9}$$

12.4 Об уравнении Паули в магнитном поле на фоне сферической геометрии

Покажем, что найденные выше решения действительно являются решениями 2-компонентного уравнения Паули на сфере S_3 во внешнем магнитном поле. Для этого обратимся снова к уравнениям (12.1.5):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \cos z \frac{\partial f_2}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_3 - \cos z \frac{\partial f_4}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_4 - M f_2) &= 0,
\end{aligned} \tag{12.4.1a}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_4 + \cos z \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \cos z (\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \cos z \frac{\partial f_1}{\partial z} - i \cos z (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0.
\end{aligned} \tag{12.4.1b}$$

Введем новые функции:

$$\frac{f_1 + f_3}{2} = f, \quad \frac{f_1 - f_3}{2i} = g, \quad \frac{f_2 + f_4}{2} = F, \quad \frac{f_2 - f_4}{2i} = G. \tag{12.4.2}$$

Из (12.4.1a) и (12.4.1b), комбинируя уравнения в пределах каждой пары, получим системы уравнений для функций f , F , g , G :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f - \cos z \frac{\partial F}{\partial z} + \cos z (\epsilon + M) G &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) g - \cos z \frac{\partial G}{\partial z} - \cos z (\epsilon - M) F &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \cos z \frac{\partial f}{\partial z} + \cos z (\epsilon + M) g &= 0,
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) G + \cos z \frac{\partial g}{\partial z} - \cos z (\epsilon - M) f = 0. \quad (12.4.3)$$

Сделаем в уравнениях формальную замену $\epsilon \implies M + E$ (это эквивалентно выделению энергии покоя с помощью фактора e^{-iMt}). В результате приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f - \cos z \frac{\partial F}{\partial z} + \cos z (E + 2M) G &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) g - \cos z \frac{\partial G}{\partial z} - \cos z E F &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \cos z \frac{\partial f}{\partial z} + \cos z (E + 2M) g &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) G + \cos z \frac{\partial g}{\partial z} - \cos z E f &= 0. \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

Условием применимости нерелятивистского приближения является также малость энергии по сравнению с энергией покоя, что означает применимость соотношения $E + 2M \approx 2M$. В результате из (12.4.4) приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2M \cos z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f - \cos z \frac{\partial F}{\partial z} \right] &= G, \\ \frac{1}{\cos z E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) g - \cos z \frac{\partial G}{\partial z} \right) &= F, \\ -\frac{1}{2M \cos z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \cos z \frac{\partial f}{\partial z} \right] &= g, \\ \frac{1}{\cos z E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) G + \cos z \frac{\partial g}{\partial z} \right) &= f. \end{aligned} \quad (12.4.5)$$

Исключая малые компоненты g, G , приходим к двум уравнениям в частных производных для больших компонент f, F :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \cos^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM\right) F - \sin z \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f + \cos^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM\right) f + \sin z \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F &= 0. \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

Напоминаем, что (см. раздел **12.1**)

$$f = \frac{f_1(r, z) + f_3(r, z)}{2} = \frac{1+A}{2} f_1(r, z) = \frac{1+A}{2} R_1(r) Z_1(z),$$

$$F = \frac{f_2(r, z) + f_4(r, z)}{2} = \frac{1+A}{2} f_2(r, z) = \frac{1+A}{2} R_2(r) Z_2(z),$$

поэтому предыдущие уравнения представимы так:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) R_2 Z_2 + \cos^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM \right) R_2 Z_2 - \\ & \quad - \sin z \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) R_1 Z_1 = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) R_1 Z_1 + \cos^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM \right) R_1 Z_1 + \\ & \quad + \sin z \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) R_2 Z_2 = 0. \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

Учтем уравнения (см. (12.1.9))

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu \right) R_2 + \lambda R_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \mu \right) R_1 - \lambda R_2 = 0,$$

при этом (12.4.7) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dr} - \mu \right) R_1 \left[-\lambda^2 Z_2 + \cos^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_2 - \lambda \sin z Z_1 \right] = 0, \\ & \left(\frac{d}{dr} + \mu \right) R_2 \left[\lambda^2 Z_1 - \cos^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_1 + \lambda \sin z Z_2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (12.4.8)$$

Оба множителя слева в (12.4.8) не равны нулю, поэтому должны выполняться два уравнения:

$$\begin{aligned} & -\lambda^2 Z_2 + \cos^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_2 - \lambda \sin z Z_1 = 0, \\ & \lambda^2 Z_1 - \cos^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_1 + \lambda \sin z Z_2 = 0. \end{aligned} \quad (12.4.9)$$

Эти уравнения можно переписать так ($p = +\sqrt{2ME}$):

$$\begin{aligned} & -\lambda^2 Z_2 + \cos^2 z \left(\frac{d}{dz} + ip \right) \left(\frac{d}{dz} - ip \right) Z_2 - \lambda \sin z Z_1 = 0, \\ & \lambda^2 Z_1 - \cos^2 z \left(\frac{d}{dz} - ip \right) \left(\frac{d}{dz} + ip \right) Z_1 + \lambda \sin z Z_2 = 0. \end{aligned} \quad (12.4.10)$$

Учтем (12.1.8):

$$\left(\frac{d}{dz} + ip \right) Z_1 = \frac{\lambda}{\cos z} Z_2, \quad \left(\frac{d}{dz} - ip \right) Z_2 = \frac{\lambda}{\cos z} Z_1;$$

при этом приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} -\lambda \cos z \left(\frac{d}{dz} + ip \right) Z_1 + \cos^2 z \left(\frac{d}{dz} + ip \right) \frac{\lambda}{\cos z} Z_1 - \lambda \sin z Z_1 &= 0, \\ \lambda \cos z \left(\frac{d}{dz} - ip \right) Z_2 - \cos^2 z \left(\frac{d}{dz} - ip \right) \frac{\lambda}{\cos z} Z_2 + \lambda \sin z Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.4.11)$$

Легко убедиться, что это два тождества вида $0 = 0$.

12.5 Разделение переменных в уравнении Дирака в H_3

Для параметризации пространства Лобачевского используем следующую (цилиндрическую) систему координат:

$$\begin{aligned} dS^2 &= c^2 dt^2 - \rho^2 [\operatorname{ch}^2 z (dr^2 + \operatorname{sh}^2 r d\phi^2) + dz^2], \\ z &\in (-\infty, +\infty), \quad r \in [0, +\infty), \phi \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах на случай пространства Лобачевского H_3 обобщается следующим образом:

$$A_\phi = -B (\operatorname{ch} r - 1). \quad (12.5.2)$$

Запишем уравнение Дирака в магнитном поле (12.5.2) в пространстве Лобачевского:

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\operatorname{ch} r - 1)}{\operatorname{sh} r} + \operatorname{ch} z \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \varphi = 0. \quad (12.5.3)$$

С использованием следующей подстановки (для сокращения записи формул вводим специальное обозначение для $\mu(r)$):

$$\varphi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix}, \quad \mu(r) = \frac{m - eB(\operatorname{ch} r - 1)}{\operatorname{sh} r},$$

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \mu(r) + \operatorname{ch} z \left(\epsilon\gamma^0 + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \right) \right] \begin{vmatrix} f_1(r, z) \\ f_2(r, z) \\ f_3(r, z) \\ f_4(r, z) \end{vmatrix} = 0 \quad (12.5.4)$$

находим уравнения для четырех функций $f_a(t, z)$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_4 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_3 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_4}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (\epsilon f_4 - M f_2) &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_1}{\partial z} - i \operatorname{ch} z (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_2}{\partial z} - i \operatorname{ch} z (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{12.5.5}$$

Накладывая линейное ограничение

$$f_3 = A f_1, \quad f_4 = A f_2, \quad A = \frac{\epsilon \pm p}{M}, \quad p = \pm \sqrt{\epsilon^2 - M^2},$$

сводим задачу к двум системам уравнений:

$$\begin{aligned}
 A = (\epsilon + p)/M, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_2 &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{12.5.6a}$$

$$\begin{aligned}
 A = (\epsilon - p)/M, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) f_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) f_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{12.5.6b}$$

Ищем решение в виде (для определенности следим за системой (12.5.6a))

$$\begin{aligned}
 f_1 = Z_1(z) R_1(r), \quad f_2 = Z_2(z) R_2(r), \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) Z_2 R_2 + \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip\right) Z_1 R_1 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) Z_1 R_1 - \operatorname{ch} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - ip\right) Z_2 R_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{12.5.7}$$

Вводим постоянную разделения

$$\operatorname{ch} z \left(\frac{d}{dz} + ip\right) Z_1 = \lambda Z_2, \quad \operatorname{ch} z \left(\frac{d}{dz} - ip\right) Z_2 = \lambda Z_1. \tag{12.5.8}$$

Система (12.5.7) дает

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu\right) R_2 + \lambda R_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \mu\right) R_1 - \lambda R_2 = 0. \tag{12.5.9}$$

12.6 Нерелятивистское приближение в уравнениях по z -переменной

Из (12.5.8) получим дифференциальное уравнение второго порядка по переменной z :

$$\frac{d^2 Z_1}{dz^2} + \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{dZ_1}{dz} + \left(p^2 + ip \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} - \frac{\lambda^2}{\operatorname{ch}^2 z} \right) Z_1 = 0. \quad (12.6.1)$$

Переход к нерелятивистскому случаю осуществляется следующим образом: нужно выделить энергию покоя (по существу, это достигается отделением фактора e^{-iMt}) и считать, что значения энергии много меньше этой энергии покоя:

$$\epsilon = M + E, \quad E \ll M; \quad (12.6.2a)$$

при этом параметр p трансформируется в следующий:

$$p = \sqrt{(M + E)^2 - M^2} \approx +\sqrt{2ME}. \quad (12.6.2b)$$

В уравнении (12.6.1) введем новую переменную

$$y = \frac{1 + \operatorname{th} z}{2}$$

и сделаем подстановку $Z_1 = y^A (1 - y)^B Z(y)$, в результате получим

$$4y(1 - y) \frac{d^2 Z}{dy^2} + 4 \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dy} + \left[\frac{2A(2A - 1) + p(p - i)}{y} + \frac{2B(2B - 1) + p(p + i)}{1 - y} - 4(A + B)^2 - 4\lambda^2 \right] Z = 0. \quad (12.6.3)$$

При значениях A, B

$$A = -\frac{ip}{2}, \quad \frac{1 + ip}{2}, \quad B = \frac{ip}{2}, \quad \frac{1 - ip}{2} \quad (12.6.4)$$

уравнение (12.6.3) примет более простой вид:

$$y(1 - y) \frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)y \right] \frac{dZ}{dz} - [(A + B)^2 + \lambda^2] Z = 0, \quad (12.6.5)$$

что является уравнением гипергеометрического типа с параметрами:

$$\alpha = +i\lambda + A + B, \quad \beta = -i\lambda + A + B, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (12.6.6)$$

Напоминаем, что

$$Z_1 = \left(\frac{e^z}{\operatorname{ch} z} \right)^A \left(\frac{e^{-z}}{\operatorname{ch} z} \right)^B F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}),$$

$$A = -\frac{ip}{2}, \frac{1+ip}{2}, \quad B = \frac{ip}{2}, \frac{1-ip}{2}, \quad p = +\sqrt{2ME}. \quad (12.6.7)$$

Рассмотрим все четыре возможности для выбора параметров A, B .

Вариант 1 : $A = \frac{1+ip}{2}, B = \frac{1-ip}{2}, \alpha = i\lambda + 1, \beta = -i\lambda + 1,$

$$\gamma = ip + \frac{3}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{ipz}}{\operatorname{ch} z} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}),$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad Z_1 \rightarrow \frac{e^{ipz}}{e^z} = 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad Z_1 \rightarrow \frac{e^{ipz}}{e^{-z}} = 0. \quad (12.6.8)$$

Вариант 2 : $A = -\frac{ip}{2}, B = \frac{ip}{2}, \alpha = i\lambda, \beta = -i\lambda,$

$$\gamma = -ip + \frac{1}{2}, \quad Z_1 = e^{-ipz} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}). \quad (12.6.9)$$

Вариант 3 : $A = \frac{1+ip}{2}, B = \frac{ip}{2}, \alpha = +i\lambda + \frac{1}{2} + ip, \beta = -i\lambda + \frac{1}{2} + ip,$

$$\gamma = ip + \frac{3}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{z/2}}{(\operatorname{ch} z)^{ip+1/2}} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}),$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{-ipz}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{+ipz} e^{-\infty} = 0. \quad (12.6.10)$$

Этот вариант не имеет нужного предельного перехода к плоскому пространству и дальше рассматриваться не будет.

Вариант 4 : $A = -\frac{ip}{2}, B = \frac{1-ip}{2}, \alpha = +i\lambda + \frac{1}{2} - ip, \beta = -i\lambda + \frac{1}{2} - ip,$

$$\gamma = -ip + \frac{1}{2}, \quad Z_1 = \frac{e^{-z/2}}{(\operatorname{ch} z)^{-ip+1/2}} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{e^z}{2 \operatorname{ch} z}),$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{+ipz} e^{-z} = 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad Z_1 \rightarrow e^{-ipz}.$$
(12.6.11)

Этот вариант не имеет нужного предельного перехода к плоскому пространству и дальше рассматриваться не будет.

12.7 Решение уравнений по r -переменной

Из системы (12.5.9) следует уравнение для R_1 :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d\mu}{dr} - \mu^2 + \lambda^2 \right) R_1 = 0. \quad (12.7.1)$$

С учетом выражения $\mu(r)$ (для краткости на время обозначаем eB как B) получим явный вид уравнения:

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left[\frac{m \operatorname{ch} r + B (\operatorname{ch} r - 1)}{\operatorname{sh}^2 r} - \frac{[m - B (\operatorname{ch} r - 1)]^2}{\operatorname{sh}^2 r} + \lambda^2 \right] R_1 = 0. \quad (12.7.2)$$

Введем новую переменную $y = (1 + \operatorname{ch} r)/2$ и затем сделаем подстановку $R_1 = y^A (1 - y)^C R(y)$, в результате получим:

$$y(1 - y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1) y \right] \frac{dR}{dy} +$$

$$+ \left[\frac{A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 - mB - B^2 - B/2}{y} + \right.$$

$$\left. + \frac{C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4}{1 - y} - (A + C)^2 - \lambda^2 + B^2 \right] R = 0. \quad (12.7.3)$$

При следующих значениях A, C :

$$A = -\frac{2B + m}{2}, \quad \frac{2B + m + 1}{2}, \quad C = \frac{m}{2}, \quad \frac{1 - m}{2} \quad (12.7.4)$$

уравнение (12.7.3) упрощается:

$$y(1 - y) \frac{d^2 R}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1) y \right] \frac{dR}{dy} -$$

$$- [(A + C)^2 + \lambda^2 - B^2] R = 0, \quad (12.7.5)$$

что является уравнением гипергеометрического типа с параметрами:

$$\alpha = A + C + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \beta = A + C - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}. \quad (12.7.6)$$

Чтобы решение было конечным в начале координат $r = 0$ (при этом находимся на оси z : $u_0 = \operatorname{ch} z$, $u_3 = \operatorname{sh} z$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$) и на бесконечности $r \rightarrow \infty$, нужно выбирать положительные значения C и отрицательные значения A такие, что $C + A < 0$:

$$R_1 = (1 + \operatorname{ch} r)^A (1 - \operatorname{ch} r)^C F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \operatorname{ch} r}{2}); \quad C \geq 0, \quad A < 0. \quad (12.7.7)$$

Проследим за 4 возможными вариантами (для определенности считаем, что $B > 0$ – на общность рассмотрения это не влияет).

$$1. \quad C = \frac{m}{2} \geq 0, \quad A = \frac{2B + m + 1}{2} < 0, \quad C + A = B + m + \frac{1}{2} < 0;$$

этот вариант невозможный.

$$2. \quad C = \frac{m}{2} \geq 0, \quad A = -\frac{2B + m}{2} < 0, \quad C + A = -B < 0;$$

вариант возможный.

$$3. \quad C = \frac{1 - m}{2} \geq 0, \quad A = \frac{2B + m + 1}{2} < 0, \quad C + A = B + 1 < 0;$$

этот вариант невозможный.

$$4. \quad C = \frac{1 - m}{2} \geq 0, \quad A = -\frac{2B + m}{2} < 0, \quad C + A = -B - m + \frac{1}{2} < 0;$$

вариант возможный.

Таким образом, возможны два варианта:

$$2. \quad m > 0; \quad 4. \quad -2B < m \leq 1. \quad (12.7.8)$$

Соответственно имеем решения.

$$\text{Вариант 2:} \quad m > 0, \quad C = m/2, \quad A = -B - m/2 < 0,$$

$$R_1 = (1 + \operatorname{ch} r)^{-B-m/2} (1 - \operatorname{ch} r)^{m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \operatorname{ch} r}{2}),$$

$$\alpha = -B + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \beta = -B - \sqrt{B^2 - \lambda^2},$$

$$\gamma = -2B - m + \frac{1}{2}. \quad (12.7.9)$$

Условие квантования имеет вид:

$$\alpha = -n \implies \sqrt{B^2 - \lambda^2} = B - n \implies \lambda^2 = +2Bn - n^2. \quad (12.7.10)$$

Причем, чтобы радиальная функция обращалась в ноль на бесконечности $r \rightarrow \infty$, необходимо выполнение неравенства

$$A + C + n < 0 \implies B - n > 0; \quad (12.7.11)$$

это условие обеспечивает вещественность и положительность корня квадратного $\sqrt{B^2 - \lambda^2}$.

Вариант 4: $-2B < m \leq 1, \quad C = 1/2 - m/2,$
 $A = -B - m/2 < 0, \quad C + A = -B - m + 1/2 < 0,$
 $R_1 = (1 + \operatorname{ch} r)^{-B-m/2} (1 - \operatorname{ch} r)^{1/2-m/2} F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 + \operatorname{ch} r}{2}),$
 $\alpha = (-B - m + 1/2) + \sqrt{B^2 - \lambda^2},$
 $\beta = (-B - m + 1/2) - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \gamma = -2B - m + \frac{1}{2}.$

$$(12.7.12)$$

Условие квантования имеет вид:

$$\alpha = -n \implies \sqrt{B^2 - \lambda^2} = B + m - 1/2 - n$$

$$\implies \lambda^2 = +2B(n - m + \frac{1}{2}) - (n - m + \frac{1}{2})^2. \quad (12.7.13)$$

Чтобы радиальная функция обращалась в ноль на бесконечности $r \rightarrow \infty$, необходимо выполнение неравенства

$$A + C + n < 0 \implies B + m - 1/2 - n > 0; \quad (12.7.14)$$

последнее неравенство обеспечивает вещественность и положительность корня квадратного $\sqrt{B^2 - \lambda^2}$.

