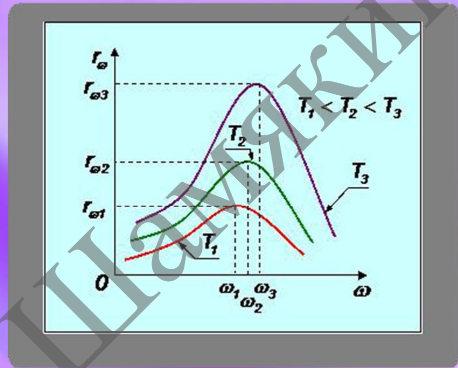
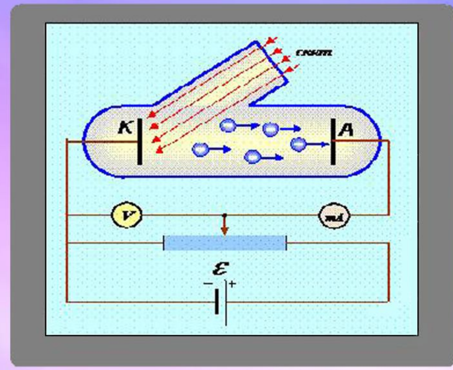
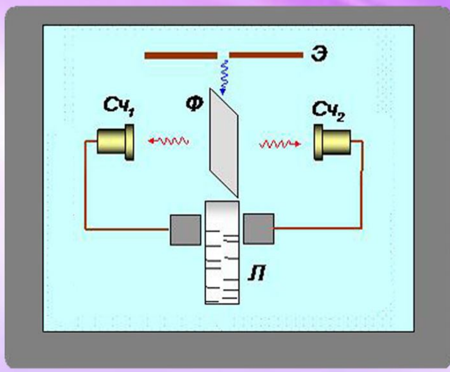
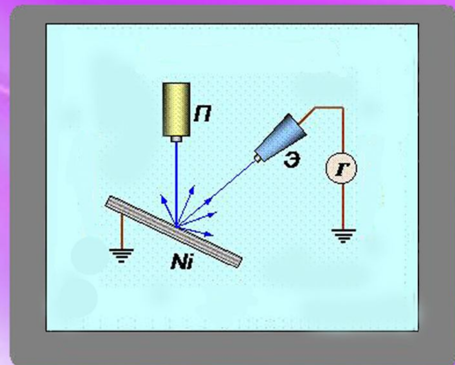
А. И. БЕЖАНОВА
Е. М. ОВСИЮК
С. Д. ШАВРЕЙ





КВАНТОВАЯ ФИЗИКА





ISBN 978-985-477-303-2

Мозырь
2013

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

А. И. Бежанова, Е. М. Овсиюк, С. Д. Шаврей

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по педагогическому образованию в качестве практикума
для студентов учреждений высшего образования,
обучающихся по специальностям:
1-02 05 04-01 Физика. Математика;
1-02 05 04-02 Физика. Информатика;
1-02 05 04-07 Технология (технический труд). Физика*

Мозырь
2013

УДК 539.1(076.5)(075.8)
ББК 22.383я73
Б35

Печатается по решению редакционно-издательского совета
учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

Бежанова, А. И.
Б35 Квантовая физика : практикум / А. И. Бежанова, Е. М. Овсиюк, С. Д. Шаврей. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2013. − 80 с.
ISBN 978-985-477-303-2

Предлагаемое издание представляет собой практикум по решению задач по разделу «Квантовая физика» дисциплины «Общая физика». Включает краткие теоретические сведения по каждой теме, вопросы для самоконтроля, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения.

Практикум адресован студентам специальностей 1-02 05 04-01 – Физика. Математика; 1-02 05 04-02 – Физика. Информатика; 1-02 05 04-07 – Технология (технический труд). Физика.

УДК 539.1(076.5)(075.8)
ББК 22.383я73

ISBN 978-985-477-303-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика – наука о наиболее простых и общих формах движения материи и их взаимных превращениях. Физика и ее законы лежат в основе всего естествознания. Она относится к точным наукам и изучает количественные закономерности явлений и процессов в окружающем нас мире.

