Н.В. ХИЛЬМАН, М.И. ЕФРЕМОВА
МГПУ им. И.П. Шамякина, (г. Мозырь, Беларусь)

**ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ MATHEMATICA
ПРИ ИЗУЧЕНИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ**

Современное общество ставит перед системой образования новые задачи, связанные с разработкой педагогической стратегии в условиях компьютеризации и информатизации всех сторон жизни и деятельности человека. Внедрение компьютерной техники в различные сферы деятельности человека способствует структурному изменению этой деятельности. В настоящее время важное значение имеет проблема интенсификации и оптимизации учебного процесса, формирование информационной культуры учащихся, умений осуществления обработки информации. Весьма заметным фактором, влияющим на повышение качества обучения математики в высшей и средней школах, является внедрение современных информационно-коммуникационных технологий. Последние, на сегодняшний день, включают широкое использование систем компьютерной алгебры, соединяющих в себе численные методы и современную алгебру. Наиболее универсальной среди таких систем можно считать систему Mathematica.

Использовать систему Mathematica можно начинать с первых курсов при изучении общих математических дисциплин, в частности алгебры. Курс алгебры не может замыкаться в кругу абстрактных понятий, а должен давать максимальный выход на внедрение систем компьютерной алгебры в учебный процесс. Студенты быстро оценивают преимущества работы с такими системами и активно используют их в курсовых и дипломных работах.

Во второй половине прошлого века основные результаты компьютерной алгебры были получены в теории базиса Грёбнера, факторизации многочленов, интегрировании в конечном виде. В настоящее время большое число научных работ посвящено дальнейшему исследованию базисов Грёбнера и их обобщений. При изучении темы «Симметрические многочлены», помимо традиционных способов выражения многочлена через элементарные, можно познакомить студентов с алгоритмом, использующим понятие базиса Грёбнера.

Напомним [1], что симметрическими называются многочлены, которые не меняются ни при какой перестановке неизвестных. Сумма, разность и произведение двух симметрических многочленов сами будут симметрическими [1], т.е. симметрические многочлены составляют подкольцо в кольце $P[x_1, \dots, x_n]$ всех многочленов от n неизвестных над полем P.

Следующие n симметрических многочленов от n неизвестных называют [1] элементарными симметрическими многочленами и определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_n = x_1x_2 \dots x_n. \end{cases}$$

Основная теорема о симметрических многочленах утверждает, что всякий симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ от n неизвестных над полем P может быть однозначно представлен в виде многочлена от основных симметрических многочленов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ над тем же полем P. Доказательство теоремы содержит алгоритм приведения симметрического многочлена к многочлену от $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Оказывается, особый алгоритм для выражения симметрического многочлена через $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ не нужен. Можно использовать алгоритм деления многочленов от нескольких переменных и алгоритм построения базиса Грёбнера [2], который реализуются во многих современных системах компьютерной алгебры.

Разделить многочлен $f \in P[x_1, \dots, x_n]$ на многочлен $\{f_1, \dots, f_s\} \in P[x_1, \dots, x_n]$ с остатком, это значит представить f в виде

$$f = a_1f_1 + \dots + a_sf_s + r,$$

где r – остаток от деления.

Про систему образующих $\{f_1, \dots, f_s\}$ идеала I говорят [2], что она образует базис Грёбнера идеала, если старший член любого многочлена из I делится на старший член одного из многочленов $\{f_1, \dots, f_s\}$.

Опишем способ проверки симметричности заданного многочлена и его представления через элементарные симметрические многочлены с применением системы компьютерной алгебры Mathematica.

Пусть $f \in P[x_1, \dots, x_n]$. Введем новые переменные $y_1, \dots, y_n$ и зафиксируем в кольце $P[x_1, \dots, x_n, \quad y_1, \dots, y_n]$ мономиальное упорядочение такое, что любой моном, содержащий хотя бы один из x_i, больше всех мономов их $[f \in P[y]_1, \dots, y_n]$. Вычислим базис Грёбнера идеала $(\sigma_1 - y_1, \dots, \sigma_n - y_n) \subset P[x_1, \dots, x_n, \quad y_1, \dots, y_n]$ и обозначим через g однозначно определенный остаток от деления f на многочлены из базиса Грёбнера.

Тогда: 1) f симметричен в том и только в том случае, когда $g \in P[y_1, \dots, y_n]$, т.е. g не зависит от переменных $x_1, \dots, x_n$; 2) если f симметричен, то $f = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – единственное представление f в виде полинома от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Рассмотрим описанный выше способ на примере многочлена

$$f = (x_1x_2 + x_3)(x_1x_3 + x_2)(x_2x_3 + x_1).$$

Выясним, является ли заданный многочлен симметрическим. Если да, то выразим его через элементарный симметрический многочлен $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Будем использовать функции системы Mathematica **GroebnerBasis [polylist, varlist, options]** и **PolynomialReduce [f, polylist, varlist, options]** [3] . Первая функция вычисляет базис Грёбнера идеала, порожденного многочленами из списка **polylist,** используя мономиальное упорядочение, заданное списком **varlist** и опцией **MonomialOrder** (по умолчанию принимается лексикографическое упорядочение). Вторая функция возвращает список из двух элементов: списка частных и остатка, полученных от деления многочлена *f* на многочлены **polylist.**

Все вычисления в системе Mathematica приведены на рисунке 1. Видим, что остаток $g = y_2^2 + y_3 - 2y_1y_3 + y_1^2y_3 - 2y_2y_3 + y_3^2$ не зависит от переменных x_1, x_2, x_3, следовательно, многочлен f является симметрическим и выражается через элементарные симметрические многочлены следующим образом

$$f = \sigma_2^2 + \sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2.$$

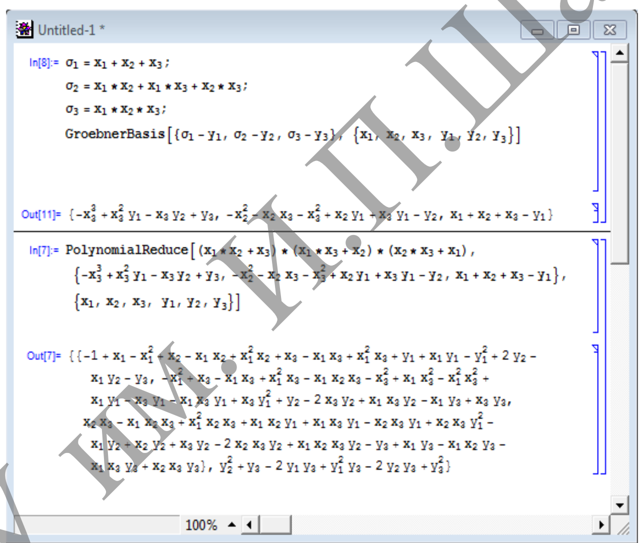

Рисунок 1. – Вычисления в системе Mathematica

ЛИТЕРАТУРА

1. Винберг, Э.Б. Курс алгебры / Э.Б. Винберг. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 544 с.
2. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.
3. Чигарев, А.В. Основы системы Mathematica 4.0. Задачи и решения / А.В. Чигарев, А.И. Кравчук, А.С. Кравчук. – Минск, 2002. – 150 с.