Таким образом, спектр описывается соотношениями:

$$2. \quad n < B, \quad m > 0,$$

$$\lambda^2 = +2Bn - n^2;$$

$$4. \quad n < B + m - 1/2, \quad -2B < m \leq 1,$$

$$\lambda^2 = +2B(n - m + \frac{1}{2}) - (n - m + \frac{1}{2})^2. \quad (12.7.15)$$

12.8 Об уравнении Паули в магнитном поле в пространстве Лобачевского

Покажем, что найденные выше решения действительно являются решениями 2-компонентного уравнения Паули в пространстве Лобачевского во внешнем магнитном поле. Для этого обратимся снова к уравнениям (12.5.5):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_1 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_2}{\partial z} - i \operatorname{ch} z (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f_3 - \operatorname{ch} z \frac{\partial f_4}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (\epsilon f_4 - M f_2) &= 0, \end{aligned} \quad (12.8.1a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_4 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \operatorname{ch} z (\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) f_2 + \operatorname{ch} z \frac{\partial f_1}{\partial z} - i \operatorname{ch} z (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0. \end{aligned} \quad (12.8.1b)$$

Введем новые функции:

$$\frac{f_1 + f_3}{2} = f, \quad \frac{f_1 - f_3}{2i} = g, \quad \frac{f_2 + f_4}{2} = F, \quad \frac{f_2 - f_4}{2i} = G. \quad (12.8.2)$$

Из (12.8.1a) и (12.8.1b), комбинируя уравнения в пределах каждой пары, получим системы уравнений для функций f , F , g , G :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f - \operatorname{ch} z \frac{\partial F}{\partial z} + \operatorname{ch} z (\epsilon + M) G &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) g - \operatorname{ch} z \frac{\partial G}{\partial z} - \operatorname{ch} z (\epsilon - M) F &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \operatorname{ch} z \frac{\partial f}{\partial z} + \operatorname{ch} z (\epsilon + M) g &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) G + \operatorname{ch} z \frac{\partial g}{\partial z} - \operatorname{ch} z (\epsilon - M) f &= 0. \end{aligned} \quad (12.8.3)$$

Сделаем в уравнениях формальную замену $\epsilon \Rightarrow M + E$ (это эквивалентно выделению энергии покоя с помощью фактора e^{-iMt}); в результате приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f - \operatorname{ch} z \frac{\partial F}{\partial z} + \operatorname{ch} z (E + 2M) G &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) g - \operatorname{ch} z \frac{\partial G}{\partial z} - \operatorname{ch} z E F &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \operatorname{ch} z \frac{\partial f}{\partial z} + \operatorname{ch} z (E + 2M) g &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) G + \operatorname{ch} z \frac{\partial g}{\partial z} - \operatorname{ch} z E f &= 0.
\end{aligned} \tag{12.8.4}$$

Условием применимости нерелятивистского приближения является также малость энергии по сравнению с энергией покоя, что означает $E + 2M \approx 2M$; в результате из (12.8.4) приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2M \operatorname{ch} z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f - \operatorname{ch} z \frac{\partial}{\partial z} F \right] &= G, \\
\frac{1}{\operatorname{ch} z E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) g - \operatorname{ch} z \frac{\partial}{\partial z} G \right) &= F, \\
-\frac{1}{2M \operatorname{ch} z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \operatorname{ch} z \frac{\partial}{\partial z} f \right] &= g, \\
\frac{1}{\operatorname{ch} z E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) G + \operatorname{ch} z \frac{\partial}{\partial z} g \right) &= f.
\end{aligned} \tag{12.8.5}$$

Исключая малые компоненты g, G , приходим к двум уравнениям в частных производных для больших компонент f и F :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM\right) F + \operatorname{sh} z \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) f + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM\right) f - \operatorname{sh} z \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) F &= 0.
\end{aligned} \tag{12.8.6}$$

Напоминаем, что (см. раздел 12.5)

$$\begin{aligned}
f &= \frac{f_1(r, z) + f_3(r, z)}{2} = \frac{1+A}{2} f_1(r, z) = \frac{1+A}{2} R_1(r) Z_1(z), \\
F &= \frac{f_2(r, z) + f_4(r, z)}{2} = \frac{1+A}{2} f_2(r, z) = \frac{1+A}{2} R_2(r) Z_2(z),
\end{aligned}$$

поэтому предыдущие уравнения представимы так:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) R_2 Z_2 + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM\right) R_2 Z_2 + \\
+ \operatorname{sh} z \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) R_1 Z_1 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu\right) R_1 Z_1 + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2EM\right) R_1 Z_1 -
\end{aligned}$$

$$- \operatorname{sh} z \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) R_2 Z_2 = 0. \quad (12.8.7)$$

Учтем уравнения (см. (12.5.9))

$$\left(\frac{d}{dr} + \mu \right) R_2 + \lambda R_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \mu \right) R_1 - \lambda R_2 = 0,$$

при этом (12.8.7) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} - \mu \right) R_1 \left[-\lambda^2 Z_2 + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_2 + \lambda \operatorname{sh} z Z_1 \right] &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \mu \right) R_2 \left[\lambda^2 Z_1 - \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_1 - \lambda \operatorname{sh} z Z_2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (12.8.8)$$

Оба множителя слева в (12.8.8) не равны нулю, поэтому должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 Z_2 + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_2 + \lambda \operatorname{sh} z Z_1 &= 0, \\ \lambda^2 Z_1 - \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2EM \right) Z_1 - \lambda \operatorname{sh} z Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.8.9)$$

Эти уравнения можно переписать так ($p = +\sqrt{2ME}$):

$$\begin{aligned} -\lambda^2 Z_2 + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d}{dz} + ip \right) \left(\frac{d}{dz} - ip \right) Z_2 + \lambda \operatorname{sh} z Z_1 &= 0, \\ \lambda^2 Z_1 - \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d}{dz} - ip \right) \left(\frac{d}{dz} + ip \right) Z_1 - \lambda \operatorname{sh} z Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.8.10)$$

Учтем (12.5.8):

$$\left(\frac{d}{dz} + ip \right) Z_1 = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} z} Z_2, \quad \left(\frac{d}{dz} - ip \right) Z_2 = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} z} Z_1.$$

При этом приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} -\lambda \operatorname{ch} z \left(\frac{d}{dz} + ip \right) Z_1 + \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d}{dz} + ip \right) \frac{\lambda}{\operatorname{ch} z} Z_1 + \lambda \operatorname{sh} z Z_1 &= 0, \\ \lambda \operatorname{ch} z \left(\frac{d}{dz} - ip \right) Z_2 - \operatorname{ch}^2 z \left(\frac{d}{dz} - ip \right) \frac{\lambda}{\operatorname{ch} z} Z_2 - \lambda \operatorname{sh} z Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.8.11)$$

Легко убедиться, что это два тождества $0 = 0$. Таким образом, найденные в разделах **12.5–12.6** решения действительно являются решениями 2-компонентного уравнения Паули в гиперболическом пространстве Лобачевского H_3 во внешнем магнитном поле.

Глава 13

КЛАССИЧЕСКАЯ ЧАСТИЦА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОБАЧЕВСКОГО И РИМАНА

В настоящей главе обращаемся к исследованию движения классической частицы в магнитном поле на фоне пространств Лобачевского и Римана.

13.1 Второй закон Ньютона в пространстве Лобачевского

Классическое уравнение движения частицы во внешних электромагнитном и гравитационном полях имеет вид [20]:

$$mc^2 \left(\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \right) = e F^{\alpha\rho} U_\rho; \quad (13.1.1)$$

внешнее гравитационное поле описывается метрикой искривленного пространства-времени (используется сигнатура $+- - -$). Символы Кристоффеля определяются выражением

$$\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} = g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho,\beta\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\sigma g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\beta\sigma}). \quad (13.1.2)$$

Пространство-время Лобачевского H_3 и Римана S_3 имеют метрику следующего типа:

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{jk}(x^1, x^2, x^3) dx^j dx^k, \quad (13.1.3)$$

когда часть символов Кристоффеля обращается в ноль:

$$\Gamma^0_{\beta\sigma} = 0, \quad \Gamma^i_{00} = 0, \quad \Gamma^i_{0j} = 0,$$

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il} \Gamma_{l,jk} = \frac{1}{2} g^{il} (-\partial_l g_{jk} + \partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj}). \quad (13.1.4)$$

Удобно в (13.1.1) провести (1+3)-расщепление:

$$mc^2 \frac{d^2 x^0}{ds^2} = e (F^{01} U_1 + F^{02} U_2 + F^{03} U_3), \quad (13.1.5a)$$

$$mc^2 \left(\frac{d^2 x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) = e F^{10} U_0 + e F^{12} U_2 + e F^{13} U_3,$$

$$\begin{aligned}
mc^2 \left(\frac{d^2 x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) &= eF^{20} U_0 + eF^{21} U_1 + eF^{23} U_3, \\
mc^2 \left(\frac{d^2 x^3}{ds^2} + \Gamma^3_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) &= eF^{30} U_0 + eF^{31} U_1 + eF^{32} U_2. \quad (13.1.5b)
\end{aligned}$$

Обращаем специально внимание на то, что в (13.1.5a), (13.1.5b) предполагается использование обычных единиц измерения (для определенности используем систему СИ); соответственно все четыре уравнения слева и справа имеют размерность:

$$(\text{масса}) \times (\text{ускорение}) = (\text{сила}).$$

Размерность символов Кристоффеля Γ^i_{jk} равна (метр)⁻¹. Напоминаем, что

$$\begin{aligned}
(F^{\alpha\beta}) &= \begin{vmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & -cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{vmatrix}, \\
U^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} (dx^0, dx^i) \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(1, \frac{V^i}{c} \right), \\
V^i &= \frac{dx^i}{dt}, \quad V_k = g_{ki}(x) V^i, \quad V^2 = -g_{ki}(x) V^k V^i; \quad (13.1.5c)
\end{aligned}$$

все индексы нумеруют криволинейные координаты. Нужно помнить, что 3-мерные величины E^i, B^i не являются общековариантными векторами, это компоненты общековариантного тензора $F^{\alpha\beta}$. Учитывая тождество

$$\frac{dx^0}{ds} = \left(\frac{ds}{dx^0} \right)^{-1} = \left(\frac{cdt \sqrt{1 - V^2/c^2}}{cdt} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

уравнение (13.1.5a) приводим к виду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right) = e [-g_{ik}(x) E^i V^k]. \quad (13.1.6a)$$

В отсутствие электрического поля энергия частицы в магнитном поле остается постоянной. В свою очередь, три уравнения (13.1.5b) принимают вид (обозначим удельный заряд $e/m = q$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{V^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Gamma^1_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= qE^1 - q(V_2 B^3 - V_3 B^2), \\
\frac{d}{dt} \frac{V^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Gamma^2_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= qE^2 - q(V_3 B^1 - V_1 B^3),
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{V^3}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \Gamma^3_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = qE^3 - q(V_1B^2 - V_2B^1). \quad (13.1.6b)$$

В первую очередь, нас будет интересовать случай нерелятивистского движения⁴ при $V \ll c$, при этом все уравнения значительно упрощаются. Уравнение (13.1.6a) даст закон изменения нерелятивистской энергии:

$$\frac{d}{dt} \frac{mV^2}{2} = e [-g_{ik}(x) E^i V^k], \quad (13.1.7a)$$

а уравнения (13.1.6b) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V^1 + \Gamma^1_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= qE^1 - q(V_2B^3 - V_3B^2), \\ \frac{d}{dt} V^2 + \Gamma^2_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= qE^2 - q(V_3B^1 - V_1B^3), \\ \frac{d}{dt} V^3 + \Gamma^3_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= qE^3 - q(V_1B^2 - V_2B^1). \end{aligned} \quad (13.1.7b)$$

13.2 Частица в однородном магнитном поле в пространстве H_3

Воспользуемся известным представлением для векторного потенциала постоянного магнитного поля [20] в плоском пространстве (используем систему единиц СИ):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \\ \frac{A^a}{c} &= \frac{Br}{2} (0; -\sin \phi, \cos \phi, 0). \end{aligned} \quad (13.2.1a)$$

Из (13.2.1a) после пересчета к цилиндрическим координатам получаем:

$$A_t = 0, \quad A_r = 0, \quad A_z = 0, \quad A_\phi = -\frac{cBr^2}{2}. \quad (13.2.1b)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора:

$$F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = cB r. \quad (13.2.1c)$$

⁴Обобщение результатов на релятивистский случай не потребует значительных усилий и будет проведено в заключительной части работы.

Олевским [55] были найдены все системы ортогональных координат (x^1, x^2, x^3) в 3-мерном пространстве Лобачевского H_3 , допускающие полное разделение переменных в уравнении $(\Delta_2 + \lambda)f(x) = 0$. Таких систем координат существует 34. Идея состоит в том, чтобы среди этих систем координат установить некоторый аналог цилиндрических координат, в которых можно легко определить понятие однородного магнитного поля в пространстве Лобачевского H_3 (как решения соответствующих уравнений Максвелла) и затем попытаться решить уравнение движения классической частицы в пространстве Лобачевского в присутствии этого магнитного поля.

В [55] под номером *XI* приведена следующая система координат:

$$\begin{aligned} dS^2 &= c^2 dt^2 - \rho^2 [\operatorname{ch}^2 z (dr^2 + \operatorname{sh}^2 r d\phi^2) + dz^2], \\ z &\in (-\infty, +\infty), \quad r \in [0, +\infty), \quad \phi \in [0, 2\pi], \\ u^1 &= \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \cos \phi, \quad u^2 = \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \sin \phi, \\ u^3 &= \operatorname{sh} z, \quad u^0 = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} r, \\ (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 &= 1, \quad u^0 = +\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}; \end{aligned} \quad (13.2.2)$$

все координаты обезразмерены делением на радиус кривизны пространства Лобачевского ρ . При устремлении радиуса кривизны к бесконечности введенные в пространстве H_3 координаты переходят в обычные цилиндрические.

Представление однородного постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах (13.2.1) легко можно обобщить на случаи пространства Лобачевского. Действительно, введем в цилиндрических координатах пространства H_3 электромагнитное поле с потенциалом

$$A_\phi = -2cB \rho^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} = -cB \rho^2 (\operatorname{ch} r - 1). \quad (13.2.3a)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора

$$F_{\phi r} = -\frac{1}{\rho} \partial_r A_\phi = cB \rho \operatorname{sh} r, \quad (13.2.3b)$$

которая удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh} r} \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh} r \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^4 z \operatorname{sh}^2 r} \right) B \operatorname{sh} r \equiv 0.$$

Будем рассматривать уравнения движения (13.1.7b) в магнитном поле (13.2.3b) в пространстве Лобачевского. Координаты нумеруем следующим образом: $(x^1, x^2, x^3) = (r, \phi, z)$; при этом составляющие магнитного поля B^i , отвечающего тензору (13.2.3b), задаются согласно

$$cB^1 = -F^{23} = -F^{\phi z} = 0, \quad cB^2 = -F^{31} = -F^{zr} = 0,$$

$$cB^3 = -F^{12} = F^{\phi r} = g^{\phi\phi} g^{rr} F_{\phi r} = \frac{c\rho B}{\text{ch}^4 z \text{sh} r}. \quad (13.2.4)$$

Уравнения движения (13.1.7b) принимают в координатах (13.2.2) вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + \Gamma^r_{jk} V^j V^k &= q F^{r0} + q F^{r\phi} V_\phi + q F^{rz} V_z, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + \Gamma^\phi_{jk} V^j V^k &= q F^{\phi 0} + q F^{\phi r} V_r + q F^{\phi z} V_z, \\ \frac{dV^z}{dt} + \Gamma^z_{jk} V^j V^k &= q F^{z0} + q F^{zr} V_r + q F^{z\phi} V_\phi. \end{aligned} \quad (13.2.5a)$$

При отсутствии электрического поля с учетом (13.2.4) получаем более простые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + \Gamma^r_{jk} V^j V^k &= q F^{r\phi} V_\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + \Gamma^\phi_{jk} V^j V^k &= q F^{\phi r} V_r, \\ \frac{dV^z}{dt} + \Gamma^z_{jk} V^j V^k &= 0. \end{aligned} \quad (13.2.5b)$$

Исходя из метрического тензора, вычисляем символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{jk} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{th} z \\ 0 & -\text{sh} r \text{ch} r & 0 \\ \text{th} z & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \Gamma^\phi_{jk} &= \begin{vmatrix} 0 & \text{cth} r & 0 \\ \text{cth} r & 0 & \text{th} z \\ 0 & \text{th} z & 0 \end{vmatrix}, \\ \Gamma^z_{jk} &= \begin{vmatrix} -\text{ch} z \text{sh} z & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sh} z \text{ch} z \text{sh}^2 r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

Имеет смысл параллельно рассматривать аналогичную, но более простую ситуацию в плоском пространстве. Так, для символов Кристоффеля в цилиндрических координатах имеем выражения:

$$\Gamma^r_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^\phi_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & r^{-1} & 0 \\ r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^z_{jk} = 0. \quad (13.2.7)$$

Уравнения движения в пространствах Евклида и Лобачевского имеют соответственно следующий явный вид

в пространстве E_3 :

$$\frac{dV^r}{dt} + \Gamma^r_{\phi\phi} V^\phi V^\phi = q F^{r\phi} V_\phi,$$

$$\frac{dV^\phi}{dt} + 2\Gamma_{r\phi}^\phi V^r V^\phi = q F^{\phi r} V_r, \quad \frac{dV^z}{dt} = 0; \quad (13.2.8)$$

в пространстве H_3 :

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + 2\Gamma_{rz}^r V^r V^z + \Gamma_{\phi\phi}^r V^\phi V^\phi &= q F^{r\phi} V_\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + 2\Gamma_{\phi r}^\phi V^\phi V^r + 2\Gamma_{\phi z}^\phi V^\phi V^z &= q F^{\phi r} V_r, \\ \frac{dV^z}{dt} + \Gamma_{rr}^z V^r V^r + \Gamma_{\phi\phi}^z V^\phi V^\phi &= 0. \end{aligned} \quad (13.2.9)$$

Учтем явный вид символов Кристоффеля и электромагнитного тензора

в пространстве E_3 :

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} - r V^\phi V^\phi &= qB r V^\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + \frac{2}{r} V^r V^\phi &= -q \frac{B}{r} V^r, \quad \frac{dV^z}{dt} = 0; \end{aligned} \quad (13.2.10)$$

напомним, что размерность величины qB в системе СИ – это обратная секунда:

$$[qB] = \left[\frac{e}{m} B \right] = \frac{1}{\text{сек}}.$$

Фактически решение задачи о движении частицы в постоянном и однородном магнитном поле хорошо известно: частица равномерно наматывается на поверхность цилиндра, ориентированного вдоль поля. Переменная ϕ должна меняться при этом по линейному закону:

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0, \quad V^\phi = \frac{d\phi}{dt} = \omega, \quad \frac{dV^\phi}{dt} = 0, \quad (13.2.11a)$$

и уравнения (13.2.10) дают

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= r\omega (\omega + qB), \\ \frac{dr}{dt} \frac{1}{r} (2\omega + qB) &= 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0. \end{aligned} \quad (13.2.11b)$$

Таким образом, решение задачи описывается равенствами:

$$\begin{aligned} \omega &= -qB = -\frac{eB}{m}, \quad \phi(t) = \omega t + \phi_0, \\ r(t) &= r_0, \quad z(t) = z_0 + V_0^z t. \end{aligned} \quad (13.2.11c)$$

Обратимся теперь к системе уравнений в пространстве Лобачевского. С учетом явного вида символов Кристоффеля и электромагнитного тензора уравнения (13.2.9) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + 2 \operatorname{th} z V^r V^z - \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r V^\phi V^\phi &= B \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch}^2 z} V^\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + 2 \operatorname{cth} r V^\phi V^r + 2 \operatorname{th} z V^\phi V^z &= -B \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh} r} V^r, \\ \frac{dV^z}{dt} - \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z V^r V^r - \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z \operatorname{sh}^2 r V^\phi V^\phi &= 0. \end{aligned} \quad (13.2.12)$$

Специально обратим внимание на то, что здесь все величины, включая и координаты, безразмерные; в частности, символ B обозначает в действительности безразмерную величину, построенную из амплитуды магнитного поля, заряда частицы, массы частицы, скорости света и радиуса кривизны пространства:

$$\begin{aligned} B &\iff \frac{e}{m} \frac{\rho B}{c}, & t &\iff \frac{ct}{\rho}, \\ r &\iff \frac{r}{\rho}, & z &\iff \frac{z}{\rho}. \end{aligned} \quad (13.2.13)$$

Далее везде в уравнениях присутствует только этот безразмерный параметр B , но всегда при желании можно вернуться к обычным единицам измерения.

Принимая во внимание явный вид решения в плоском пространстве, можно в пространстве Лобачевского пытаться искать решения двух разных типов:

(А), отвечающее некоторому неравномерному наматыванию траектории частицы на цилиндрическую поверхность постоянного радиуса (ориентированной вдоль оси z);

(В), отвечающее равномерному наматыванию траектории частицы на некоторую сложной формы цилиндрическую поверхность (ориентированную вдоль оси z).

13.3 Построение решений в пространстве Лобачевского

Будем искать решение уравнений (13.2.12), вводя дополнительное условие:

$$r = r_0 = \operatorname{const}, \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t);$$

система уравнений принимает вид:

$$V^\phi = -\frac{B}{\operatorname{ch} r_0} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z},$$

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{B}{\operatorname{ch} r_0} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \right) + 2 \operatorname{th} z \left(-\frac{B}{\operatorname{ch} r_0} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \right) V^z = 0,$$

$$\frac{dV^z}{dt} = (\operatorname{th}^2 r_0 B^2) \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z}; \quad (13.3.1)$$

причем второе уравнение имеет вид тождества $0 \equiv 0$. Вводим обозначения

$$\alpha = -\frac{B}{\operatorname{ch} r_0}, \quad A = (\operatorname{th}^2 r_0 B^2) > 0;$$

задача сводится к двум уравнениям:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad \frac{dV^z}{dt} = A \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z}, \quad A > 0. \quad (13.3.2)$$

Отметим, что явный вид второго уравнения указывает на наличие эффективного отталкивания вдоль оси z в обе стороны от нулевого значения $z = 0$. Можно легко понизить степень второго уравнения:

$$d(V^z)^2 = A d\left(-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}\right) \implies \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\frac{A}{\operatorname{ch}^2 z} + \epsilon. \quad (13.3.3)$$

Позже покажем, что постоянная ϵ связана с интегралом движения – энергией.

Решим уравнение (13.3.3), сначала принимая $A \neq \epsilon$:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\epsilon \operatorname{ch}^2 z - A}}{\operatorname{ch} z}, \quad \pm \frac{d \operatorname{sh} z}{\sqrt{\epsilon - A + \epsilon \operatorname{sh}^2 z}} = dt.$$

Смысл знаков \pm понятен: они соответствуют движению вдоль z в противоположные стороны. Дальнейшие вычисления не требуют пояснений (есть две существенно разные ситуации в зависимости от того, как соотносятся параметры ϵ и A):

$$I. \quad \underline{\epsilon > A}, \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{arcsh} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon - A}} \operatorname{sh} z \right) = t - t_0; \quad (13.3.4a)$$

$$II. \quad \underline{\epsilon < A}, \quad \operatorname{sh}^2 z > \frac{A - \epsilon}{\epsilon},$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{arcch} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{A - \epsilon}} \operatorname{sh} z \right) = t - t_0. \quad (13.3.4b)$$

Таким образом, закон изменения координаты z от времени t установлен:

$$I. \quad \underline{\epsilon > A}, \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

$$\operatorname{sh} z(t) = \pm \frac{\sqrt{\epsilon - A}}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{sh} \sqrt{\epsilon} (t - t_0), \quad z_0 = 0; \quad (13.3.5a)$$

$$II. \quad \underline{\epsilon < A}, \quad \operatorname{sh}^2 z > \frac{A - \epsilon}{\epsilon},$$

$$\operatorname{sh} z(t) = \pm \frac{\sqrt{A - \epsilon}}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{ch} \sqrt{\epsilon} (t - t_0), \quad \operatorname{sh} z_0 = \pm \sqrt{\frac{A - \epsilon}{\epsilon}}. \quad (13.3.5b)$$

Для случаев типа I траектория проходит через точку $z = 0$; для случаев типа II частица (в силу эффективного отталкивания) отражается либо вправо, либо влево в точках $\pm \sqrt{(A - \epsilon)/\epsilon}$.

Теперь рассмотрим уравнение при $\epsilon = A$:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \epsilon \operatorname{th}^2 z. \quad (13.3.6)$$

У этого уравнения есть одно тривиальное решение:

$$z(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = \phi_0 + \alpha t, \quad \alpha = -\frac{B}{\operatorname{ch} r_0}; \quad (13.3.7)$$

оно отвечает вращению с постоянной угловой скоростью по линии $r = r_0$ при отсутствии какого-либо движения вдоль оси z .