Физика – одна из фундаментальных мировоззренческих дисциплин, дающая человеку адекватные представления об окружающем мире на всем протяжении его познавательной и преобразующей деятельности. Она является системообразующей наукой, методологической основой приобретения общепрофессиональных и специальных знаний, формирования естественнонаучной культуры специалиста.

В процессе специальной подготовки учителя физики для учреждений, обеспечивающих получение среднего образования, изучение физики начинается с изучения курса «Общая физика». Раздел «Квантовая физика» изучается вслед за разделом «Оптика». Изучение данного раздела физики, как и физики в целом, должно способствовать формированию естественнонаучной картины мира.

Необходимым условием успешного изучения курса физики является систематическое решение задач. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений и процессов, закрепляет в памяти основные формулы, развивает навыки практического применения теоретических знаний.

Умение решать задачи приобретается длительными и систематическими упражнениями. Чтобы научиться решать задачи и подготовиться к выполнению контрольных работ, к сдаче зачета и экзамена, следует после изучения соответствующего теоретического материала ответить на контрольные вопросы, разобрать примеры решения типовых задач, выполнить задания из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Данное пособие подготовлено в соответствии с действующим образовательным стандартом и учебной программой и может быть использовано при проведении практических занятий. Пособие по количеству подобранного материала позволяет во время проведения занятий реализовать индивидуальный подход, что немаловажно с учетом незначительного фонда учебного времени, предусмотренного для закрепления теоретического материала на практических занятиях.

1 ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Вопросы для обсуждения

Излучение абсолютно черного тела. Излучательная и поглощательная способности тел. Закон Кирхгофа и его следствия. Законы Стефана–Больцмана и Вина. Формула Рэлея–Джинса. Оптическая пирометрия. Распределение энергии в спектре абсолютно черного тела. Гипотеза Планка. Формула Планка.

Краткие теоретические сведения

Способность различных тел излучать и поглощать энергию различна. *Энергетической светимостью* тела R_e называется энергия, излучаемая в единицу времени с единицы поверхности теплового излучателя:

$$R_e = \frac{W}{tS} = \frac{P}{S},$$

где P – мощность излучения; S – площадь излучающей поверхности.

Тепловые излучатели в различных интервалах спектра электромагнитного излучения излучают по-разному, поэтому вводят *спектральную плотность энергетической светимости* r_λ – количество энергии, излучаемой в единицу времени с единицы поверхности в единичном интервале длин волн λ.

Поглощательной способностью, или коэффициентом поглощения a теплового излучателя, называется отношение:

$$a = \frac{W_{погл}}{W_{пад}},$$

показывающее, какую долю от упавшего на тело излучения оно поглощает.

Тело, поглощающее все упавшее на него излучение, называется *абсолютно черным телом* (а.ч.т.). Для него интегральный коэффициент поглощения равен единице:

$$a = \int_0^\infty a_\lambda d\lambda = 1.$$

Все реальные тепловые излучатели являются серыми. Они характеризуются коэффициентом серости (черноты) η, который показывает, во сколько раз поглощательная способность данного тела меньше, чем у абсолютно черного тела при той же температуре:

$$\eta = \frac{a_\lambda}{a_{\lambda\ а.ч.т.}}.$$

Закон Кирхгофа: для теплового излучателя отношение спектральной плотности энергетической светимости тела r_λ к его спектральному коэффициенту поглощения a_λ не зависит от материала тела и равно спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $r_{\lambda\ а.ч.т.}$ при данной температуре:

$$\frac{r_\lambda}{a_\lambda} = r_{\lambda\ а.ч.т.}.$$

Закон Стефана–Больцмана: энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры:

$$R_e = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 \cdot K^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана.

Для серого тела

$$R_e = \eta \sigma T^4,$$

где η – коэффициент поглощения (черноты).

Закон смещения Вина: длина волны λ_m, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости а.ч.т., обратно пропорциональна его термодинамической температуре T:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К$ – постоянная Вина.

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости от температуры имеет вид:

$$(r_\lambda)_{\max} = CT^5,$$

где $C = 1{,}30 \cdot 10^{-5}\ Вт/(м^3 \cdot K^5)$.