Найдем другие решения уравнения (13.3.6):

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\epsilon} \operatorname{th} z, \quad \frac{d \operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} z} = \pm \sqrt{\epsilon} dt; \quad (13.3.8)$$

здесь имеем два разных уравнения в зависимости от знаков \pm . Непрерывные решения уравнений (13.3.8) существуют только в областях $z > 0$ и $z < 0$.

Уравнение для верхнего знака $+$ имеет решение:

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} z_0 e^{+\sqrt{\epsilon} t}, \quad (t = 0, z = z_0 \neq 0). \quad (13.3.9a)$$

При любом положительном начальном $z_0 > 0$ частица с течением времени уходит по оси z на бесконечность $+\infty$; при любом отрицательном начальном $z_0 < 0$ частица с течением времени уходит по оси z на бесконечность $-\infty$.

Уравнение для нижнего знака (минуса) имеет решение:

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} z_0 e^{-\sqrt{\epsilon} t}, \quad (t = 0, z = z_0 \neq 0). \quad (13.3.9b)$$

При любом положительном начальном $z_0 > 0$ частица с течением времени уходит по оси z влево, достигая за бесконечное время точки $z = 0$; при

любом отрицательном начальном $z_0 < 0$ частица с течением времени уходит по оси z вправо, достигая за бесконечное время точки $z = 0$.

Теперь следует вернуться к первому уравнению в (13.3.2) и найти зависимость $\phi(t)$. Обращаем внимание, что при этом нет необходимости рассматривать по отдельности случаи I и II из (13.3.5a), (13.3.5b):

$$A \neq \epsilon, \quad \phi - \phi_0 = \alpha \int \frac{dt}{\text{ch}^2 z} = \alpha \int \frac{dt}{\text{ch}^2 \sqrt{\epsilon} t - \frac{A}{\epsilon} \text{sh}^2 \sqrt{\epsilon} t}.$$

Дальнейшие вычисления не требуют пояснений:

$$\text{th } \sqrt{\epsilon} t = y, \quad \phi - \phi_0 = \alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int \frac{dy}{1 - \frac{A}{\epsilon} y^2},$$

$$A \neq \epsilon, \quad \phi - \phi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \text{arcth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \text{th } \sqrt{\epsilon} t \right). \quad (13.3.10a)$$

Отмечаем, что при $t \rightarrow +\infty$ для полного угла поворота будем иметь конечное значение

$$A \neq \epsilon, \quad (\phi - \phi_0)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \text{arcth} \sqrt{\frac{A}{\epsilon}}. \quad (13.3.10b)$$

Найдем зависимость $\phi(t)$ в случае (13.3.9a):

$$A = \epsilon, \quad \text{sh } z = \text{sh} z_0 e^{+\sqrt{\epsilon} t},$$

$$\phi - \phi_0 = \alpha \int \frac{dt}{\text{ch}^2 z} = \alpha \int \frac{dt}{1 + \text{sh}^2 z_0 e^{+2\sqrt{\epsilon} t}},$$

$$x = \text{sh}^2 z_0 e^{+2\sqrt{\epsilon} t}, \quad \phi - \phi_0 = \frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{x}{x+1} \Big|_{t=0}^t =$$

$$= \frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} \left[\ln \frac{\text{sh}^2 z_0}{\text{sh}^2 z_0 + e^{-2\sqrt{\epsilon} t}} - \ln \frac{\text{sh}^2 z_0}{\text{sh}^2 z_0 + 1} \right].$$

Таким образом,

$$\phi - \phi_0 = \frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{\text{sh}^2 z_0 + 1}{\text{sh}^2 z_0 + e^{-2\sqrt{\epsilon} t}}, \quad z_0 \neq 0. \quad (13.3.11a)$$

Отмечаем, что угол поворота при $t \rightarrow +\infty$ стремится к конечному выражению:

$$t \rightarrow +\infty, \quad \phi - \phi_0 = \frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{\text{sh}^2 z_0 + 1}{\text{sh}^2 z_0}, \quad z_0 \neq 0. \quad (13.3.11b)$$

Аналогично найдем зависимость $\phi(t)$ в случае (13.3.9b):

$$\begin{aligned}
 A &= \epsilon, \quad \text{sh } z = \text{sh } z_0 e^{-\sqrt{\epsilon}t}, \\
 \phi - \phi_0 &= \alpha \int \frac{dt}{\text{ch}^2 z} = \alpha \int \frac{dt}{1 + \text{sh}^2 z_0 e^{-2\sqrt{\epsilon}t}}, \\
 x &= \text{sh}^2 z_0 e^{-2\sqrt{\epsilon}t}, \quad \phi - \phi_0 = -\frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{x}{x+1} \Big|_{t=0}^t = \\
 &= -\frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} \left[\ln \frac{\text{sh}^2 z_0}{\text{sh}^2 z_0 + e^{+2\sqrt{\epsilon}t}} - \ln \frac{\text{sh}^2 z_0}{\text{sh}^2 z_0 + 1} \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\phi - \phi_0 = -\frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{\text{sh}^2 z_0 + 1}{\text{sh}^2 z_0 + e^{+2\sqrt{\epsilon}t}}, \quad z_0 \neq 0. \quad (13.3.12a)$$

Отмечаем, что угол поворота при $t \rightarrow +\infty$ стремится к бесконечному выражению:

$$t \rightarrow +\infty, \quad \phi - \phi_0 = \frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon}} (+\infty). \quad (13.3.12b)$$

13.4 Интеграл движения – энергия – в пространстве H_3

Исходя из системы уравнений в пространстве Лобачевского (13.2.9)

$$\begin{aligned}
 \frac{dV^r}{dt} + 2\Gamma_{rz}^r V^r V^z + \Gamma_{\phi\phi}^r V^\phi V^\phi &= F^{r\phi} V_\phi, \\
 \frac{dV^\phi}{dt} + 2\Gamma_{\phi r}^\phi V^\phi V^r + 2\Gamma_{\phi z}^\phi V^\phi V^z &= F^{\phi r} V_r, \\
 \frac{dV^z}{dt} + \Gamma_{rr}^z V^r V^r + \Gamma_{\phi\phi}^z V^\phi V^\phi &= 0,
 \end{aligned} \quad (13.4.1)$$

получим выражение для сохраняющейся величины – энергии. Для этого уравнения из (13.4.1) умножим соответственно на

$$g_{rr}(z) V^r = V_r, \quad g_{\phi\phi}(r, z) V^\phi = V_\phi, \quad g_{zz} V^z = V_z$$

и результаты сложим:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g_{rr} V^r V^r + g_{\phi\phi} V^\phi V^\phi + g_{zz} V^z V^z) - \\
 &- \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{rr} \right) V^r V^r - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{\phi\phi} \right) V^\phi V^\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{zz} \right) V^z V^z +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2\Gamma^r_{rz} V_r V^r V^z + \Gamma^r_{\phi\phi} V_r V^\phi V^\phi) + (2\Gamma^\phi_{\phi r} V_\phi V^\phi V^r + 2\Gamma^\phi_{\phi z} V_\phi V^\phi V^z) + \\
& + (\Gamma^z_{rr} V_z V^r V^r + \Gamma^z_{\phi\phi} V_z V^\phi V^\phi) \equiv 0. \quad (13.4.2)
\end{aligned}$$

Учитывая явные выражения для символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
2\Gamma^r_{rz} &= g^{rr} \partial_z g_{rr}, & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\phi\phi}, \\
2\Gamma^\phi_{\phi r} &= g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi}, & 2\Gamma^\phi_{\phi z} &= g^{\phi\phi} \partial_z g_{\phi\phi}, \\
\Gamma^z_{rr} &= -\frac{1}{2} g^{zz} \partial_z g_{rr}, & \Gamma^z_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} g^{zz} \partial_z g_{\phi\phi}, \quad (13.4.3)
\end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned}
2\Gamma^r_{rz} V_r V^r V^z + \Gamma^z_{rr} V_z V^r V^r &= +\frac{1}{2} V^r V^r V^z \partial_z g_{rr}, \\
\Gamma^r_{\phi\phi} V_r V^\phi V^\phi + 2\Gamma^\phi_{\phi r} V_\phi V^\phi V^r &= +\frac{1}{2} V^r V^\phi V^\phi \partial_r g_{\phi\phi}, \\
2\Gamma^\phi_{\phi z} V_\phi V^\phi V^z + \Gamma^z_{\phi\phi} V_z V^\phi V^\phi &= +\frac{1}{2} V^\phi V^\phi V^z \partial_z g_{\phi\phi}. \quad (13.4.4)
\end{aligned}$$

Следовательно, (13.4.2) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g_{rr} V^r V^r + g_{\phi\phi} V^\phi V^\phi + g_{zz} V^z V^z) - \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{rr} \right) V^r V^r - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{\phi\phi} \right) V^\phi V^\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{zz} \right) V^z V^z \Big] + \\
& + \frac{1}{2} V^r V^r V^z \partial_z g_{rr} + \frac{1}{2} V^r V^\phi V^\phi \partial_r g_{\phi\phi} + \frac{1}{2} V^\phi V^\phi V^z \partial_z g_{\phi\phi} = 0. \quad (13.4.5)
\end{aligned}$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{rr} \right) &= -\frac{1}{2} (\partial_z g_{rr}) V^z, & -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{zz} \right) &= 0, \\
-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{\phi\phi} \right) &= -\frac{1}{2} (\partial_r g_{\phi\phi}) V^r + (\partial_z g_{\phi\phi}) V^z,
\end{aligned}$$

уравнение (13.4.5) приводим к виду полной производной по времени от некоторой величины

$$\frac{d}{dt} (g_{rr} V^r V^r + g_{\phi\phi} V^\phi V^\phi + g_{zz} V^z V^z) = 0. \quad (13.4.6)$$

Следовательно, в пространстве Лобачевского в присутствии внешнего магнитного поля сохраняющаяся величина имеет вид:

$$\epsilon = \text{ch}^2 z \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \text{sh}^2 r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2. \quad (13.4.7)$$

Фактически, ϵ – это квадрат скорости в безразмерных единицах. В обычных единицах это

$$\epsilon = \frac{V^2}{c^2}. \quad (13.4.8a)$$

В контексте исследования нерелятивистской системы величина ϵ может быть связана с кинетической энергией нерелятивистской частицы:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{mV^2}{2}, \quad E = \frac{mV^2}{2}, \quad \epsilon = 2 \frac{E}{mc^2}. \quad (13.4.8b)$$

Для решений с постоянным $r = r_0$ выражение для энергии переписывается в виде:

$$\epsilon = \text{sh}^2 r_0 \frac{B^2}{\text{ch}^2 r_0} \frac{1}{\text{ch}^2 z} + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

или

$$\epsilon = \frac{A}{\text{ch}^2 z} + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2, \quad (13.4.9)$$

что совпадает с (13.3.3).

13.5 Лагранжев формализм в пространстве H_3

Рассмотрим задачу о частице в магнитном поле в пространстве H_3 , используя лагранжев формализм. Лагранжиан системы равен (используем с самого начала его безразмерную форму):

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (-g_{ik} V^i V^k) - \frac{e}{c} g_{ik} A^i V^k = \\ &= \frac{m}{2} (\text{ch}^2 z V^r V^r + \text{ch}^2 z \text{sh}^2 r V^\phi V^\phi + V^z V^z) + \frac{e\rho B}{c} (\text{ch} r - 1) V^\phi. \end{aligned} \quad (13.5.1)$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^r} = \frac{\partial L}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^\phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^z} = \frac{\partial L}{\partial z}$$

принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{ch}^2 z V^r &= \text{ch}^2 z \text{sh} r \text{ch} r V^\phi V^\phi + B \text{sh} r V^\phi, \\ \frac{d}{dt} [\text{ch}^2 z \text{sh}^2 r V^\phi + B (\text{ch} r - 1)] &= 0, \\ \frac{d}{dt} V^z &= \text{ch} z \text{sh} z (V^r V^r + \text{sh}^2 r V^\phi V^\phi) \end{aligned} \quad (13.5.2)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + 2 \operatorname{th} z V^r V^z - \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r V^\phi V^\phi &= B \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch}^2 z} V^\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + 2 \operatorname{cth} r V^\phi V^r + 2 \operatorname{th} z V^\phi V^z &= -B \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh} r} V^r, \\ \frac{dV^z}{dt} &= \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z (V^r V^r + \operatorname{sh}^2 r V^\phi V^\phi), \end{aligned} \quad (13.5.3)$$

что совпадает с уравнениями (13.2.12).

Второе уравнение в (13.5.2) вводит сохраняющую величину

$$I = \operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh}^2 r V^\phi + B (\operatorname{ch} r - 1) = \operatorname{const}. \quad (13.5.4)$$

Из лагранжева формализма можно извлечь больше, если воспользоваться фактом существования в данной задаче трех независимых интегралов движения. Действительно, два интеграла движения уже установлены:

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh}^2 r V^\phi + B (\operatorname{ch} r - 1), \\ \epsilon &= \operatorname{ch}^2 z (V^r V^r + \operatorname{sh}^2 r V^\phi V^\phi) + V^z V^z. \end{aligned} \quad (13.5.5)$$

Кроме того, воспользовавшись соотношением (13.3.3), легко угадать явный вид третьего интеграла движения:

$$A = \operatorname{ch}^2 z \left[\epsilon - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \operatorname{ch}^4 z (V^r V^r + \operatorname{sh}^2 r V^\phi V^\phi). \quad (13.5.6)$$

Чтобы убедиться, что величина A действительно сохраняется, достаточно представить выражение для A в виде

$$A = (\operatorname{ch}^2 z V^r)^2 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} (\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh}^2 r V^\phi)^2, \quad (13.5.7)$$

и далее, учитывая первое и второе уравнения в (13.5.2), представленные как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\operatorname{ch}^2 z V^r) &= \operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r V^\phi V^\phi + B \operatorname{sh} r V^\phi, \\ \frac{d}{dt} (\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh}^2 r V^\phi) &= -B \operatorname{sh} r V^r = 0, \end{aligned}$$

можно убедиться в выполнении равенства

$$\frac{dA}{dt} = 0. \quad (13.5.8)$$

Имея три интеграла движения, можно в общем виде свести решение задачи к вычислению интегралов. Действительно, из (13.5.4) следует

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \frac{I - B (\operatorname{ch} r - 1)}{\operatorname{sh}^2 r}. \quad (13.5.9)$$

Подставляя это в (13.5.6):

$$A = \text{ch}^4 z \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{[I - B(\text{ch } r - 1)]^2}{\text{sh}^2 r},$$

получим

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{\text{ch}^2 z} \sqrt{A - \frac{[I - B(\text{ch } r - 1)]^2}{\text{sh}^2 r}}. \quad (13.5.10)$$

В свою очередь, из (13.5.6) находим

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{\text{ch } z} \sqrt{\epsilon \text{ch}^2 z - A}. \quad (13.5.11)$$

Легко в общем виде получить уравнение для траекторий. Для этого, например, достаточно разделить (13.5.10) на (13.5.11):

$$\frac{\text{sh } r \, dr}{\sqrt{A \text{sh}^2 r - (I - B \text{ch } r + B)^2}} = \pm \frac{1}{\text{ch } z} \frac{dz}{\sqrt{\epsilon \text{ch}^2 z - A}}; \quad (13.5.12a)$$

это уравнение для траектории в форме $dF(r, z) = 0$.

Если (13.5.10) разделить на (13.5.9), то получим уравнение траектории в форме $dF(r, \phi) = 0$:

$$\frac{[I - B(\text{ch } r - 1)] \, dr}{\text{sh } r \sqrt{A \text{sh}^2 r - [I - B(\text{ch } r - 1)]^2}} = d\phi. \quad (13.5.12b)$$

Таким образом, решение задачи о частице в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского сведено к вычислению следующих интегралов:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\text{ch}^2 z} \frac{I - B(\text{ch } r - 1)}{\text{sh}^2 r}, \quad (13.5.13a)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{\text{ch}^2 z} \sqrt{A - \frac{[I - B(\text{ch } r - 1)]^2}{\text{sh}^2 r}}, \quad (13.5.13b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{\text{ch } z} \sqrt{\epsilon \text{ch}^2 z - A}, \quad (13.5.13c)$$

$$\frac{\text{sh } r \, dr}{\sqrt{A \text{sh}^2 r - (I - B \text{ch } r + B)^2}} = \pm \frac{1}{\text{ch } z} \frac{dz}{\sqrt{\epsilon \text{ch}^2 z - A}}, \quad (13.5.13d)$$

$$\frac{[I - B(\text{ch } r - 1)] \, dr}{\text{sh } r \sqrt{A \text{sh}^2 r - [I - B(\text{ch } r - 1)]^2}} = d\phi. \quad (13.5.13e)$$

Убедимся, что дополнительное условие $r = r_0 = \text{const}$ совместимо с системой уравнений (13.5.13). Они принимают вид:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{\text{ch}^2 z}, \quad \frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{\text{ch} z} \sqrt{\epsilon \text{ch}^2 z - A},$$

$$\alpha = \frac{I - B (\text{ch} r_0 - 1)}{\text{sh}^2 r_0}, \quad A = \frac{[I - B (\text{ch} r_0 - 1)]^2}{\text{sh}^2 r_0}. \quad (13.5.14)$$

Обращаем внимание на то, что ограничение $r = r_0 = \text{const}$ – это в определенном смысле переход к вырожденному случаю в системе (13.5.13), так как при этом интегрирования по переменной r в общих уравнениях (13.5.13b), (13.5.13d), (13.5.13e) становятся бессмысленными (в знаменателях появляется ноль).

Отметим, что в разделе **13.3** для α и A имели другие выражения:

$$\alpha = -\frac{B}{\text{ch} r_0}, \quad A = \text{th}^2 r_0 B^2. \quad (13.5.15)$$

Приравнявая два выражения для α , получаем:

$$\frac{I - B (\text{ch} r_0 - 1)}{\text{sh}^2 r_0} = -\frac{B}{\text{ch} r_0}, \quad \Rightarrow \quad I = B \frac{1 - \text{ch} r_0}{\text{ch} r_0}. \quad (13.5.16)$$

Подставим найденное I в выражение для A из (13.5.14):

$$A = \frac{[I - B (\text{ch} r_0 - 1)]^2}{\text{sh}^2 r_0} =$$

$$= \frac{B^2}{\text{sh}^2 r_0} \left[\frac{1 - \text{ch} r_0}{\text{ch} r_0} + (1 - \text{ch} r_0) \right]^2 = (\text{th}^2 r_0 B^2),$$

что совпадает с (13.5.15).

Из (13.5.16) следует, что движение с фиксированным значением $r_0 = \text{const}$ реализуется, если

$$\frac{I_0}{B} + 1 = \frac{1}{\text{ch} r_0} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_0}{B} < 0. \quad (13.5.17)$$

Другими словами, при $B > 0$ величина $I_0 < 0$ и при $B < 0$ величина $I_0 > 0$.

13.6 Все возможные решения в пространстве H_3 , финитные и инфинитные радиальные движения

Теперь, используя общие соотношения (13.5.13), рассмотрим общее решение (без использования дополнительного условия $r = r_0$). Пусть $A \neq \epsilon$.

Уравнение (13.5.13c) дает (это показано ранее):

$$I. \quad \epsilon > A, \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

$$\operatorname{sh} z(t) = \pm \sqrt{1 - \frac{A}{\epsilon}} \operatorname{sh} \sqrt{\epsilon} t, \quad z_0 = 0. \quad (13.6.1)$$

$$II. \quad A > \epsilon, \quad \operatorname{sh}^2 z > \frac{A}{\epsilon} - 1,$$

$$\operatorname{sh} z(t) = \pm \sqrt{\frac{A}{\epsilon} - 1} \operatorname{ch} \sqrt{\epsilon} t, \quad \operatorname{sh} z_0 = \pm \sqrt{\frac{A - \epsilon}{\epsilon}}. \quad (13.6.2)$$

Уравнение (13.5.13b) переписывается как

$$\pm \int \frac{d \operatorname{ch} r}{\sqrt{A (\operatorname{ch}^2 r - 1) - (I + B - B \operatorname{ch} r)^2}} = \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 z(t)}. \quad (13.6.3)$$

Интеграл в правой части уже вычислялся (см. (13.3.10a)):

$$R = \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon} t \right). \quad (13.6.4)$$

Для интеграла в левой части находим представление:

$$L = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}}}, \quad x = \operatorname{ch} r,$$

$$a = A - B^2, \quad b = 2B(I + B), \quad c = -A - (I + B)^2 < 0. \quad (13.6.5)$$

В зависимости от значений параметров a, b, c могут возникать различного типа решения (рисунки 13.1–13.5).

КОНЕЧНЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

$$(a < 0, \quad B^2 \text{ велико настолько, что } A < B^2)$$

Когда $a < 0$, корни x_1 и x_2 равны:

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}, \quad x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}, \quad a < 0. \quad (13.6.6a)$$

Для их вещественности необходимо требовать выполнения неравенства $(b^2 - 4ac) > 0$, что приводит к следующему:

$$(I + B)^2 > B^2 - A \quad (\text{где } B^2 - A = -a > 0). \quad (13.6.6b)$$

Вообще говоря, при таких ограничениях могли бы реализовываться несколько разных возможностей.

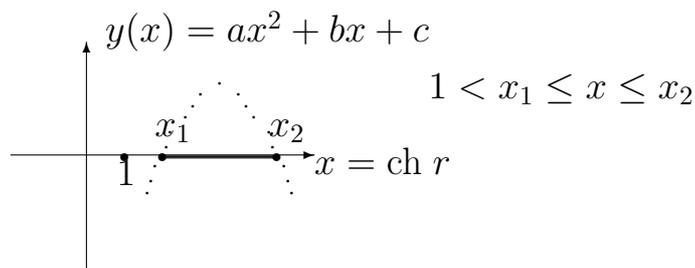


Рисунок 13.1 – Конечное движение

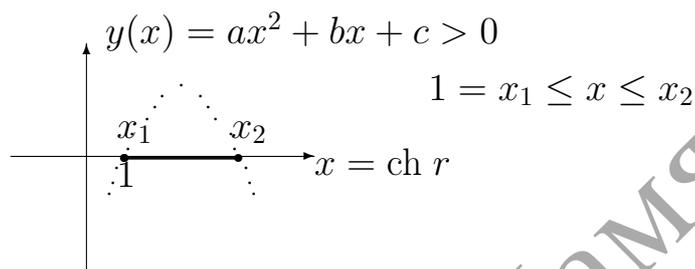


Рисунок 13.2 – Конечное движение

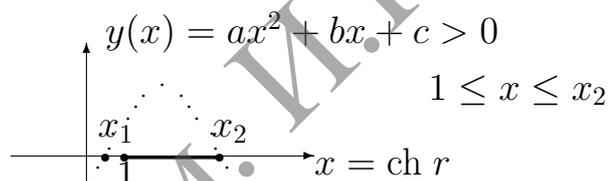


Рисунок 13.3 – Конечное движение

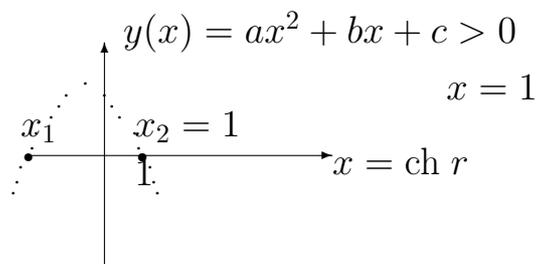


Рисунок 13.4 – Вырожденный случай ($r = 0$)

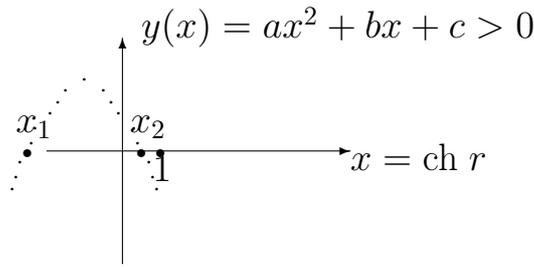


Рисунок 13.5 – Нефизический случай

Три представляющих интерес случая (рисунки 13.1–13.3) можно дополнительно охарактеризовать следующими неравенствами:

Рисунок 13.1 : $b > -2a, a + b + c < 0 \implies$

$$BI + A > 0, \quad -I^2 < 0;$$

Рисунок 13.2 : $b > -2a, a + b + c = 0 \implies$

$$BI + A > 0, \quad -I^2 = 0;$$

Рисунок 13.3 : $a + b + c > 0 \implies -I^2 > 0. \quad (13.6.6c)$

Только рисунки 13.1 и 13.2 соответствуют реальным возможным движениям. Интеграл (13.6.5) при этом равен:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x_1 < x < x_2. \quad (13.6.6d)$$

Соответственно, уравнение (13.6.3) дает

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2a \operatorname{ch} r - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon t} \right)$$

или

$$\frac{-2a \operatorname{ch} r - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \sin \left[\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{A}} \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon t} \right) \right]. \quad (13.6.7a)$$

Как и следовало ожидать, переменная $\operatorname{ch} r$ изменяется в конечном интервале:

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \leq \operatorname{ch} r \leq \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} = x_2$$

или (см. рисунок 13.1)

$$A < B^2, \quad BI + A > 0,$$

$$\frac{2B(I+B) - \sqrt{4A[(I+B)^2 + A - B^2]}}{-2(A - B^2)} \leq \operatorname{ch} r,$$

$$\operatorname{ch} r \leq \frac{2B(I+B) + \sqrt{4A[(I+B)^2 + A - B^2]}}{-2(A - B^2)}. \quad (13.6.7b)$$

При $I = 0$ имеем более простые соотношения (см. рисунок 13.2):

$$A < B^2, \quad A > 0, \quad 1 \leq \operatorname{ch} r \leq \frac{B^2 + A}{B^2 - A}. \quad (13.6.7c)$$

Следует обратить внимание на то, что при

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{или} \quad B^2 - A = (I+B)^2 \quad (13.6.8a)$$

движение внутри интервала $[x_1, x_2]$ согласно (13.6.7a) вырождается в движение с фиксированным значением радиальной координаты $r = r_0$:

$$-2a \operatorname{ch} r_0 - b = 0 \quad \implies$$

$$\operatorname{ch} r_0 = \frac{b}{-2a} = \frac{2B(I+B)}{2(B^2 - A)} = \frac{B}{I+B}, \quad (13.6.8b)$$

что совпадает с выражением для $\operatorname{ch} r_0$ в (13.5.16).

ИНФИНИТНЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ($a > 0$)

Один специальный случай таких движений возникает при $a = A - B^2 = 0$. Действительно,

$$L = \int \frac{dx}{\sqrt{bx+c}} = \frac{2}{b} \sqrt{bx+c},$$

$$x = \operatorname{ch} r \geq \frac{-c}{b}, \quad b > 0,$$

$$-\frac{c}{b} = \frac{B^2 + (I+B)^2}{2B(I+B)} \geq +1 \iff B(I+B) > 0, \quad (13.6.9a)$$

что соответствует инфинитному радиальному движению

$$\frac{2}{\sqrt{b}} \sqrt{\operatorname{ch} r + \frac{c}{b}} = \pm \frac{1}{\sqrt{B^2}} \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{B^2}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon t} \right),$$

$$t = 0 \iff \operatorname{ch} r = -\frac{c}{b}. \quad (13.6.9b)$$

Теперь рассмотрим другие возможности для реализации инфинитного радиального движения, которые возникают при $a > 0$. При этом корни x_1, x_2 определяются равенствами:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a > 0. \quad (13.6.10a)$$

Здесь необходимое неравенство $b^2 - 4ac > 0$ сводится к

$$(I + B)^2 + (A - B^2) = (I + B)^2 + a > 0, \quad (13.6.10b)$$

что выполняется тождественно.

Вообще говоря, при ограничениях (13.6.10a), (13.6.10b) могли бы реализовываться разные случаи (рисунки 13.6–13.10).

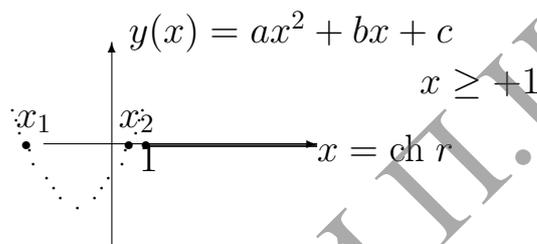


Рисунок 13.6 – Инфинитное движение

$$b + 2a > 0, \quad a + b + c > 0 \quad \Rightarrow \\ BI + A > 0, \quad -I^2 > 0 \quad \text{— НЕВОЗМОЖНО};$$

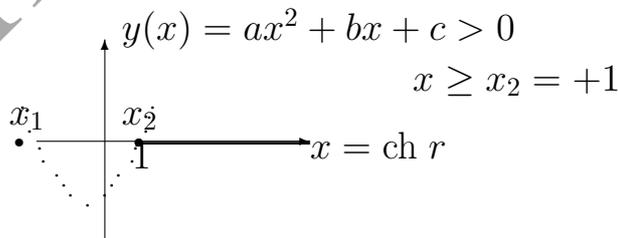
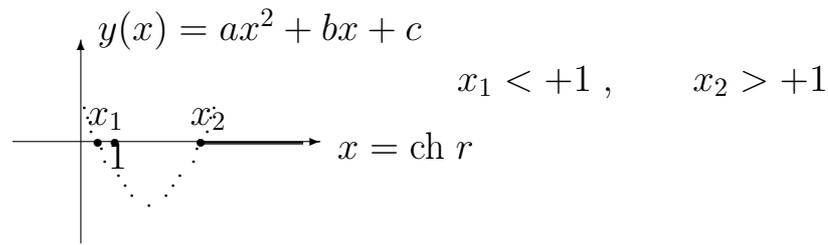


Рисунок 13.7 – Инфинитное движение

$$b + 2a > 0, \quad a + b + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$BI + A > 0, \quad -I^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A > 0, \quad I = 0 \quad - \text{ВОЗМОЖНО};$$



$$a + b + c < 0 \quad \Rightarrow \quad -I^2 < 0 \quad - \text{ВОЗМОЖНО.}$$

Рисунок 13.8 – Инфинитное движение

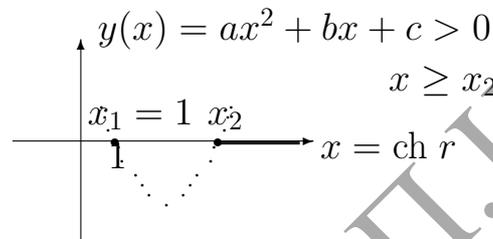


Рисунок 13.9 – Инфинитное движение

$$2a + b < 0, \quad a + b + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$BI + A < 0, \quad -I^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A < 0, \quad I = 0 \quad - \text{НЕВОЗМОЖНО};$$

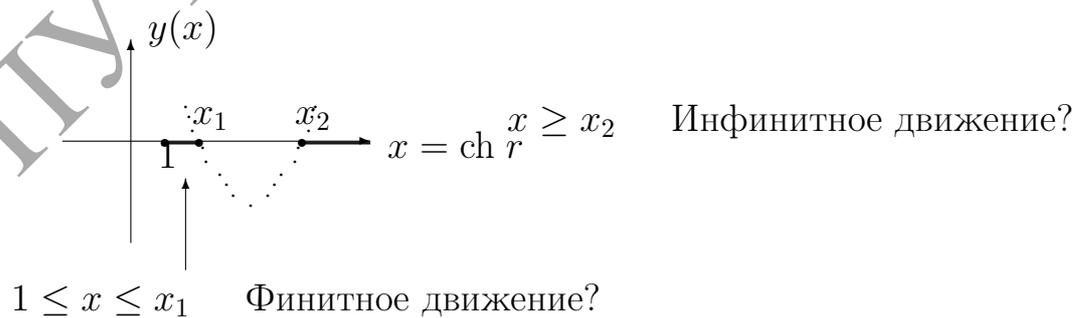


Рисунок 13.10 – Нефизический случай

В связи с рисунком 13.10 необходимо исследовать следующее неравенство:

$$x_1 > 1 \quad \Rightarrow \quad -b > \sqrt{b^2 - 4ac} + 2a.$$

Оно эквивалентно к невыполнимому неравенству $(c - a) > + \sqrt{b^2 - 4ac}$.

Таким образом, только рисунки 13.7 и 13.8 соответствуют физически возможным движениям. Интегрирование в (13.6.5) сводится к элементарному вычислению:

$$L = \int \frac{dx}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arcch} \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Следовательно, уравнение (13.6.3) дает:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arcch} \frac{2a \operatorname{ch} r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon t} \right) \quad (13.6.11a)$$

или (см. рисунок 13.10)

$$\frac{2a \operatorname{ch} r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}} \operatorname{arth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon t} \right) \right). \quad (13.6.11b)$$

Очевидно, уравнение (13.6.11b) приводит к

$$\operatorname{ch} r > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b > -2a \quad \text{или}$$

$$\operatorname{ch} r > \frac{-2B(I + B) + \sqrt{4A[(I + B)^2 + (A - B^2)]}}{2(A - B^2)},$$

$$A + IB > 0, \quad B^2 < A,$$

откуда при $I = 0$ следует (см. рисунок 13.7)

$$\operatorname{ch} r > +1, \quad A > 0.$$

13.7 Уравнение для траектории в форме $F(r, z) = 0$, модель H_3

Рассмотрим уравнение траектории в форме $F(r, z) = 0$ согласно (13.5.13d):

$$\int \frac{\operatorname{sh} r \, dr}{\sqrt{A \operatorname{sh}^2 r - (I - B \operatorname{ch} r + B)^2}} = \pm \int \frac{1}{\operatorname{ch} z} \frac{dz}{\sqrt{\epsilon \operatorname{ch}^2 z - A}}.$$

Правая часть равна (есть две разные возможности):

$$I. \quad \epsilon > A, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad R = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arsch} \sqrt{\frac{A}{\epsilon - A}} \operatorname{th} z;$$

$$II. \quad \epsilon < A, \quad \text{sh}^2 z > \frac{A - \epsilon}{\epsilon}, \quad R = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arcch} \sqrt{\frac{A}{A - \epsilon}} \text{th } z. \quad (13.7.1)$$

Левая часть равна (также имеется две разные возможности):

$$(a) \quad (B^2 > A, \text{ финитное дв-е}) \quad L = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2a \text{ch } r - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}};$$

$$(b) \quad (B^2 \leq A, \text{ инфинитное дв-е}) \quad L = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arcch} \frac{2a \text{ch } r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad (13.7.2)$$

Следовательно, траектории вида $F(r, z)$ описываются уравнениями (4 случая):

малое поперечное движение, сильное магнитное поле

$$(Ia) \quad \epsilon > A, \quad B^2 > A, \quad (I + B)^2 > B^2 - A, \\ z \in (-\infty, +\infty), \quad r \in (r_1, r_2), \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2a \text{ch } r - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arcsh} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon - A}} \text{th } z \right);$$

большое поперечное движение, сильное магнитное поле

$$(IIa) \quad \epsilon < A, \quad B^2 > A, \quad (I + B)^2 > B^2 - A, \\ \text{sh}^2 z > \frac{A}{\epsilon} - 1, \quad r \in (r_1, r_2), \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2a \text{ch } r - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arcch} \left(\sqrt{\frac{A}{A - \epsilon}} \text{th } z \right);$$

малое поперечное движение, слабое магнитное поле

$$(Ib) \quad \epsilon > A, \quad B^2 \leq A, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad r \in (r_1, \infty), \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arcch} \frac{2a \text{ch } r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arcsh} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon - A}} \text{th } z \right);$$

большое поперечное движение, слабое магнитное поле

$$(IIb) \quad \epsilon < A, \quad B^2 \leq A, \quad \text{sh}^2 z > \frac{A}{\epsilon} - 1, \quad r \in (r_1, \infty), \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arcch} \frac{2a \text{ch } r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arcch} \left(\sqrt{\frac{A}{A - \epsilon}} \text{th } z \right). \quad (13.7.3)$$

13.8 Уравнение траектории $F(r, \phi) = 0$, роль поперечных лоренцевских $SO(3, 1)$ сдвигов в пространстве Лобачевского

Рассмотрим уравнение траектории в форме (13.5.13e):

$$\int \frac{[(I + B) - B \operatorname{ch} r] dr}{\operatorname{sh} r \sqrt{A \operatorname{sh}^2 r - [(I + B) - B \operatorname{ch} r]^2}} = \phi. \quad (13.8.1a)$$

В новой переменной

$$u = \frac{(I + B) \operatorname{ch} r - B}{\operatorname{sh} r},$$

$$-\operatorname{sh}^2 r du = [(I + B) - B \operatorname{ch} r] dr \quad (13.8.1b)$$

интеграл из (13.8.1a) принимает вид:

$$L = - \int \frac{du}{\sqrt{A - \frac{[(I+B) - B \operatorname{ch} r]^2}{\operatorname{sh}^2 r}}}.$$

Учитывая тождество

$$(I + B)^2 - B^2 - u^2 = \frac{[(I + B) - B \operatorname{ch} r]^2}{\operatorname{sh}^2 r},$$

приходим к следующему представлению интеграла:

$$L = - \int \frac{du}{\sqrt{[(A - B^2) + (I + B)^2] - u^2}}. \quad (13.8.1c)$$

Необходимо требовать выполнения неравенства

$$[(A - B^2) + (I + B)^2] - u^2 > 0. \quad (13.8.2a)$$

Оно может быть преобразовано к виду

$$(A - B^2) \operatorname{ch}^2 r + 2B(I + B) \operatorname{ch} r - A - (I + B)^2 > 0$$

или

$$x = \operatorname{ch} r, \quad ax^2 + bx + c > 0. \quad (13.8.2b)$$

Следовательно, весь анализ, выполненный в разделе **13.6**, применим и здесь. В частности, нужно вспомнить о необходимом условии:

$$b^2 - 4ac = 4A [(I + B)^2 + (A - B^2)] \geq 0 \implies$$

$$[(I + B)^2 + (A - B^2)] = C^2 > 0.$$

Интеграл (13.8.1c) равен

$$L = \arccos \frac{u}{C} = \arccos \frac{(I+B) \operatorname{ch} r - B}{\operatorname{sh} r \sqrt{(I+B)^2 + (A-B^2)}};$$

соответственно общее уравнение (13.8.1a) для траектории $F(r, \phi) = 0$ принимает следующий явный вид:

$$\arccos \frac{(I+B) \operatorname{ch} r - B}{\sqrt{(I+B)^2 + (A-B^2)} \operatorname{sh} r} = \phi \quad (13.8.3a)$$

или

$$(I+B) \operatorname{ch} r - \sqrt{(I+B)^2 + (A-B^2)} \operatorname{sh} r \cos \phi = B. \quad (13.8.3b)$$

В частности, когда

$$A \neq 0, \quad b^2 - 4ac = 4A [(I+B)^2 + (A-B^2)] = 0,$$

уравнение (13.8.3b) принимает вид:

$$(I+B) \operatorname{ch} r = B, \quad (13.8.3c)$$

что отвечает движению с фиксированным значением радиальной координаты согласно (13.5.16).

Можно предположить, что уравнение (13.8.3b) при $B^2 > A$ будет описывать движение по окружности фиксированного радиуса с центром, смещенным в пространстве Лобачевского на некоторую величину.

Чтобы убедиться в этом, введем две системы координат в пространстве Лобачевского:

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \cos \phi, & u_2 &= \operatorname{ch} z \operatorname{sh} r \sin \phi, \\ u_3 &= \operatorname{sh} z, & u_0 &= \operatorname{ch} z \operatorname{ch} r \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u'_1 &= \operatorname{ch} z' \operatorname{sh} r' \cos \phi', & u'_2 &= \operatorname{ch} z' \operatorname{sh} r' \sin \phi', \\ u'_3 &= \operatorname{sh} z', & u'_0 &= \operatorname{ch} z' \operatorname{ch} r', \end{aligned}$$

связанные "лоренцевским" сдвигом в плоскости (0-1):

$$\begin{vmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \beta & \operatorname{sh} \beta & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} \beta & \operatorname{ch} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}. \quad (13.8.4a)$$

Уравнения (13.8.4a) дают следующее преобразование цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} z' &= z, & \text{sh } r' \sin \phi' &= \text{sh } r \sin \phi, \\ \text{sh } r' \cos \phi' &= \text{sh } \beta \text{ch } r + \text{ch } \beta \text{sh } r \cos \phi, \\ \text{ch } r' &= \text{ch } \beta \text{ch } r + \text{sh } \beta \text{sh } r \cos \phi. \end{aligned} \quad (13.8.4b)$$

В частности, смещенная окружность $r' = r'_0$ будет описываться в координатах (r, ϕ) уравнением

$$\text{ch } \beta \text{ch } r + \text{sh } \beta \text{sh } r \cos \phi = \text{ch } r'_0. \quad (13.8.4c)$$

Это уравнение можно сопоставить с уравнением (13.8.3b):

$$(I + B) \text{ch } r - \sqrt{(I + B)^2 - (A - B^2)} \text{sh } r \cos \phi = B,$$

переписанным так (для простоты пусть B и $I + B$ положительны):

$$\frac{(I + B)}{\sqrt{B^2 - A}} \text{ch } r - \frac{\sqrt{(I + B)^2 - (A - B^2)}}{\sqrt{B^2 - A}} \text{sh } r \cos \phi = \frac{B}{\sqrt{B^2 - A}}. \quad (13.8.4d)$$

Уравнения (13.8.4c) и (13.8.4d) совпадают, если параметр β и радиус смещенной окружности r'_0 определяются равенствами:

$$\text{sh } \beta = -\frac{\sqrt{(I + B)^2 - (A - B^2)}}{\sqrt{B^2 - A}}, \quad \text{ch } r'_0 = \frac{B}{\sqrt{B^2 - A}}. \quad (13.8.4e)$$

Обратимся снова к общему уравнению для траектории $F(r, \phi) = 0$:

$$(I + B) \text{ch } r - \sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)} \text{sh } r \cos \phi = B \quad (13.8.5a)$$

и исследуем поведение этого уравнения относительно сдвигов $(0 - 1)$ (см. (13.8.4b)):

$$\begin{aligned} \text{sh } r \sin \phi &= \text{sh } r' \sin \phi', \\ \text{sh } r \cos \phi &= -\text{sh } \beta \text{ch } r' + \text{ch } \beta \text{sh } r' \cos \phi', \\ \text{ch } r &= \text{ch } \beta \text{ch } r' - \text{sh } \beta \text{sh } r' \cos \phi'. \end{aligned} \quad (13.8.5b)$$

Уравнение (13.8.5a) $F(r, \phi) = 0$ после преобразования к координатам (r', ϕ') принимает вид:

$$\begin{aligned} &(I + B) [\text{ch } \beta \text{ch } r' - \text{sh } \beta \text{sh } r' \cos \phi'] - \\ &- \sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)} [-\text{sh } \beta \text{ch } r' + \text{ch } \beta \text{sh } r' \cos \phi'] = B \end{aligned}$$

или

$$\left[\text{ch } \beta (I + B) + \text{sh } \beta \sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)} \right] \text{ch } r' -$$

$$- \left[\operatorname{sh} \beta (I + B) + \operatorname{ch} \beta \sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)} \right] \operatorname{sh} r' \cos \phi' = B. \quad (13.8.5c)$$

Сравнивая (13.8.5c) и (13.8.5a), заключаем, что они имеют один и тот же инвариантный вид, если две простые комбинации параметров преобразуются относительно лоренцевских сдвигов согласно ⁵:

$$\begin{aligned} I' + B &= \operatorname{ch} \beta (I + B) + \operatorname{sh} \beta \sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)}, \\ \sqrt{(I' + B)^2 + (A' - B^2)} &= \operatorname{sh} \beta (I + B) + \operatorname{ch} \beta \sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)}. \end{aligned} \quad (13.8.6a)$$

Эти лоренцевские сдвиги в параметрическом пространстве оставляют инвариантной следующую комбинацию параметров:

$$\operatorname{inv} = (I + B)^2 - \left(\sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)} \right)^2 \implies A' = A. \quad (13.8.6b)$$

Это означает, что данные преобразования меняют только один параметр I , оставляя неизменным параметр A .