Формула Рэлея–Джинса:

$$r_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где ν – частота; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж \cdot K^{-1}$ – постоянная Больцмана; c – скорость света; T – абсолютная температура; r_ν – мощность излучения а.ч.т. в единичном интервале частот.

В 1900 г. М. Планк предположил, что электромагнитные колебания излучаются атомами не непрерывно, а дискретными порциями (квантами), энергия ε которых пропорциональна частоте ν:

$$\varepsilon = h\nu,$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$ – постоянная Планка, которую называют квантом действия, т. к. она имеет размерность момента импульса.

Формула Планка для спектральной плотности энергетической светимости а.ч.т.:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left[{}^{h\nu}\!/_{kT}\right] - 1}.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое излучение называется тепловым? Назовите характерные особенности теплового излучения.

2. Какое излучение называют равновесным? Назовите основные свойства равновесного излучения.

3. Дайте определение спектральной плотности излучательной и поглощательной способностей тела. Что такое интегральная излучательная способность тела?

4. Сформулируйте и запишите закон Кирхгофа для теплового излучения и следствия из закона Кирхгофа.

5. Что такое абсолютно черное тело (а.ч.т.)? Какова модель абсолютного черного тела?

6. Изобразите на графике зависимость спектральной плотности излучения а.ч.т. от длины волны (частоты) для разных температур и проанализируйте ход этих кривых.

7. Сформулируйте и запишите основные законы теплового излучения а.ч.т.

8. Запишите формулу Рэлея–Джинса. В чем состоит смысл «ультрафиолетовой катастрофы»?

9. Сформулируйте квантовую гипотезу Планка. Запишите формулу Планка для спектральной плотности излучения а.ч.т.

10. Что такое оптическая пирометрия? На чем базируются ее методы?

Примеры решения задач

Задача 1. Найти мощность, излучаемую абсолютно черным шаром радиусом 10 *см*, который находится в комнате при температуре 20° *C*.

Дано:
$R = 10$ *см* $= 0{,}1$ *м*
$t = 20°$ *C*, $T = 293$ *K*

P – ?

Решение.

Согласно закону Стефана–Больцмана, энергетическая светимость а.ч.т. равна

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (1)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $Вт/(м^2 \cdot K^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана.

Мощность излучения

$$P = R_e S, \qquad (2)$$

где

$$S = 4\pi R^2 \; – \qquad (3)$$

площадь шара. Подставляя (1) и (3) в (2), находим

$$P = \sigma T^4 4\pi R^2 .$$

Проверим размерность:

$$\left[P\right] = \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4} \cdot К^4 \cdot м^2 = Вт .$$

После вычислений получим

$$P = 52,5\ Вт.$$

Ответ: $P = 52,5\ Вт$.

Задача 2. Какое количество энергии излучает в течение суток каменное здание площадью $1,0 \cdot 10^3\ м^2$, если коэффициент поглощения при этом 0,8, а температура излучающей поверхности $0°\ C$?

Дано:
$S = 1,0 \cdot 10^3\ м^2$
$t = 1\ сут = 8,6 \cdot 10^4\ с$
$\eta = 0,8$
$t = 0°\ C$, $T = 273\ К$

$W - ?$

Решение.

Запишем закон Стефана–Больцмана для серого тела:

$$R_e = \eta\sigma T^4, \qquad (1)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 \cdot К^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана, тогда мощность излучения равна

$$P = R_e S = \eta\sigma T^4 S. \qquad (2)$$

С другой стороны, мощность – это энергия в единицу времени, т. е.

$$P = \frac{W}{t} \ \Rightarrow \ W = Pt. \qquad (3)$$

С учетом (2) имеем

$$W = \eta\sigma T^4 St.$$

Проверим размерность:

$$\left[W\right] = \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4} \cdot К^4 \cdot м^2 \cdot с = Вт \cdot с = Дж.$$

Подставив численные значения, находим

$$W = 2,2 \cdot 10^{10}\ Дж.$$

Ответ: $W = 2,2 \cdot 10^{10}\ Дж$.