Имеет смысл ввести новые параметры J, C :

$$\begin{aligned} J &= I + B, & C &= \sqrt{(I + B)^2 + (A - B^2)} = \\ & & &= \sqrt{I^2 + 2IB + A}, \end{aligned} \quad (13.8.7a)$$

тогда

$$J' = \operatorname{ch} \beta J + \operatorname{sh} \beta C, \quad C' = \operatorname{sh} \beta J + \operatorname{ch} \beta C. \quad (13.8.7b)$$

Инвариантная форма траектории $F(r, \phi) = 0$ представляется в виде:

$$J \operatorname{ch} r - C \operatorname{sh} r \cos \phi = B; \quad (13.8.8a)$$

в любой другой сдвинутой системе координат она имеет вид:

$$J' \operatorname{ch} r' - C' \operatorname{sh} r' \cos \phi' = B. \quad (13.8.8b)$$

Соответственно, основной инвариант равен:

$$\operatorname{inv} = J^2 - C^2 = B^2 - A. \quad (13.8.8c)$$

В зависимости от знака этого инварианта можно упростить это уравнение специальным подбором лоренцевского сдвига:

⁵Ниже мы покажем, что магнитное поле инвариантно относительно этих сдвигов: $B' = B$.

1) $B^2 - A > 0$ (финитное движение):

$$J_0^2 = B^2 - A, \quad C_0 = 0,$$

уравнение траектории упрощается: $J_0 \operatorname{ch} r = B$;

(13.8.9a)

2) $B^2 - A < 0$ (инфинитное движение):

$$J_0 = 0, \quad C_0^2 = -(B^2 - A),$$

уравнение траектории упрощается: $-C_0 \operatorname{sh} r \cos \phi = B$.

(13.8.9b)

Существует особый случай (по релятивистской терминологии это случай изотропного интервала).

3) $B^2 = A$ (инфинитное движение):

$$J = I + B, \quad C = I + B,$$

уравнение траектории: $\operatorname{ch} r - \operatorname{sh} r \cos \phi = \frac{B}{I + B}$.

(13.8.9c)

Из соображений симметрии понятно, что сдвиги типа (0 – 2) будут проявлять себя аналогично.

13.9 Частица в магнитном поле в сферическом пространстве

В работе [55] под номером XI приведена следующая система координат:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \rho^2 [\cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) + dz^2],$$

$$z \in [-\pi/2, +\pi/2], \quad r \in [0, +\pi], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad (13.9.1)$$

$$u^1 = \cos z \sin r \cos \phi, \quad u^2 = \cos z \sin r \sin \phi,$$

$$u^3 = \sin z, \quad u^0 = \cos z \cos r,$$

$$(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = 1. \quad (13.9.2)$$

Все координаты обезразмерены делением на радиус кривизны пространства Римана ρ .

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах легко можно обобщить и на случай пространства Римана S_3 . Действительно, введем в цилиндрических координатах пространства (13.9.1) электромагнитное поле с потенциалом (помним о соглашении (13.2.1b)):

$$A_\phi = -2B \sin^2 \frac{r}{2} = B (\cos r - 1). \quad (13.9.3a)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора:

$$F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = B \sin r, \quad (13.9.3b)$$

которая удовлетворяет уравнениям Максвелла в сферическом пространстве:

$$\frac{1}{\cos^2 z \sin r} \frac{\partial}{\partial r} \cos^2 z \sin r \left(\frac{1}{\cos^4 z \sin^2 r} \right) B \sin r \equiv 0.$$

Будем рассматривать уравнения движения (13.1.7b) в магнитном поле (13.9.3b) в пространстве Римана S_3 . Координаты нумеруем так: $(x^1, x^2, x^3) = (r, \phi, z)$; при этом составляющие магнитного поля B^i , отвечающего тензору (13.9.3b), задаются равенствами:

$$\begin{aligned} B^1 = -F^{23} = -F^{\phi z} = 0, \quad B^2 = -F^{31} = -F^{zr} = 0, \\ B^3 = -F^{12} = F^{\phi r} = g^{\phi\phi} g^{rr} F_{\phi r} = \frac{B}{\cos^4 z \sin r}. \end{aligned} \quad (13.9.4)$$

Уравнения движения (13.1.7b) принимают в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + \Gamma^r_{jk} V^j V^k &= F^{r0} + F^{r\phi} V_\phi + eF^{rz} V_z, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + \Gamma^\phi_{jk} V^j V^k &= F^{\phi 0} + F^{\phi r} V_r + F^{\phi z} V_z, \\ \frac{dV^z}{dt} + \Gamma^z_{jk} V^j V^k &= F^{z0} + F^{zr} V_r + F^{z\phi} V_\phi. \end{aligned} \quad (13.9.5)$$

При отсутствии электрического поля с учетом (13.9.4) получаем более простые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + \Gamma^r_{jk} V^j V^k &= F^{r\phi} V_\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + \Gamma^\phi_{jk} V^j V^k &= F^{\phi r} V_r, \\ \frac{dV^z}{dt} + \Gamma^z_{jk} V^j V^k &= 0. \end{aligned} \quad (13.9.6)$$

Исходя из метрического тензора

$$\begin{aligned} g_{rr} &= -\cos^2 z, & g_{\phi\phi} &= -\cos^2 z \sin^2 r, & g_{zz} &= -1, \\ g^{rr} &= -\cos^{-2} z, & g^{\phi\phi} &= -\cos^{-2} z \sin^{-2} r, & g^{zz} &= -1, \end{aligned}$$

вычисляем символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{jk} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\operatorname{tg} z \\ 0 & -\sin r \cos r & 0 \\ -\operatorname{tg} z & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \Gamma^\phi_{jk} &= \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{ctg} r & 0 \\ \operatorname{ctg} r & 0 & -\operatorname{tg} z \\ 0 & -\operatorname{tg} z & 0 \end{vmatrix}, \\ \Gamma^z_{jk} &= \begin{vmatrix} \sin z \cos z & 0 & 0 \\ 0 & \sin z \cos z \sin^2 r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (13.9.7)$$

Теперь можно найти явный вид уравнений движения:

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} - 2\operatorname{tg} z V^r V^z - \sin r \cos r V^\phi V^\phi &= B \frac{\sin r}{\cos^2 z} V^\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + 2 \operatorname{ctg} r V^\phi V^r - 2 \operatorname{tg} z V^\phi V^z &= -B \frac{1}{\cos^2 z \sin r} V^r, \\ \frac{dV^z}{dt} + \sin z \cos z V^r V^r + \sin z \cos z \sin^2 r V^\phi V^\phi &= 0. \end{aligned} \quad (13.9.8)$$

Последнее уравнение в (13.9.8) указывает на то, что вдоль оси z эффективно действует сила притяжения к центру с обеих сторон от $z = 0$:

$$z > 0, \quad a^z = \frac{dV^z}{dt} < 0; \quad z < 0, \quad a^z = \frac{dV^z}{dt} > 0. \quad (13.9.9)$$

Принимая во внимание явный вид решения в плоском пространстве и выполненный выше анализ в пространстве Лобачевского, можно пытаться искать простейшее решение, отвечающее некоторому неравномерному наматыванию траектории частицы на цилиндрическую поверхность постоянного радиуса (ориентированной вдоль оси z).

13.10 Построение простейших решений в пространстве Римана

Будем искать решение, вводя дополнительное условие:

$$r = r_0 = \operatorname{const}, \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t).$$

Система уравнений (13.9.8) принимает вид:

$$V^\phi = -\frac{B}{\cos r_0} \frac{1}{\cos^2 z},$$

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{B}{\cos r_0} \frac{1}{\cos^2 z} \right) - 2 \operatorname{tg} z \left(-\frac{B}{\cos r_0} \frac{1}{\cos^2 z} \right) V^z = 0,$$

$$\frac{dV^z}{dt} = -(\operatorname{tg}^2 r_0 B^2) \frac{\sin z}{\cos^3 z}; \quad (13.10.1)$$

причем второе уравнение имеет вид тождества $0 \equiv 0$. Вводим обозначения:

$$\alpha = -\frac{B}{\cos r_0}, \quad A = (\operatorname{tg}^2 r_0 B^2);$$

задача сводится к двум уравнениям:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{\cos^2 z}, \quad \frac{dV^z}{dt} = -A \frac{\sin z}{\cos^3 z}. \quad (13.10.2)$$

Можно легко понизить степень второго уравнения:

$$d(V^z)^2 = A d\left(-\frac{1}{\cos^2 z}\right) \implies \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\frac{A}{\cos^2 z} + \epsilon; \quad (13.10.3)$$

позже покажем, что постоянная ϵ связана с интегралом движения — энергией.

Решим это уравнение, сначала принимая $A \neq \epsilon$:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\epsilon \cos^2 z - A}}{\cos z}, \quad \frac{d \sin z}{\sqrt{\epsilon - A - \epsilon \sin^2 z}} = dt. \quad (13.10.4)$$

Смысл знаков \pm понятен: они соответствуют движению вдоль z в противоположные стороны. Дальнейшие вычисления не требуют пояснений (обратим внимание, что в отличие от случая пространства Лобачевского здесь может реализоваться только ситуация, когда $\epsilon > A$):

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \arcsin \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{B}} x = t - t_0.$$

Закон изменения координаты z от времени t установлен (пусть $t_0 = 0$):

$$A \neq \epsilon, \quad \sin z(t) = \pm \frac{\sqrt{\epsilon - A}}{\sqrt{\epsilon}} \sin \sqrt{\epsilon} t;$$

$$z(t=0) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = \pm \sqrt{\epsilon - A}. \quad (13.10.5)$$

Отметим, что при $\epsilon = A$ уравнение (13.10.3) примет вид:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\epsilon \operatorname{tg}^2 z. \quad (13.10.6)$$

У этого уравнения есть единственное и тривиальное решение:

$$z(t) = 0 \quad \implies \quad \phi(t) = \phi_0 + \alpha t, \quad \alpha = -\frac{B}{\operatorname{ch} r_0}. \quad (13.10.7)$$

Оно отвечает вращению с постоянной угловой скоростью по линии $r = r_0$ при отсутствии какого-либо движения вдоль оси z .

Теперь следует вернуться к первому уравнению в (13.10.2) и найти зависимость $\phi(t)$:

$$A \neq \epsilon, \quad \phi - \phi_0 = \alpha \int \frac{dt}{\cos^2 z} = \alpha \int \frac{dt}{\cos^2 \sqrt{\epsilon} t + \frac{A}{\epsilon} \sin^2 \sqrt{\epsilon} t}.$$

Дальнейшие вычисления не требуют пояснений:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{\epsilon} t = y, \quad \phi - \phi_0 &= \alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int \frac{dy}{1 + \frac{A}{\epsilon} y^2}, \\ A \neq \epsilon, \quad \phi - \phi_0 &= \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{tg} \sqrt{\epsilon} t \right). \end{aligned} \quad (13.10.8)$$

Таким образом, найдено следующее решение задачи о частице в магнитном поле в сферическом пространстве Римана:

$$\begin{aligned} r = r_0 = \operatorname{const}, \\ A \neq \epsilon, \quad \sin z(t) &= \pm \frac{\sqrt{\epsilon - A}}{\sqrt{\epsilon}} \sin \sqrt{\epsilon} t, \\ \phi - \phi_0 &= \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{tg} \sqrt{\epsilon} t \right). \end{aligned} \quad (13.10.9)$$

Характерным свойством этого движения является его периодичность и замкнутость траекторий. Период T определяется равенством

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon}} \quad (13.10.10a)$$

или в обычных единицах

$$T = \frac{\pi \rho}{V} = \frac{\pi \rho}{\sqrt{2E/m}}. \quad (13.10.10b)$$

13.11 Интеграл движения – энергия – в пространстве S_3

Исходя из системы уравнений в пространстве Римана:

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} + 2\Gamma^r_{rz} V^r V^z + \Gamma^r_{\phi\phi} V^\phi V^\phi &= F^{r\phi} V_\phi, \\ \frac{dV^\phi}{dt} + 2\Gamma^\phi_{\phi r} V^\phi V^r + 2\Gamma^\phi_{\phi z} V^\phi V^z &= F^{\phi r} V_r, \end{aligned}$$

$$\frac{dV^z}{dt} + \Gamma^z_{rr} V^r V^r + \Gamma^z_{\phi\phi} V^\phi V^\phi = 0, \quad (13.11.1)$$

получим выражение для сохраняющейся величины – энергии. Для этого уравнения из (13.11.1) умножим соответственно на:

$$g_{rr}(z)V^r = V_r, \quad g_{\phi\phi}(r, z)V^\phi = V_\phi, \quad g_{zz}V^z = V_z$$

и результаты сложим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g_{rr} V^r V^r + g_{\phi\phi} V^\phi V^\phi + g_{zz} V^z V^z) - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{rr} \right) V^r V^r - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{\phi\phi} \right) V^\phi V^\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{zz} \right) V^z V^z \Big] + \\ & + (2\Gamma^r_{rz} V_r V^r V^z + \Gamma^r_{\phi\phi} V_r V^\phi V^\phi) + (2\Gamma^\phi_{\phi r} V_\phi V^\phi V^r + 2\Gamma^\phi_{\phi z} V_\phi V^\phi V^z) + \\ & + (\Gamma^z_{rr} V_z V^r V^r + \Gamma^z_{\phi\phi} V_z V^\phi V^\phi) \equiv 0. \end{aligned} \quad (13.11.2)$$

Учитывая явные выражения для символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned} 2\Gamma^r_{rz} &= g^{rr} \partial_z g_{rr}, & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\phi\phi}, \\ 2\Gamma^\phi_{\phi r} &= g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi}, & 2\Gamma^\phi_{\phi z} &= g^{\phi\phi} \partial_z g_{\phi\phi}, \\ \Gamma^z &= -\frac{1}{2} g^{zz} \partial_z g_{rr}, & \Gamma^z_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} g^{zz} \partial_z g_{\phi\phi}, \end{aligned} \quad (13.11.3)$$

получаем

$$\begin{aligned} 2\Gamma^r_{rz} V_r V^r V^z + \Gamma^z_{rr} V_z V^r V^r &= +\frac{1}{2} V^r V^r V^z \partial_z g_{rr}, \\ \Gamma^r_{\phi\phi} V_r V^\phi V^\phi + 2\Gamma^\phi_{\phi r} V_\phi V^\phi V^r &= +\frac{1}{2} V^r V^\phi V^\phi \partial_r g_{\phi\phi}, \\ 2\Gamma^\phi_{\phi z} V_\phi V^\phi V^z + \Gamma^z_{\phi\phi} V_z V^\phi V^\phi &= +\frac{1}{2} V^\phi V^\phi V^z \partial_z g_{\phi\phi}. \end{aligned} \quad (13.11.4)$$

Следовательно, (13.11.2) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g_{rr} V^r V^r + g_{\phi\phi} V^\phi V^\phi + g_{zz} V^z V^z) - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{rr} \right) V^r V^r - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{\phi\phi} \right) V^\phi V^\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{zz} \right) V^z V^z \Big] + \\ & + \frac{1}{2} V^r V^r V^z \partial_z g_{rr} + \frac{1}{2} V^r V^\phi V^\phi \partial_r g_{\phi\phi} + \frac{1}{2} V^\phi V^\phi V^z \partial_z g_{\phi\phi} = 0. \end{aligned} \quad (13.11.5)$$

Учитывая равенства:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{rr} \right) = -\frac{1}{2} (\partial_z g_{rr}) V^z, \quad -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} g_{zz} \right) = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}g_{\phi\phi}\right) = -\frac{1}{2}(\partial_r g_{\phi\phi})V^r + (\partial_z g_{\phi\phi})V^z,$$

уравнение (13.11.5) запишется так:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} (g_{rr}V^rV^r + g_{\phi\phi}V^\phi V^\phi + g_{zz}V^zV^z) = 0. \quad (13.11.6)$$

Следовательно, в пространстве Римана в присутствии внешнего магнитного поля сохраняющаяся величина – энергия – имеет вид:

$$E = \frac{1}{2}m\rho^2 (-g_{rr}V^rV^r - g_{\phi\phi}V^\phi V^\phi - g_{zz}V^zV^z). \quad (13.11.7a)$$

В явном виде энергия в цилиндрических координатах равна (пусть $\epsilon = 2E/m\rho^2$):

$$\cos^2 z V^rV^r + \cos^2 z \sin^2 r V^\phi V^\phi + V^zV^z = \epsilon. \quad (13.11.7b)$$

Этим соотношением мы воспользовались при анализе уравнений в разделе 13.10.

13.12 Частица в магнитном поле и лагранжев формализм в S_3

Рассмотрим задачу о частице в магнитном поле в пространстве S_3 , используя лагранжев формализм. Лагранжиан системы равен:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (-g_{ik}V^iV^k) - \frac{e}{c} g_{ik}A^iV^k = \\ &= \frac{m}{2} (\cos^2 z V^rV^r + \cos^2 z \sin^2 r V^\phi V^\phi + V^zV^z) - \frac{e\rho B}{c} (\cos r - 1)V^\phi. \end{aligned} \quad (13.12.1)$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^r} = \frac{\partial L}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^\phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^z} = \frac{\partial L}{\partial z}$$

принимают вид (в безразмерной форме):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos^2 z V^r &= \cos^2 z \sin r \cos r V^\phi V^\phi + B \sin r V^\phi, \\ \frac{d}{dt} [\cos^2 z \sin^2 r V^\phi - B (\cos r - 1)] &= 0, \\ \frac{d}{dt} V^z &= -\cos z \sin z (V^rV^r + \sin^2 r V^\phi V^\phi) \end{aligned} \quad (13.12.2)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dV^r}{dt} - 2\operatorname{tg} z V^r V^z - \sin r \cos r V^\phi V^\phi &= B \frac{\sin r}{\cos^2 z} V^\phi, \\ \frac{d}{dt} [\cos^2 z \sin^2 r V^\phi - B (\cos r - 1)] &= 0, \\ \frac{d}{dt} V^z &= -\cos z \sin z (V^r V^r + \sin^2 r V^\phi V^\phi), \end{aligned} \quad (13.12.3)$$

что совпадает с уравнениями (13.9.8).

Второе уравнение в (13.12.2) вводит сохраняющую величину

$$I = \cos^2 z \sin^2 r V^\phi - B (\cos r - 1) = \operatorname{const}. \quad (13.12.4)$$

Из лагранжева формализма можно извлечь больше, если воспользоваться фактом существования в данной задаче трех независимых интегралов движения. Действительно, два интеграла движения уже установлены:

$$\begin{aligned} I &= \cos^2 z \sin^2 r V^\phi - B (\cos r - 1), \\ \epsilon &= \cos^2 z (V^r V^r + \sin^2 r V^\phi V^\phi) + V^z V^z. \end{aligned} \quad (13.12.5)$$

Кроме того, воспользовавшись соотношением (13.12.3), легко угадать явный вид третьего интеграла движения:

$$A = \cos^2 z [\epsilon - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2] = \cos^4 z (V^r V^r + \sin^2 r V^\phi V^\phi). \quad (13.12.6)$$

Чтобы убедиться, что величина A действительно сохраняется, достаточно представить выражение для A в виде:

$$A = (\cos^2 z V^r)^2 + \frac{1}{\sin^2 r} (\cos^2 z \sin^2 r V^\phi)^2 \quad (13.12.7)$$

и, учитывая первое и второе уравнения в (13.12.2), представленные как

$$\frac{d}{dt} (\cos^2 z V^r) = \cos^2 z \sin r \cos r V^\phi V^\phi + B \sin r V^\phi,$$

$$\frac{d}{dt} (\cos^2 z \sin^2 r V^\phi) = -B \sin r V^r = 0,$$

можно убедиться в выполнении равенства

$$\frac{dA}{dt} = 0. \quad (13.12.8)$$

Имея три интеграла движения, можно легко в самом общем виде свести решение задачи к вычислению интегралов. Действительно, из (13.12.4) следует:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\cos^2 z} \frac{I + B (\cos r - 1)}{\sin^2 r}. \quad (13.12.9)$$

Подставляем это в (13.12.6):

$$A = \cos^4 z \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{[I + B (\cos r - 1)]^2}{\sin^2 r},$$

откуда следует

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{\cos^2 z} \sqrt{A - \frac{[I + B (\cos r - 1)]^2}{\sin^2 r}}. \quad (13.12.10)$$

В свою очередь, из (13.12.6) находим:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{\cos z} \sqrt{\epsilon \cos^2 z - A}. \quad (13.12.11)$$

Легко в общем виде получить уравнение для траекторий. Для этого достаточно разделить (13.12.10) на (13.12.11):

$$\frac{\sin r \, dr}{\sqrt{A \sin^2 r - (I + B \cos r - B)^2}} = \pm \frac{1}{\cos z} \frac{dz}{\sqrt{\epsilon \cos^2 z - A}}. \quad (13.12.12)$$

Таким образом, в наиболее общем виде решение задачи о частице в магнитном поле на фоне пространства Римана сведено к вычислению следующих интегралов:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\cos^2 z} \frac{I + B (\cos r - 1)}{\sin^2 r}, \quad (13.12.13a)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{\cos^2 z} \sqrt{A - \frac{[I + B (\cos r - 1)]^2}{\sin^2 r}}, \quad (13.12.13b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{\cos z} \sqrt{\epsilon \cos^2 z - A}, \quad (13.12.13c)$$

$$\frac{\sin r \, dr}{\sqrt{A \sin^2 r - (I + B \cos r - B)^2}} = \pm \frac{1}{\cos z} \frac{dz}{\sqrt{\epsilon \cos^2 z - A}}. \quad (13.12.13d)$$

Убедимся, что дополнительное условие $r = r_0 = \text{const}$ совместимо с системой уравнений (13.12.13). Они принимают вид:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{\text{ch}^2 z}, \quad \frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{\cos z} \sqrt{\epsilon \cos^2 z - A},$$

$$\alpha = \frac{I + B (\cos r_0 - 1)}{\sin^2 r_0}, \quad A = \frac{[I + B (\cos r_0 - 1)]^2}{\sin^2 r_0}. \quad (13.12.14)$$

Обращаем внимание на то, что ограничение $r = r_0 = \text{const}$ – это в определенном смысле переход к вырожденному случаю в системе (13.12.14), так как при этом интегрирование по переменной r в общих уравнениях (13.12.13b) и (13.12.13d) становится бессмысленным (в знаменателях появляется ноль). Это означает, что непрерывного перехода в обратную сторону, от общего решения к решениям с $r = r_0 = \text{const}$, нет.

Отметим, что в разделе **13.10** для α и A имели другие выражения:

$$\alpha = -\frac{B}{\cos r_0}, \quad A = (\text{tg}^2 r_0 B^2). \quad (13.12.15)$$

Из тождества $\alpha = \alpha$ получаем:

$$\frac{I + B (\cos r_0 - 1)}{\sin^2 r_0} = -\frac{B}{\cos r_0}, \quad \Rightarrow \quad I = B \frac{\cos r_0 - 1}{\cos r_0} \quad (13.12.16)$$

Подставим в выражение для A из (13.12.14):

$$\begin{aligned} A &= \frac{[I + B (\cos r_0 - 1)]^2}{\sin^2 r_0} = \\ &= \frac{B^2}{\sin^2 r_0} \left[\frac{(\cos r_0 - 1)}{\cos r_0} + (\cos r_0 - 1) \right]^2 = (\text{tg}^2 r_0 B^2), \end{aligned}$$

что совпадает с (13.12.15).

13.13 Общее решение в сферическом пространстве и $SO(4)$ однородность модели S_3

Используя соотношения (13.12.13a)–(13.12.13e), рассмотрим общий случай возможных решений задачи. Пусть $A \neq \epsilon$.

Интегрируем соотношение (13.12.13c):

$$\underline{z = z(t)}, \quad \sin z = \pm \frac{\sqrt{\epsilon - A}}{\sqrt{\epsilon}} \sin \sqrt{\epsilon} t. \quad (13.13.1)$$

Уравнение (13.12.13b) дает:

$$\int \frac{\sin r dr}{\sqrt{A \sin^2 r - (I + B \cos r - B)^2}} = \pm \int \frac{dt}{\cos^2 z}. \quad (13.13.2)$$

Интеграл в правой части уже вычислялся – см. (13.10.8):

$$R = \pm \int \frac{dt}{\cos^2 z} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \text{tg} \sqrt{\epsilon} t \right). \quad (13.13.3)$$

Интеграл в левой части представим в виде

$$\begin{aligned}
 L &= \int \frac{\sin r \, dr}{\sqrt{A(1 - \cos^2 r) - (I + B \cos r - B)^2}} = \\
 &= - \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = - \int \frac{dx}{\sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}}},
 \end{aligned}
 \tag{13.13.4a}$$

где⁶

$$\begin{aligned}
 x &= \cos r, & a &= -A - B^2 < 0, \\
 b &= -2B(I - B), & c &= A - (I - B)^2.
 \end{aligned}
 \tag{13.13.4b}$$

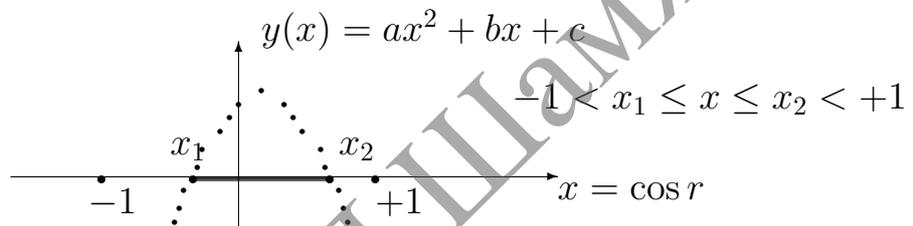


Рисунок 13.11 – Финитное движение

Финитное движение возможно, если удовлетворены неравенства:

$$\begin{aligned}
 a < 0, & \quad b^2 - 4ac > 0, \\
 -1 \leq \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} = x_1 < x < x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \leq +1.
 \end{aligned}
 \tag{13.13.5}$$

Из неравенства

$$b^2 - 4ac = 4A [A + B^2 - (I - B)^2] > 0$$

получаем

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \implies \quad A + B^2 > (I - B)^2. \tag{13.13.6}$$

Из двух оставшихся неравенств находим:

$$-1 \leq x_1 < x_2 \leq +1 \quad \implies$$

⁶Нужно обратить внимание на то, что в сферическом пространстве S_3 всегда выполняется неравенство $a < 0$, что указывает на возможность только финитных движений.

$$b - 2a \geq + \sqrt{b^2 - 4ac}, \quad b + 2a \leq - \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (13.13.7a)$$

Откуда следует соответственно:

$$b - 2a \geq 0, \quad a + c - b \leq 0,$$

$$b + 2a \leq 0, \quad a + c + b \leq 0.$$

Последние соотношения эквивалентны следующим:

$$b - 2a \geq 0, \quad -(I - 2B)^2 \leq 0, \quad (-1 \leq x_1),$$

$$b + 2a \leq 0, \quad -I^2 \leq 0, \quad (x_2 \leq +1).$$

Следовательно, (13.13.7a) выполняются, если

$$2a \leq b \leq -2a \quad \Rightarrow \quad -(A + B^2) \leq -B(I - B) \leq (A + B^2). \quad (13.13.7b)$$

Ограничения на параметры (A, I, B) (см. (13.13.6) и (13.13.7b)) обеспечивают существование финитных движений в пространстве S_3 . При этом интеграл (13.13.4a) равен:

$$L = \int \frac{-dx}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2a \cos r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad (13.13.8)$$

Следовательно, уравнение (13.13.2) принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2a \cos r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon t} \right) \quad (13.13.9a)$$

или

$$\frac{2a \cos r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \sin \left[\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{A}} \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \operatorname{th} \sqrt{\epsilon t} \right) \right]. \quad (13.13.9b)$$

Теперь рассмотрим уравнение (13.12.13d) для траекторий в форме $dF(r, z) = 0$. Его правая часть равна:

$$\pm \int \frac{1}{\cos z} \frac{dz}{\sqrt{\epsilon \cos^2 z - A}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \sqrt{\frac{A}{\epsilon - A}} \operatorname{tg} z. \quad (13.13.10a)$$

Следовательно, оно принимает следующий явный вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2a \cos r + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} - \Lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \sqrt{\frac{A}{\epsilon - A}} \operatorname{tg} z. \quad (13.13.10b)$$

Теперь обратимся к уравнению (13.12.13e) для траектории в форме $dF(r, \phi) = 0$:

$$\int \frac{[I + B(\cos r - 1)] dr}{\sin r \sqrt{A \sin^2 r - [I + B(\cos r - 1)]^2}} = \phi. \quad (13.13.11)$$

Вводим новую переменную:

$$u = \frac{(I - B) \cos r + B}{\sin r}, \quad [(I - B) + B \cos r] dr = -\sin^2 r du. \quad (13.13.12a)$$

Интеграл в (13.13.11) принимает вид:

$$L = - \int \frac{du}{\sqrt{A - [(I - B) + B \cos r]^2 / \sin^2 r}}. \quad (13.13.12b)$$

Учитывая тождество:

$$u^2 = -(I - B)^2 + B^2 + \frac{[(I - B) + B \cos r]^2}{\sin^2 r},$$

приводим его к виду:

$$\begin{aligned} L &= - \int \frac{du}{\sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2 - u^2}} = \\ &= \arccos \frac{(I - B) \cos r + B}{\sin r \sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2}}. \end{aligned} \quad (13.13.12c)$$

Следовательно, (13.13.11) дает уравнение $F(r, \phi) = 0$:

$$(B - I) \cos r + \sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2} \sin r \cos \phi = B. \quad (13.13.13)$$

Рассмотрим поведение этого уравнения относительно сдвигов типа $(0 - 1)$ в сферическом пространстве. Для этого вводим две системы координат в S_3 :

$$u_1 = \cos z \sin r \cos \phi, \quad u_2 = \cos z \sin r \sin \phi,$$

$$u_3 = \sin z, \quad u_0 = \cos z \cos r$$

и

$$u'_1 = \cos z' \sin r' \cos \phi', \quad u'_2 = \cos z' \sin r' \sin \phi',$$

$$u'_3 = \sin z', \quad u'_0 = \cos z' \cos r',$$

связанные евклидовым сдвигом типа $(0 - 1)$:

$$\begin{vmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}. \quad (13.13.14a)$$

Уравнение (13.13.14a) дает следующее преобразование цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} z' &= z, & \sin r' \sin \phi' &= \sin r \sin \phi, \\ \sin r' \cos \phi' &= -\sin \alpha \cos r + \cos \alpha \sin r \cos \phi, \\ \cos r' &= \cos \alpha \cos r + \sin \alpha \sin r \cos \phi \end{aligned} \quad (13.13.14b)$$

и обратное преобразование:

$$\begin{aligned} z &= z', & \sin r \sin \phi &= \sin r' \sin \phi', \\ \sin r \cos \phi &= \sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi', \\ \cos r &= \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'. \end{aligned} \quad (13.13.14c)$$

Преобразуем уравнение (13.13.13) к штрихованным координатам (r', ϕ') :

$$\begin{aligned} &(B - I) [\cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'] + \\ &+ \sqrt{(A + B^2) + (I - B)^2} [\sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi'] = B. \end{aligned}$$

Отсюда после элементарной перегруппировки слагаемых получаем

$$\begin{aligned} &[\cos \alpha (B - I) + \sin \alpha \sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2}] \cos r' + \\ &+ [-\sin \alpha (B - I) + \cos \alpha \sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2}] \sin r' \cos \phi' = B. \end{aligned} \quad (13.13.15)$$

Сравнивая (13.13.15) и (13.13.13), обнаруживаем существование свойства инвариантности исходного уравнения, если параметры преобразуются евклидовым сдвигом в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} B' - I' &= \cos \alpha (B - I) + \sin \alpha \sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2}, \\ \sqrt{(A' + B^2) - (I' - B)^2} &= -\sin \alpha (B - I) + \cos \alpha \sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2}. \end{aligned} \quad (13.13.16)$$

С использованием обозначений:

$$B - I = J, \quad C = \sqrt{(A + B^2) - (I - B)^2} \quad (13.13.17a)$$

уравнение траектории имеет следующий инвариантный вид:

$$J \cos r + C \sin r \cos \phi = B \quad \Longrightarrow$$

$$J' \cos r' + C' \sin r' \cos \phi' = B. \quad (13.13.17b)$$

Относительно поперечных сдвигов $(0-1)$ в пространстве S_3 параметры J, C преобразуются согласно

$$J' = \cos \alpha J + \sin \alpha C,$$

$$C' = -\sin \alpha J + \cos \alpha C. \quad (13.13.17c)$$

Эти сдвиги в параметрическом пространстве оставляют инвариантной следующую комбинацию параметров:

$$\text{inv} = J^2 + C^2 = J'^2 + C'^2 = A + B^2 \quad \Longrightarrow$$

$$A = A' = \text{inv}. \quad (13.13.17d)$$

Специальными сдвигами из этого класса общее уравнение траектории можно свести к одной из двух простых форм:

$$J_0 = \pm \sqrt{A + B^2}, \quad C_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad J_0 \cos r_0 = B; \quad (13.13.18a)$$

$$J_0 = 0, \quad C_0 = \sqrt{A + B^2} \quad \Longrightarrow \quad C_0 \sin r \cos \phi = B. \quad (13.13.18b)$$

13.14 О симметрии магнитного поля в пространстве H_3

Введем в пространстве Лобачевского две системы координат:

$$u_1 = \text{ch } z \text{ sh } r \cos \phi, \quad u_2 = \text{ch } z \text{ sh } r \sin \phi,$$

$$u_3 = \text{sh } z, \quad u_0 = \text{ch } z \text{ ch } r \quad (13.14.1a)$$

и

$$u'_1 = \text{ch } z' \text{ sh } r' \cos \phi', \quad u'_2 = \text{ch } z' \text{ sh } r' \sin \phi',$$

$$u'_3 = \text{sh } z', \quad u'_0 = \text{ch } z' \text{ ch } r', \quad (13.14.1b)$$

связанные сдвигом $(0-1)$:

$$\begin{vmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \beta & \text{sh } \beta & 0 & 0 \\ \text{sh } \beta & \text{ch } \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}. \quad (13.14.2a)$$

Уравнения (13.14.1a) дают следующую связь между двумя наборами цилиндрических координат:

$$\begin{aligned}
(0-1), \quad z' = z, \quad \text{sh } r' \sin \phi' &= \text{sh } r \sin \phi, \\
\text{sh } r' \cos \phi' &= \text{sh } \beta \text{ch } r + \text{ch } \beta \text{sh } r \cos \phi, \\
\text{ch } r' &= \text{ch } \beta \text{ch } r + \text{sh } \beta \text{sh } r \cos \phi
\end{aligned} \tag{13.14.2b}$$

и обратное преобразование:

$$\begin{aligned}
(0-1), \quad z = z', \quad \text{sh } r \sin \phi &= \text{sh } r' \sin \phi', \\
\text{sh } r \cos \phi &= -\text{sh } \beta \text{ch } r' + \text{ch } \beta \text{sh } r' \cos \phi', \\
\text{ch } r &= \text{ch } \beta \text{ch } r' - \text{sh } \beta \text{sh } r' \cos \phi'.
\end{aligned} \tag{13.14.2c}$$

Относительно такой замены переменных $(r, \phi) \Rightarrow (r', \phi')$ однородное магнитное поле преобразуется согласно

$$F_{\phi'r'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi'} \frac{\partial x^\beta}{\partial r'} F_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \frac{\partial r}{\partial r'} - \frac{\partial r}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi}{\partial r'} \right) F_{\phi r}, \quad F_{\phi r} = B \text{sh } r, \tag{13.14.3a}$$

т. е. магнитное поле преобразуется с помощью якобиана:

$$F_{\phi'r'} = J F_{\phi r}, \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial \phi'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r'} & \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \end{vmatrix}, \quad F_{\phi r} = B \text{sh } r. \tag{13.14.3b}$$

Запишем преобразование координат в виде:

$$\begin{aligned}
\phi &= \text{arctg} \left(\frac{\text{sh } r' \sin \phi'}{-\text{sh } \beta \text{ch } r' + \text{ch } \beta \text{sh } r' \cos \phi'} \right) = \text{arctg } A, \\
r &= \text{arcch} (\text{ch } \beta \text{ch } r' - \text{sh } \beta \text{sh } r' \cos \phi') = \text{arcch } B.
\end{aligned} \tag{13.14.4a}$$

Для якобиана имеем представление:

$$J = \frac{1}{\sqrt{B^2 - 1}} \frac{1}{1 + A^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r'} \frac{\partial A}{\partial \phi'} - \frac{\partial B}{\partial \phi'} \frac{\partial A}{\partial r'} \right). \tag{13.14.4b}$$

Учитывая равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{B^2 - 1}} \frac{1}{1 + A^2} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 r - 1}} \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \phi} = \frac{\cos^2 \phi}{\text{sh } r} \tag{13.14.5a}$$

и выражения для производных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial r'} &= \frac{\partial}{\partial r'} (\text{ch } \beta \text{ch } r' - \text{sh } \beta \text{sh } r' \cos \phi') = \\
&= \text{ch } \beta \text{sh } r' - \text{sh } \beta \text{ch } r' \cos \phi',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial \phi'} &= \frac{\partial}{\partial \phi'} (\operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi') = \\
&= \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} r' \sin \phi', \\
\frac{\partial A}{\partial \phi'} &= \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\frac{\operatorname{sh} r' \sin \phi'}{-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi'} \right) = \\
&= \frac{\operatorname{sh} r' (-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r')}{(-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi')^2} = \\
&= \frac{\operatorname{sh} r' (-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r')}{\operatorname{sh}^2 r \cos^2 \phi}, \\
\frac{\partial A}{\partial r'} &= \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{\operatorname{sh} r' \sin \phi'}{-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi'} \right) = \\
&= \frac{-\operatorname{sh} \beta \sin \phi'}{(-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi')^2} = \frac{-\operatorname{sh} \beta \sin \phi'}{\operatorname{sh}^2 r \cos^2 \phi},
\end{aligned} \tag{13.14.5b}$$

для якобиана получаем выражение:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\operatorname{sh} r'}{\operatorname{sh} r} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} \times \\
&\times (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi') (-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r') + \operatorname{sh}^2 \beta \sin^2 \phi'.
\end{aligned} \tag{13.14.5c}$$

Найдем выражения для знаменателя и числителя:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^2 r &= \operatorname{ch}^2 r - 1 = (\operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi')^2 - 1 = \\
&= \operatorname{ch}^2 \beta \operatorname{ch}^2 r' - 2 \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \operatorname{sh} r' \cos \phi' + \operatorname{sh}^2 \beta \operatorname{sh}^2 r' \cos^2 \phi' - 1, \\
(\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi') &(-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r') + \operatorname{sh}^2 \beta \sin^2 \phi' = \\
&= -2 \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \operatorname{sh} r' \cos \phi' + \operatorname{ch}^2 \beta \operatorname{sh}^2 r' + \operatorname{sh}^2 \beta \operatorname{ch}^2 r' \cos^2 \phi' + \operatorname{sh}^2 \beta \sin^2 \phi'.
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что числитель и знаменатель равны друг другу.

Таким образом, якобиан преобразования сдвига $(0-1)$ в пространстве Лобачевского равен:

$$J = \frac{\operatorname{sh} r'}{\operatorname{sh} r}, \tag{13.14.6a}$$

и, следовательно, магнитное поле инвариантно относительно сдвига $(0-1)$ в пространстве Лобачевского:

$$F_{\phi' r'} = J F_{\phi r}, \quad F_{\phi r} = B \operatorname{sh} r, \quad F_{\phi' r'} = B \operatorname{sh} r'. \tag{13.14.6b}$$

Из соображений симметрии понятно, что такая же симметрия будет наблюдаться и для сдвигов типа (0–2). Следует дополнительно рассмотреть сдвиги типа (0–3):

$$\begin{vmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \beta & 0 & 0 & \text{sh } \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \beta & 0 & 0 & \text{ch } \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}. \quad (13.14.7)$$

Уравнения (13.14.1a) дают следующую связь между двумя наборами цилиндрических координат $(r, z) \implies (r', z')$:

$$\begin{aligned} \text{ch } z' \text{ ch } r' &= \text{ch } \beta \text{ ch } z \text{ ch } r + \text{sh } \beta \text{ sh } z, \\ \text{sh } z' &= \text{sh } \beta \text{ ch } z \text{ ch } r + \text{ch } \beta \text{ sh } z, \\ \text{ch } z' \text{ sh } r' &= \text{ch } z \text{ sh } r, \quad \phi' = \phi. \end{aligned} \quad (13.14.8a)$$

Электромагнитное поле преобразуется согласно

$$\begin{aligned} F_{\alpha'\beta'} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial r}{\partial x'^{\beta}} - \frac{\partial r}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\beta}} \right) F_{\phi r}, \quad \implies \\ F_{\phi' r'} &= \frac{\partial r}{\partial r'} F_{\phi r}, \quad F_{\phi' z'} = \frac{\partial r}{\partial z'} F_{\phi r}. \end{aligned} \quad (13.14.8b)$$

Отсюда заключаем, что рассматриваемое магнитное поле не инвариантно относительно сдвигов типа (0–3).

Если магнитное поле описывать 4-потенциалом, то правило преобразования при сдвиге (0–1) выглядит как

$$\begin{aligned} A_{\phi} &= -B (\text{ch } r - 1) \quad \implies \\ A'_{\phi'} &= \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} A_{\phi}, \quad A'_{r'} = \frac{\partial \phi}{\partial r'} A_{\phi}. \end{aligned} \quad (13.14.9)$$

Поскольку и в плоском пространстве сдвиг генерирует калибровочное преобразование 4-потенциала:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}') &= \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{r}' - \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{r}' + c\nabla_{\mathbf{r}'} \Lambda(x', y', z'), \\ \mathbf{B} &= (0, 0, B), \quad \mathbf{b} = (b, 0, 0), \quad \Lambda(x', y', z') = -\frac{bB}{2} y', \end{aligned} \quad (13.14.10)$$

то можно в случае сдвига в пространстве Лобачевского ожидать чего-то аналогичного:

$$A'_{\phi'} = \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} A_{\phi} = -B (\operatorname{ch} r' - 1) + \frac{\partial}{\partial \phi'} \Lambda, \quad A'_{r'} = \frac{\partial \phi}{\partial r'} A_{\phi} = \frac{\partial}{\partial r'} \Lambda. \quad (13.14.11)$$

Учитывая равенства:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \phi'} = \frac{1}{1 + A^2} \frac{\partial A}{\partial \phi'} = \frac{\operatorname{sh} r' (-\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi' + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r')}{\operatorname{sh}^2 r},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r'} = \frac{1}{1 + A^2} \frac{\partial A}{\partial r'} = \frac{-\operatorname{sh} \beta \sin \phi'}{\operatorname{sh}^2 r},$$

для электромагнитного потенциала в сдвинутой системе отсчета получаем представление:

$$A'_{\phi'} = \frac{\operatorname{sh} r' (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi')}{\operatorname{sh}^2 r} [-B(\operatorname{ch} r - 1)],$$

$$A'_{r'} = \frac{-\operatorname{sh} \beta \sin \phi'}{\operatorname{sh}^2 r} [-B(\operatorname{ch} r - 1)]. \quad (13.14.12)$$

Отсюда следуют соотношения:

$$A'_{\phi'} = -B \frac{\operatorname{sh} r' (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} r' \cos \phi')}{1 + \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi'},$$

$$A'_{r'} = B \frac{\operatorname{sh} \beta \sin \phi'}{1 + \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi'}. \quad (13.14.13)$$

Легко убедиться, что выполняется равенство:

$$F_{\phi' r'} = \partial_{\phi'} A_{r'} - \partial_{r'} A_{\phi'} = B \operatorname{sh} r';$$

причем нет необходимости действительно выполнять эти вычисления – достаточно общего рассмотрения и проведенных ранее вычислений:

$$F_{\phi' r'} = \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r'} A_{\phi} \right) - \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi'} A_{\phi} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi' \partial r'} A_{\phi} + \frac{\partial \phi}{\partial r'} \left(\frac{\partial}{\partial \phi'} A_{\phi} \right) - \frac{\partial^2}{\partial r' \partial \phi'} A_{\phi} - \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \left(\frac{\partial}{\partial r'} A_{\phi} \right) =$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r'} \frac{\partial r}{\partial \phi'} \left(\frac{\partial}{\partial r} A_{\phi} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \frac{\partial r}{\partial r'} \left(\frac{\partial}{\partial r} A_{\phi} \right) = -J F_{r\phi} = B \operatorname{sh} r.$$

Калибровочная функция Λ из (13.14.11) определяется своими частными производными:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r'} = B \frac{\text{sh } \beta \sin \phi'}{1 + \text{ch } \beta \text{ ch } r' - \text{sh } \beta \text{ sh } r' \cos \phi'}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi'} &= B(\text{ch } r' - 1) - B \frac{\text{sh } r' (\text{ch } \beta \text{ sh } r' - \text{sh } \beta \text{ ch } r' \cos \phi')}{1 + \text{ch } \beta \text{ ch } r' - \text{sh } \beta \text{ sh } r' \cos \phi'} = \\ &= B \frac{(\text{ch } r' - 1)(1 - \text{ch } \beta) + \text{sh } \beta \text{ sh } r' \cos \phi'}{1 + \text{ch } \beta \text{ ch } r' - \text{sh } \beta \text{ sh } r' \cos \phi'}. \end{aligned} \quad (13.14.14)$$

Существование решения $\Lambda(r', \phi')$ следует из доказанной инвариантности магнитного поля $F_{\phi r}$. Условие интегрируемости

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \phi' \partial r'} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r' \partial \phi'}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi'} \frac{\text{sh } \beta \sin \phi'}{1 + \text{ch } \beta \text{ ch } r' - \text{sh } \beta \text{ sh } r' \cos \phi'} &= \\ = \frac{\partial}{\partial r'} \frac{(\text{ch } r' - 1)(1 - \text{ch } \beta) + \text{sh } \beta \text{ sh } r' \cos \phi'}{1 + \text{ch } \beta \text{ ch } r' - \text{sh } \beta \text{ sh } r' \cos \phi'}. \end{aligned} \quad (13.14.15)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что условие интегрируемости в форме (13.14.15) действительно выполняется. Вычислим калибровочную функцию Λ .

Для лучшего понимания рассмотрим эту задачу сначала в пределе плоского пространства (при этом соотношения примут значительно более простой вид):

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r'} = -B \frac{\alpha \sin \phi'}{2}, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi'} = -B \frac{\alpha r' \cos \phi'}{2}. \quad (13.14.16a)$$

Интегрируем первое уравнение:

$$\Lambda = -\frac{B\alpha}{2} \sin \phi' r' + \lambda(\phi');$$

подставляем это выражение для Λ во второе уравнение:

$$-\frac{B\alpha}{2} \cos \phi' r' + \frac{d}{d\phi} \lambda(\phi') = -B \frac{\alpha r' \cos \phi'}{2}, \quad \implies \lambda(\phi') = \lambda.$$

Следовательно,

$$\Lambda(r', \phi') = -\frac{B\alpha}{2} \sin \phi' r' + \lambda = -\frac{B\alpha}{2} y' + \lambda. \quad (13.14.16b)$$

По той же схеме рассмотрим задачу в пространстве Лобачевского. Интегрируем первое уравнение в (13.14.14):

$$\Lambda = B \operatorname{sh} \beta \sin \phi' \int \frac{dr'}{1 + \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi'} + \lambda(\phi'). \quad (13.14.17a)$$

Обозначим:

$$\operatorname{ch} \beta = c, \quad \operatorname{sh} \beta = s, \quad c^2 - s^2 = 1.$$

Воспользуемся подстановкой:

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \frac{r'}{2} = y, \quad dr' = 2 \operatorname{ch}^2 r' dy, \quad \frac{dr'}{1 + \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} r' \cos \phi'} &= \\ = \frac{2 \operatorname{ch}^2 r' dy}{1 + c (\operatorname{ch}^2 \frac{r'}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{r'}{2}) - s 2 \operatorname{sh} \frac{r'}{2} \operatorname{ch} \frac{r'}{2} \cos \phi'} &= \\ = \frac{2 dy}{1 - y^2 + c (1 + y^2) - 2 s y \cos \phi'} = \frac{2 dy}{y^2 (c - 1) - 2 y s \cos \phi' + c + 1}. \end{aligned} \quad (13.14.17b)$$

Для Λ находим выражение:

$$\begin{aligned} \Lambda = \lambda(\phi') + \frac{2B s \sin \phi'}{c - 1} \int \frac{dy}{\left(y - \frac{s \cos \phi'}{c - 1}\right)^2 + \frac{s^2 \sin^2 \phi'}{(c - 1)^2}} &\Rightarrow \\ \Lambda = \lambda(\phi') + 2B \operatorname{arctg} \frac{(c - 1)y - s \cos \phi'}{s \sin \phi'}, \end{aligned}$$

откуда с учетом

$$y = \operatorname{th} \frac{r'}{2} = \frac{\operatorname{ch} r' - 1}{\operatorname{sh} r'}$$

получаем:

$$\Lambda = \lambda(\phi') + 2B \operatorname{arctg} \frac{(c - 1)(\operatorname{ch} r' - 1) - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}{s \operatorname{sh} r' \sin \phi'}. \quad (13.14.17c)$$

Вычисляем

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi'} = \frac{d\lambda}{d\phi'} + B \frac{(\operatorname{ch} r' + 1)(c + 1) - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}{c \operatorname{ch} r' + 1 - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}. \quad (13.14.18a)$$

Найденное выражение для Λ следует подставить во второе уравнение в (13.14.14):

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi'} = B \frac{(\operatorname{ch} r' - 1)(-c + 1) + s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}{1 + c \operatorname{ch} r' - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'};$$

в результате для $\lambda(\phi')$ получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\phi'} &= B \frac{(\operatorname{ch} r' - 1)(-c + 1) + s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}{1 + c \operatorname{ch} r' - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'} + \\ &+ B \frac{(\operatorname{ch} r' + 1)(-c - 1) + s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}{1 + c \operatorname{ch} r' - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'} = -2B. \end{aligned} \quad (13.14.18b)$$

Следовательно,

$$\lambda(\phi) = -2B\phi + \lambda_0. \quad (13.14.19)$$

Таким образом, калибровочная функция $\Lambda(r', \phi')$ найдена:

$$\Lambda(r', \phi') = +2B \operatorname{arctg} \frac{(c - 1)(\operatorname{ch} r' - 1) - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}{s \operatorname{sh} r' \sin \phi'} - 2B\phi' + \lambda_0. \quad (13.14.20)$$

Напоминаем, что $c = \operatorname{ch} \beta$, $s = \operatorname{sh} \beta$.

13.15 О симметрии магнитного поля в сферическом пространстве

Введем в сферическом пространстве Римана две системы координат:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos z \sin r \cos \phi, & u_2 &= \cos z \sin r \sin \phi, \\ u_3 &= \sin z, & u_0 &= \cos z \cos r; \end{aligned} \quad (13.15.1a)$$

$$\begin{aligned} u'_1 &= \cos z' \sin r' \cos \phi', & u'_2 &= \cos z' \sin r' \sin \phi', \\ u'_3 &= \sin z', & u'_0 &= \cos z' \cos r', \end{aligned} \quad (13.15.1b)$$

связанные сдвигом $(0 - 1)$:

$$\begin{vmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}. \quad (13.15.2a)$$

Уравнения (13.15.1a) дают следующую связь между двумя наборами цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} (0 - 1), \quad z' &= z, & \sin r' \sin \phi' &= \sin r \sin \phi, \\ \sin r' \cos \phi' &= -\sin \alpha \cos r + \cos \alpha \sin r \cos \phi, \\ \cos r' &= \cos \alpha \cos r + \sin \alpha \sin r \cos \phi; \end{aligned} \quad (13.15.2b)$$

и обратное преобразование:

$$\begin{aligned} (0 - 1), \quad z = z', \quad \sin r \sin \phi &= \sin r' \sin \phi', \\ \sin r \cos \phi &= \sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi', \\ \cos r &= \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'. \end{aligned} \quad (13.15.2c)$$

Относительно такой замены переменных $(r, \phi) \implies (r', \phi')$ однородное магнитное поле преобразуется согласно

$$F_{\phi'r'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi'} \frac{\partial x^\beta}{\partial r'} F_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \frac{\partial r}{\partial r'} - \frac{\partial r}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi}{\partial r'} \right) F_{\phi r}, \quad F_{\phi r} = B \operatorname{sh} r, \quad (13.15.3a)$$

т. е. магнитное поле преобразуется с помощью якобиана:

$$F_{\phi'r'} = J F_{\phi r}, \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial \phi'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r'} & \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \end{vmatrix}, \quad F_{\phi r} = B \sin r. \quad (13.15.3b)$$

Запишем преобразование координат в виде:

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin r' \sin \phi'}{\sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi'} \right) = \operatorname{arctg} A, \\ r &= \operatorname{arccos} (\cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi') = \operatorname{arccos} B. \end{aligned} \quad (13.15.4a)$$

Для якобиана имеем представление:

$$J = \frac{-1}{\sqrt{1 - B^2}} \frac{1}{1 + A^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r'} \frac{\partial A}{\partial \phi'} - \frac{\partial B}{\partial \phi'} \frac{\partial A}{\partial r'} \right). \quad (13.15.4b)$$

Учитывая равенство

$$\frac{-1}{\sqrt{1 - B^2}} \frac{1}{1 + A^2} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 r}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = -\frac{\cos^2 \phi}{\sin r} \quad (13.15.5a)$$

и выражения для производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial r'} &= \frac{\partial}{\partial r'} (\cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi') = \\ &= -\cos \alpha \sin r' - \sin \alpha \cos r' \cos \phi', \\ \frac{\partial B}{\partial \phi'} &= \frac{\partial}{\partial \phi'} (\cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi') = \\ &= \sin \alpha \sin r' \sin \phi', \\ \frac{\partial A}{\partial \phi'} &= \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\frac{\sin r' \sin \phi'}{\sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi'} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin r'(\sin \alpha \cos r' \cos \phi' + \cos \alpha \sin r')}{(\sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi')^2} = \\
&= \frac{\sin r'(\sin \alpha \cos r' \cos \phi' + \cos \alpha \sin r')}{\sin^2 r \cos^2 \phi}, \\
\frac{\partial A}{\partial r'} &= \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{\sin r' \sin \phi'}{\sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi'} \right) = \\
&= \frac{\sin \alpha \sin \phi'}{(\sin \alpha \cos r' + \cos \alpha \sin r' \cos \phi')^2} = \frac{\sin \alpha \sin \phi'}{\sin^2 r \cos^2 \phi}, \quad (13.15.5b)
\end{aligned}$$

для якобиана получаем представление:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\sin r'}{\sin r} \frac{1}{\sin^2 r} (\cos \alpha \sin r' + \sin \alpha \cos r' \cos \phi') \times \\
&\times (\sin \alpha \cos r' \cos \phi' + \cos \alpha \sin r') + \sin^2 \alpha \sin^2 \phi'. \quad (13.15.5c)
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что во втором множителе числитель и знаменатель равны друг другу. Таким образом, якобиан преобразования сдвига (0 – 1) в сферическом пространстве Римана равен:

$$J = \frac{\sin r'}{\sin r}. \quad (13.15.6a)$$

Следовательно, магнитное поле инвариантно относительно сдвига (0 – 1) в пространстве Римана S_3 :

$$F_{\phi' r'} = J F_{\phi r}, \quad F_{\phi r} = B \sin r, \quad F_{\phi' r'} = B \sin r'. \quad (13.15.6b)$$

Из соображений симметрии понятно, что такая же симметрия будет наблюдаться и для сдвигов типа (0–2). Следует дополнительно рассмотреть сдвиги типа (0 – 3):

$$\begin{vmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}. \quad (13.15.7)$$

Уравнения (13.15.1a) дают следующую связь между двумя наборами цилиндрических координат $(r, z) \implies (r', z')$:

$$\begin{aligned}
\cos z' \cos r' &= \cos \alpha \cos z \cos r + \sin \alpha \sin z, \\
\sin z' &= -\sin \alpha \cos z \cos r + \cos \alpha \sin z, \\
\cos z' \sin r' &= \cos z \sin r, \quad \phi' = \phi. \quad (13.15.8a)
\end{aligned}$$

Электромагнитное поле преобразуется согласно

$$F_{\alpha'\beta'} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial r}{\partial x'^\beta} - \frac{\partial r}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x'^\beta} \right) F_{\phi r} \quad \Longrightarrow$$

$$F_{\phi' r'} = \frac{\partial r}{\partial r'} F_{\phi r}, \quad F_{\phi' z'} = \frac{\partial r}{\partial z'} F_{\phi r}. \quad (13.15.8b)$$

Отсюда заключаем, что рассматриваемое магнитное поле не инвариантно относительно сдвигов типа (0 – 3).

Если магнитное поле описывать 4-потенциалом, то правило преобразования при сдвиге (0 – 1) выглядит как

$$A_\phi = B (\cos r - 1) \quad \Longrightarrow \quad A'_{\phi'} = \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} A_\phi, \quad A'_{r'} = \frac{\partial\phi}{\partial r'} A_\phi. \quad (13.15.9)$$

Поскольку и в плоском пространстве сдвиг генерирует калибровочное преобразование 4-потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a},$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{r}' - \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{a} = \frac{1}{2} c\mathbf{B} \times \mathbf{r}' + c\nabla_{\mathbf{r}'} \Lambda(x', y', z'),$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{b} = (a, 0, 0), \quad \Lambda(x', y', z') = -\frac{Ba}{2} y', \quad (13.15.10)$$

то можно в случае сдвига в пространстве Лобачевского ожидать чего-то аналогичного:

$$A'_{\phi'} = \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} A_\phi = B (\cos r' - 1) + \frac{\partial}{\partial\phi'} \Lambda, \quad A'_{r'} = \frac{\partial\phi}{\partial r'} A_\phi = \frac{\partial}{\partial r'} \Lambda. \quad (13.15.11)$$

Учитывая равенства

$$\frac{\partial\phi}{\partial\phi'} = \frac{1}{1 + A^2} \frac{\partial A}{\partial\phi'} = \frac{\sin r' (\sin \alpha \cos r' \cos \phi' + \cos \alpha \sin r')}{\sin^2 r},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r'} = \frac{1}{1 + A^2} \frac{\partial A}{\partial r'} = \frac{\sin \alpha \sin \phi'}{\sin^2 r},$$

для электромагнитного потенциала в сдвинутой системе отсчета получаем представление:

$$A'_{\phi'} = \frac{\sin r' (\cos \alpha \sin r' + \sin \alpha \cos r' \cos \phi')}{\sin^2 r} [B(\cos r - 1)],$$

$$A'_{r'} = \frac{\sin \alpha \sin \phi'}{\sin^2 r} [B(\cos r - 1)]. \quad (13.15.12)$$

Отсюда следуют соотношения:

$$A'_{\phi'} = -B \frac{\sin r' (\cos \alpha \sin r' + \sin \alpha \cos r' \cos \phi')}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'},$$

$$A'_{r'} = -B \frac{\sin \alpha \sin \phi'}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'}. \quad (13.15.13)$$

Легко убедиться прямым вычислением, что выполняется равенство

$$F_{\phi'r'} = \partial_{\phi'} A_{r'} - \partial_{r'} A_{\phi'} = B \sin r'.$$

Нет необходимости действительно выполнять эти вычисления – достаточно общего рассмотрения и проведенных ранее вычислений:

$$\begin{aligned} F_{\phi'r'} &= \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r'} A_{\phi} \right) - \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi'} A_{\phi} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi' \partial r'} A_{\phi} + \frac{\partial \phi}{\partial r'} \left(\frac{\partial}{\partial \phi'} A_{\phi} \right) - \frac{\partial^2}{\partial r' \partial \phi'} A_{\phi} - \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \left(\frac{\partial}{\partial r'} A_{\phi} \right) = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial r'} \frac{\partial r}{\partial \phi'} \left(\frac{\partial}{\partial r} A_{\phi} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \frac{\partial r}{\partial r'} \left(\frac{\partial}{\partial r} A_{\phi} \right) = -J F_{r\phi} = B \sin r. \end{aligned}$$

Калибровочная функция Λ из (13.15.11) определяется своими частными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial r'} &= -B \frac{\sin \alpha \sin \phi'}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'}, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi'} &= -B(\cos r' - 1) - B \frac{\sin r' (\cos \alpha \sin r' + \sin \alpha \cos r' \cos \phi')}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'} = \\ &= -B \frac{(\cos r' - 1)(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \sin r' \cos \phi'}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'}. \quad (13.15.14) \end{aligned}$$

Существование решения $\Lambda(r', \phi')$ следует из доказанной инвариантности магнитного поля $F_{\phi r}$. Условие интегрируемости

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \phi' \partial r'} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r' \partial \phi'}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \phi'} \left(-B \frac{\sin \alpha \sin \phi'}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r'} \left(-B \frac{(\cos r' - 1)(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \sin r' \cos \phi'}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'} \right). \quad (13.15.15) \end{aligned}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что условие (13.15.15) действительно выполняется. Вычислим калибровочную функцию Λ . Интегрируем первое уравнение в (13.15.14):

$$\Lambda = -B \sin \alpha \sin \phi' \int \frac{dr'}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'} + \lambda(\phi'). \quad (13.15.16a)$$

Обозначим:

$$\cos \alpha = c, \quad \sin \alpha = s, \quad c^2 + s^2 = 1.$$

Вспользуемся подстановкой:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{r'}{2} = y, \quad dr' = 2 \cos^2 r' dy, \quad \frac{dr'}{1 + \cos \alpha \cos r' - \sin \alpha \sin r' \cos \phi'} &= \\ &= \frac{2 \cos^2 r' dy}{1 + c (\cos^2 \frac{r'}{2} - \sin^2 \frac{r'}{2}) - 2s \sin \frac{r'}{2} \cos \frac{r'}{2} \cos \phi'} = \\ &= \frac{2 dy}{1 + y^2 + c(1 - y^2) - 2s y \cos \phi'} = \frac{2 dy}{y^2(1 - c) - 2y s \cos \phi' + c + 1}. \end{aligned} \quad (13.15.16b)$$

Для Λ находим выражение:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda(\phi') - \frac{2B s \sin \phi'}{1 - c} \int \frac{dy}{(y - \frac{s \cos \phi'}{1 - c})^2 + \frac{s^2 \sin^2 \phi'}{(1 - c)^2}}, \\ \Lambda &= \lambda(\phi') - 2B \operatorname{arctg} \frac{(1 - c)y - s \cos \phi'}{s \sin \phi'}, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\Lambda = \lambda(\phi') - 2B \operatorname{arctg} \frac{(1 - c)(1 - \cos r') - s \sin r' \cos \phi'}{s \sin r' \sin \phi'}. \quad (13.15.16c)$$

Вычисляем:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi'} = \frac{d\lambda}{d\phi'} - B \frac{(1 + c)(1 + \cos r') - s \operatorname{sh} r' \cos \phi'}{1 + c \cos r' - s \sin r' \cos \phi'}. \quad (13.15.17a)$$

Найденное выражение для Λ следует подставить во второе уравнение в (13.15.14):

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi'} = -B \frac{(\cos r' - 1)(1 - c) + s \sin r' \cos \phi'}{1 + c \cos r' - s \sin r' \cos \phi'}.$$

В результате для $\lambda(\phi')$ получаем уравнение:

$$\frac{d\lambda}{d\phi'} = -B \frac{(\cos r' - 1)(1 - c) + s \sin r' \cos \phi'}{1 + c \cos r' - s \sin r' \cos \phi'} +$$

$$+ B \frac{(1+c)(1+\cos r') - s \operatorname{sh} r' \cos \phi}{1+c \cos r' - s \sin r' \cos \phi} = +2B. \quad (13.15.17b)$$

Следовательно,

$$\lambda(\phi) = +2B\phi + \lambda_0. \quad (13.15.18)$$

Таким образом, калибровочная функция $\Lambda(r', \phi')$ найдена:

$$\Lambda(r', \phi') = -2B \operatorname{arctg} \frac{(1-c)(1-\cos r') - s \sin r' \cos \phi'}{s \sin r' \sin \phi'} + 2B\phi + \lambda_0. \quad (13.15.19)$$

Напоминаем, что $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$.

13.16 Частица в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского при наложении связи между переменными z , r

Рассмотрим задачу о частице в магнитном поле в пространстве H_3 , используя лагранжев формализм и специальное условие связи. Условие связи подсказывается явным видом сохраняющейся величины I ; возникающее при этом решение уравнений описывает простое движение частицы. Его можно рассматривать как сочетание вращения с постоянной угловой скоростью около оси z с поступательным смещением вдоль оси z .

Лагранжиан исходной системы равен:

$$L = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}^2 z V^r V^r + \operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh}^2 r V^\phi V^\phi + V^z V^z) + B (\operatorname{ch} r - 1) V^\phi, \quad (13.16.1)$$

дополнительное условие связи между переменными пусть имеет вид:

$$\operatorname{ch}^2 z \operatorname{sh}^2 r = \sigma \operatorname{ch} r + \Sigma. \quad (13.16.2a)$$

Другими словами, движение частицы в магнитном поле ограничивается специального вида цилиндрической поверхностью. Из (13.16.2a), в частности, следует:

$$\operatorname{ch} z = \frac{\sqrt{\sigma \operatorname{ch} r + \Sigma}}{\operatorname{sh} r} = f(r),$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\pm \sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}} \frac{df}{dr} \frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{\pm \sqrt{f^2(r) - 1}} \frac{df}{dr} \right) \frac{dr}{dt} = \frac{dz}{dr} \frac{dr}{dt}; \quad (13.16.2b)$$

верхний знак относится к $z > 0$, нижний знак относится к $z < 0$. Учитывая (13.16.2a), можно из лагранжиана легко исключить переменную z :

$$L = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}^2 z(r) V^r V^r + \operatorname{ch}^2 z(r) \operatorname{sh}^2 r V^\phi V^\phi + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r \right] +$$

$$+B (\operatorname{ch} r - 1)V^\phi. \quad (13.16.3)$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^r} = \frac{\partial L}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^\phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

принимают следующий явный вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\operatorname{ch}^2 z(r) V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r \right] = \\ & = \frac{d}{dr} \operatorname{ch}^2 z(r) V^r V^r + \left(\frac{d}{dr} \operatorname{ch}^2 z(r) \operatorname{sh}^2 r \right) V^\phi V^\phi + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r + B \operatorname{sh} r V^\phi, \end{aligned} \quad (13.16.4a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\operatorname{ch}^2 z(r) \operatorname{sh}^2 r V^\phi + B (\operatorname{ch} r - 1) \right] = 0. \quad (13.16.4b)$$

Учитывая (13.16.2a), уравнение (13.16.4b) можно представить как

$$\frac{d}{dt} \left[(\sigma \operatorname{ch} r + \Sigma) V^\phi + B (\operatorname{ch} r - 1) \right] = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[(\sigma V^\phi + B) \operatorname{ch} r + \Sigma V^\phi - B \right] = 0. \quad (13.16.5a)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, выбрав V^ϕ определенной постоянной величиной:

$$V^\phi = -B \frac{1}{\sigma} = \frac{\omega}{\sigma}, \quad \omega = -B. \quad (13.16.5b)$$

В свою очередь, уравнение (13.16.4a) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\operatorname{ch}^2 z(r) V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r \right] = \\ & = \frac{d}{dr} \operatorname{ch}^2 z(r) V^r V^r + \sigma \operatorname{sh} r \frac{\omega^2}{\sigma^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r - \operatorname{sh} r \frac{\omega^2}{\sigma}, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{d}{dt} \left[\operatorname{ch}^2 z(r) V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r \right] = \frac{d}{dr} \operatorname{ch}^2 z(r) V^r V^r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r.$$

Раскрыв в этом уравнении производную по времени в левой части, приходим к

$$\frac{d}{dr} \operatorname{ch}^2 z(r) V^r V^r + \operatorname{ch}^2 z(r) \frac{d}{dt} V^r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \frac{d}{dt} V^r =$$

$$= \frac{d}{dr} \operatorname{ch}^2 z(r) V^r V^r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r.$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$\left[\operatorname{ch}^2 z(r) + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] \frac{d}{dt} V^r = 0. \quad (13.16.6)$$

Этому уравнению можно удовлетворить только следующим образом:

$$\frac{d}{dt} V^r = 0, \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r}_0, \quad r(t) = r_0 + \dot{r}_0 t. \quad (13.16.7)$$

При этом, в соответствии с (13.16.2), движение по координатам z и ϕ описывается согласно

$$\operatorname{ch} z = \frac{\sqrt{\sigma \operatorname{ch} r + \Sigma}}{\operatorname{sh} r} = \frac{\sqrt{\sigma \operatorname{ch}(r_0 + \dot{r}_0 t) + \Sigma}}{\operatorname{sh}(r_0 + \dot{r}_0 t)} = f(r(t)),$$

$$\phi(t) = \frac{\omega}{\sigma} t + \phi_0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega}{\sigma} = -B \frac{1}{\sigma}. \quad (13.16.8)$$

13.17 Частица в пространстве S_3 при дополнительных связях, специальное движение с постоянной угловой скоростью

Рассмотрим задачу о частице в магнитном поле в пространстве S_3 , используя лагранжев формализм и специальное условие связи. Условие связи подсказывается явным видом сохраняющейся величины L ; возникающее при этом решение уравнений описывает простое движение частицы. Его можно рассматривать как сочетание вращения с постоянной угловой скоростью около оси z с поступательным смещением вдоль оси z .

Лагранжиан исходной системы равен:

$$L = \frac{1}{2} (\cos^2 z V^r V^r + \cos^2 z \sin^2 r V^\phi V^\phi + V^z V^z) - B (\cos r - 1) V^\phi, \quad (13.17.1)$$

дополнительное условие связи между переменными пусть имеет вид:

$$\cos^2 z \sin^2 r = \sigma \cos r + \Sigma. \quad (13.17.2a)$$

Другими словами, движение частицы в магнитном поле ограничивается специального вида цилиндрической поверхностью. Из (13.17.2a), в частности, следует:

$$\cos z = \frac{\sqrt{\sigma \cos r + \Sigma}}{\sin r} = f(r),$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 z}} \frac{df}{dr} \frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{\pm\sqrt{1-f^2(r)}} \frac{df}{dr} \right) \frac{dr}{dt} = \frac{dz}{dr} \frac{dr}{dt}. \quad (13.17.2b)$$

Учитывая (13.17.2a), можно из лагранжиана исключить переменную z :

$$L = \frac{1}{2} \left[\cos^2 z(r) V^r V^r + \cos^2 z(r) \sin^2 r V^\phi V^\phi + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r \right] - B (\cos r - 1) V^\phi. \quad (13.17.3)$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^r} = \frac{\partial L}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V^\phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

принимают следующий явный вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\cos^2 z(r) V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r \right] = \\ & = \frac{d}{dr} \cos^2 z(r) V^r V^r + \left(\frac{d}{dr} \cos^2 z(r) \sin^2 r \right) V^\phi V^\phi + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r + B \sin r V^\phi, \end{aligned} \quad (13.17.4a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\cos^2 z(r) \sin^2 r V^\phi - B (\cos r - 1) \right] = 0. \quad (13.17.4b)$$

Учитывая (13.17.2a), уравнение (13.17.4b) можно представить как

$$\frac{d}{dt} \left[(\sigma \cos r + \Sigma) V^\phi - B (\cos r - 1) \right] = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[(\sigma V^\phi - B) \cos r + \Sigma V^\phi + B \right] = 0. \quad (13.17.5a)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, выбрав V^ϕ определенной постоянной величиной:

$$V^\phi = B \frac{1}{\sigma} = \frac{\omega}{\sigma}, \quad \omega = B. \quad (13.17.5b)$$

В свою очередь, уравнение (13.17.4a) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\cos^2 z(r) V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r \right] = \\ & = \frac{d}{dr} \cos^2 z(r) V^r V^r - \sigma \sin r \frac{\omega^2}{\sigma^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r + \sin r \frac{\omega^2}{\sigma}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} \left[\cos^2 z(r) V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r \right] = \frac{d}{dr} \cos^2 z(r) V^r V^r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r.$$

Раскрыв в этом уравнении производную по времени в левой части, приходим к

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \cos^2 z(r) V^r V^r + \cos^2 z(r) \frac{d}{dt} V^r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \frac{d}{dt} V^r = \\ = \frac{d}{dr} \cos^2 z(r) V^r V^r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 V^r V^r. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$\left[\cos^2 z(r) + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] \frac{d}{dt} V^r = 0. \quad (13.17.6)$$

Этому уравнению можно удовлетворить только следующим образом:

$$\frac{d}{dt} V^r = 0, \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r}_0, \quad r(t) = r_0 + \dot{r}_0 t. \quad (13.17.7)$$

При этом, в соответствии с (13.17.2), движение по координатам z и ϕ описывается согласно

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{\sqrt{\sigma \cos r + \Sigma}}{\sin r} = \frac{\sqrt{\sigma \cos(r_0 + \dot{r}_0 t) + \Sigma}}{\sin(r_0 + \dot{r}_0 t)} = f(r(t)), \\ \phi(t) = \frac{\omega}{\sigma} t + \phi_0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega}{\sigma} = \frac{eB}{m \sigma}. \end{aligned} \quad (13.17.8)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] **Паули, В.** Теория относительности / В. Паули. – Москва: Наука, 1983. – 336 с.
- [2] **Едингтон, А.С.** Теория относительности / А.С. Едингтон. – Москва: УРРС, 2006. – 304 с.
- [3] **Вейль, Г.** Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности / Г. Вейль. – Москва: УРРС, 2004. – 456 с.
- [4] **Толмен, Р.** Относительность, термодинамика и космология / Р. Толмен. – Москва: Наука, 1974. – 520 с.
- [5] **Фок, В.А.** Теория пространства, времени и тяготения / В.А. Фок. – Москва: ЛКИ, 2007. – 568 с.
- [6] **Шредингер, Э.** Пространственно-временная структура вселенной / Э. Шредингер. – Москва: Наука, 1986. – 222 с.
- [7] **Schmutzer, E.** Relativische physik / E. Schmutzer. – Leipzig: Teubner-Verlag, 1968. – 974 s.
- [8] **Мицкевич, Н.В.** Физические поля в общей теории относительности / Н.В. Мицкевич. – Москва: Наука, 1969. – 323 с.
- [9] **Вайнберг, С.** Гравитация и космология / С. Вайнберг. – Москва: Мир, 1975. – 695 с.
- [10] **Пенроуз, Р.** Структура пространства-времени / Р. Пенроуз. – Москва: Мир, 1972. – 184 с.
- [11] **Тредер, Г.Ю.** Теория гравитации и принцип эквивалентности. Группа Лоренца, группа Эйнштейна и структура пространства / Г.Ю. Тредер. – Москва: Атомиздат, 1973. – 168 с.
- [12] **Мизнер, Ч.** Гравитация: в 3 т. / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. – Москва: Мир, 1977. – 3 т.
- [13] **Хокинг, С.** Крупномасштабная структура пространства-времени / С. Хокинг, Дж. Эллис. – Москва: Мир, 1977. – 429 с.
- [14] **Биррел, Н.** Квантованные поля в искривленном пространстве-времени / Н.Д. Биррел, П.С. Дэвис. – Москва: Мир, 1984. – 356 с.
- [15] **Пенроуз, Р.** Спиноры и пространство-время: в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – Москва: Мир, 1987. – Т. 1: Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. – 528 с.
- [16] **Гальцов, Д.В.** Частицы и поля в окрестности черных дыр / Д.В. Гальцов. – Москва: МГУ, 1986. – 288 с.
- [17] **Чандрасекхар, С.** Математическая теория черных дыр: в 2 ч. / С. Чандрасекхар. – Москва: Мир, 1986. – 2 ч.

- [18] **Девит, Б.С.** Динамическая теория групп и полей / Б.С. Девит. – Москва: Наука, 1987. – 287 с.
- [19] **Горбачевич, А.К.** Квантовая механика в общей теории относительности. Основные принципы и элементарные приложения / А.К. Горбачевич. – Минск: Университетское, 1985. – 158 с.
- [20] **Ландау, Л.Д.** Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1973. – 504 с.
- [21] **Ландау, Л.Д.** Квантовая механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1974. – 752 с.
- [22] **Берестецкий, В.Б.** Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – Москва: Наука, 1980. – 704 с.
- [23] **Фихтенгольц, Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1968. – Т. 1. – 609 с.
- [24] **Фихтенгольц, Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1968. – Т. 2. – 800 с.
- [25] **Фихтенгольц, Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1968. – Т. 3. – 656 с.
- [26] **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – Москва: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.
- [27] **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – Москва: Наука, 1974. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены функции Лежандра. – 296 с.
- [28] **Редьков, В.М.** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.
- [29] **Редьков, В.М.** Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.
- [30] **Федоров, Ф.И.** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
- [31] **Rabi, I.I.** Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie / I.I. Rabi // Z. Phys. – 1928. – Vol. 49. – P. 507–511.
- [32] **Landau, L.** Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // Ztschr. Phys. – 1930. – Vol. 64. – P. 629–637.

- [33] **Plesset, M.S.** Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field / M.S. Plesset // *Phys. Rev.* – 1931. – Vol. 12. – P. 1728–1731.
- [34] **Ландау, Л.Д.** Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1989. – Т. 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – 766 с.
- [35] **Comtet, A.** Effective action on the hyperbolic plane in a constant external field / A. Comtet, P.J. Houston // *J. Math. Phys.* – 1985. – Vol. 26, № 1. – P. 185–191.
- [36] **Comtet, A.** On the Landau levels on the hyperbolic plane / A. Comtet // *Annals of Physics.* – 1987. – Vol. – 173. – P. 185–209.
- [37] **Aoki, H.** Quantized Hall Effect / H. Aoki // *Rep. Progr. Phys.* – 1987. – Vol. 50. – P. 655–730.
- [38] **Groshe, C.** Path integral on the Poincaré upper half plane with a magnetic field and for the Morse potential / C. Groshe // *Ann. Phys. (N.Y.).* – 1988. – Vol. 187. – P. 110–134.
- [39] **Klauder, J.R.** Landau Levels and Geometric Quantization / J.R. Klauder, E. Onofri // *Int. J. Mod. Phys.* – 1989. – Vol. A4. – P. 3939–3949.
- [40] **Avron, J.E.** Landau Hamiltonians on Symmetric Spaces / J.E. Avron, A. Pnueli // *Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics, and applications* / Eds.: Alverio [et al.]. – Vol. II. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – P. 96–117.
- [41] **Plyushchay, M.S.** The Model of relativistic particle with torsion / M.S. Plyushchay // *Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. B362. – P. 54–72.
- [42] **Plyushchay, M.S.** Relativistic particle with torsion, Majorana equation and fractional spin / M.S. Plyushchay // *Phys. Lett.* – 1991. – Vol. B262. – P. 71–78.
- [43] **Plyushchay, M.S.** Relativistic particle with torsion and charged particle in a constant electromagnetic field: Identity of evolution / M.S. Plyushchay // *Mod. Phys. Lett.* – 1995. – Vol. A10. – P. 1463–1469.
- [44] **Dunne, G.V.** Hilbert Space for Charged Particles in Perpendicular Magnetic Fields / G.V. Dunne // *Ann. Phys. (N.Y.).* – 1992. – Vol. 215. – P. 233–263.
- [45] **Alimohammadi, M.** Quantum group symmetry of the quantum Hall effect on the non-flat surfaces / M. Alimohammadi, A. Shafei Deh Abad // *Jour. Phys.* – 1996. – Vol. A29. – P. 559.
- [46] **Alimohammadi, M.** Laughlin states on the Poincare half-plane and their quantum group symmetry / M. Alimohammadi, H. Mohseni Sadjadi // *Jour. Phys.* – 1996. – Vol. A29. – P. 5551.

- [47] **Onofri, E.** Landau Levels on a torus / E. Onofri // Int. J. Theoret. Phys. – 2001. – Vol. 40, № 2. – P. 537–549.
- [48] **Negro, J.** Landau quantum systems: an approach based on symmetry / J. Negro, M.A. del Olmo, A. Rodríguez-Marco // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2001. – Mode of access: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0110152>.
- [49] **Gamboa, J.** The Landau problem and noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa [et al.] // Mod. Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 16. – P. 2075–2078.
- [50] **Klishevich, S.M.** Nonlinear holomorphic supersymmetry on Riemann surfaces / S.M. Klishevich, M.S. Plyushchay // Nucl. Phys. – 2002. – Vol. B640. – P. 481–503.
- [51] **Drukker, N.** Gödel-type Universes and the Landau problem / N. Drukker, B. Fiol, J. Simón // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2004. – Vol. 0410. – Paper 012.
- [52] **Ghanmi, A.** Magnetic Laplacians of different forms of the hyperbolic disk and Landau levels / A. Ghanmi, A. Intissar // African Journal Of Mathematical Physics. – 2004. – Vol. 1. – P. 21–28.
- [53] **Correa, F.** Aharonov-Bohm effect on AdS(2) and nonlinear supersymmetry of reflectionless Poschl-Teller system / F. Correa, V. Jakubsky, M.S. Plyushchay // Ann. Phys. – 2009. – Vol. 324. – P. 1078–1094.
- [54] **Alvarez, P.D.** Super-extended noncommutative Landau problem and conformal symmetry / P.D. Alvarez [et al.] // JHEP. – 2009. – Vol. 0903. – Paper 034.
- [55] **Олевский, М.Н.** Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных / М.Н. Олевский // Матем. сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.
- [56] **Федоров, Ф.И.** Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–88.
- [57] **Федоров, Ф.И.** Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83.
- [58] **Плетюхов, В.А.** Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
- [59] **Плетюхов, В.А.** Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.

- [60] О теории скалярной частицы в пространствах с расширенным набором представлений группы Лоренца / **А.А. Богуш**, В.В. Кисель, Н.Г. Токаревская, В.М. Редьков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 65–71.
- [61] Нерелятивистский предел в общековариантной теории векторной частицы / **А.А. Богуш**, В.В. Кисель, Н.Г. Токаревская, В.М. Редьков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 2. – С. 61–66.
- [62] **Kisel, V.V.** Wave equation for a scalar particle in Riemannian space and non-relativistic approximation / V.V. Kisel, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // Non-Euclidean Geometry In Modern Physics (BGL-5): Proc. of 5th International Conference Bolyai-Gauss-Lobachevsky, Minsk, 10-13 October, 2006 / Institute of physics, NAS of Belarus; eds.: Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2007. – P. 122–127.
- [63] Duffin – Kemmer – Petiau formalism reexamined: non-relativistic approximation for spin 0 and spin 1 particles in a Riemannian space-time / **A.A. Bogush**, V.V. Kisel, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2007. – Vol. 32, № 2-3. – P. 355–381.
- [64] **Bogush, A.A.** Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A.A. Bogush, V.M. Red'kov, G.G. Krylov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–421.
- [65] Motion Caused by Magnetic Field in Lobachevsky Space / **V.V. Kudryashov**, Yu.A. Kurochkin, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // The sun, the stars, the Universe and General relativity: International Conference in honor of Ya.B. Zeldovich's 95th anniversary, Minsk, 20–23 April, 2009 / Ed. R. Ruffini, G. Vereschagin. – 2010. – Vol. 1205. – P. 108–111.
- [66] **Богуш, А.А.** Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле на фоне пространства Лобачевского / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов // Доклады НАН Беларусі. – 2009. – № 2. – С. 45–51.
- [67] **Богуш, А.А.** Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле в сферическом пространстве S_3 / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 2. – С. 57–63.
- [68] Движение в магнитном поле в пространстве Лобачевского / **В.В. Кудряшов**, Ю.А. Курочкин, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларусі. – 2009. – Т. № 6. – С. 50–53.

- [69] Classical particle in presence of magnetic field, hyperbolic Lobachevsky and spherical Riemann models / **V.V. Kudriashov**, Yu.A. Kurochkin, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // SIGMA. – 2010. – Vol. 6, 004. – 34 pages.
- [70] **Овсиюк, Е.М.** О решениях уравнения Дирака в однородном магнитном поле в пространстве Лобачевского / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 3. – С. 47–54.
- [71] **Кисель, В.В.** О решениях уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 в однородном магнитном поле / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 4. – С. 64–71.
- [72] Exact solutions for a quantum-mechanical particle with spin 1 and additional intrinsic characteristic in a homogeneous magnetic field / **V.V. Kisel**, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya // Acta Physica Polonica. B. – 2010. – Vol. 41, № 11. – P. 2347–2363.
- [73] **Red'kov, V.M.** Quantum-mechanical particle with spin 1/2 in external magnetic field in hyperbolic and spherical models, exact solutions / V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel // Non-Euclidean geometry and its Applications: Proc. of 7th International Conference Bolyai-Gauss-Lobachevsky, Cluj-Napoca, Romania, 5–9 July 2010 / Ed.: Ildiko I. Mezei. – Cluj-Napoca, Romania, 2010. – P. 32.
- [74] **Овсиюк, Е.М.** О дираковской частице в однородном магнитном поле в пространстве Римана / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 95–101.
- [75] **Kisel, V.V.** Quantum-mechanical particle with spin 1/2 in external magnetic field in curved hyperbolic and spherical models, exact solutions / V.V. Kisel, V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk // NPCB. – 2011 (in press).

Научное издание

Овсюк Елена Михайловна
Кисель Василий Васильевич
Крылов Георгий Геннадьевич
Редьков Виктор Михайлович

**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ:
НОВЫЕ ЗАДАЧИ**

Монография

Ответственный за выпуск С. С. Борисова
Корректор Л. Н. Боженко
Оригинал-макет Е. В. Лис

Подписано в печать 27.05.2011. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Ризография. Усл. печ. л. 14,5.
Тираж 100 экз. Заказ 27.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
им. И. П. Шамякина»
ЛИ № 02330/0549479 от 14 мая 2009 г.
247760, Мозырь, Гомельская обл., ул. Студенческая, 28
Тел. (0236) 32-46-29