Задача 3. Сколько энергии излучает абсолютно черное тело за 1,0 *с* с 1,0 $см^2$ светящейся поверхности, если максимум энергии в ее спектре приходится на длину волны 725 *нм*?

Дано:
$S = 1,0\ см^2 = 1,0 \cdot 10^{-4}\ м^2$
$t = 1,0\ с$
$\lambda_m = 725\ нм = 7,25 \cdot 10^{-7}\ м$

$W - ?$

Решение.

Энергия, излучаемая абсолютно черным телом, равна

$$W = R_e St. \qquad (1)$$

Запишем закон Стефана–Больцмана, согласно которому энергетическая светимость равна

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (2)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $Вт/(м^2 \cdot К^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана.

Температуру найдем из закона Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{b}{\lambda_m}, \qquad (3)$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ $м \cdot К$ – постоянная Вина.

Подставляя (2) и (3) в (1), находим энергию излучения

$$W = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 St.$$

Проверим размерность:

$$[W] = \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4} \cdot К^4 \cdot м^2 \cdot с = Вт \cdot с = Дж.$$

Подставив численные значения, находим

$$W = 1{,}45 \text{ кДж.}$$

Ответ: $W = 1{,}45$ *кДж.*

Задача 4. Излучение Солнца по спектральному составу близко к излучению абсолютно черного тела, для которого максимум излучательной способности приходится на длину волны 0,53 *мкм*. Найти массу, теряемую Солнцем за 1,0 *с*.

Дано:

$t = 1{,}0$ *с*

$\lambda_m = 0{,}53$ *мкм* $= 5{,}3 \cdot 10^{-7}$ *м*

m – ?

Решение.

Массу, теряемую Солнцем при излучении, можно найти из соотношения:

$$E = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2}, \qquad (1)$$

где E – энергия излучения; $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света.

Энергия излучения

$$W = E = R_e St = \sigma T^4 St. \qquad (2)$$

Площадь излучающей поверхности будет равна площади поверхности Солнца как шара, т. е.

$$S = 4\pi R^2, \qquad (3)$$

где $R = 6{,}95 \cdot 10^8$ *м* – радиус Солнца.

Температуру Солнца найдем из закона Вина

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{b}{\lambda_m}, \qquad (4)$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\, м \cdot К$ – постоянная Вина.

Подставляя (2), (3) и (4) в (1), находим

$$m = \frac{4\pi R^2 \sigma b^4 t}{c^2 \lambda_m^4}.$$

Проверим размерность:

$$[m] = \frac{м^2 \cdot \dfrac{Вт}{м^2 \cdot K^4} \cdot м^4 \cdot K^4 \cdot c}{\dfrac{м^2}{c^2} \cdot м^4} = \frac{Вт \cdot c \cdot c^2}{м^2} = \frac{Дж \cdot c^2}{м^2} = кг.$$

Произведя вычисления, найдем

$$m = 3{,}4 \cdot 10^9\, кг.$$

Ответ: $m = 3{,}4 \cdot 10^9$ *кг*.

Задача 5. В спектре излучения огненного шара радиусом 100,0 *м*, возникшего при ядерном взрыве, максимум энергии излучения приходится на длину волны 0,289 *мкм*. Определить температуру поверхности шара, энергию, излучаемую за $1{,}0 \cdot 10^{-3} c$, максимальное расстояние, на котором будут воспламеняться деревянные предметы, если их поглощательная способность равна 0,7. Теплота воспламенения $5{,}0 \cdot 10^4\, Дж/м^2$.

Дано:

$R = 100{,}0$ *м*

$\lambda_m = 0{,}289$ *мкм* $= 2{,}89 \cdot 10^{-7}$ *м*

$\eta = 0{,}7$

$Q_s = 5{,}0 \cdot 10^4 \dfrac{Дж}{м^2}$

$t = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ *с*

T – ?

W – ?

r – ?

Решение.

Температуру поверхности шара найдем из закона Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{b}{\lambda_m},$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\, м \cdot К$ – постоянная Вина.

$$T = 1{,}0 \cdot 10^4\, К.$$

Чтобы найти излучаемую энергию, воспользуемся законом Стефана–Больцмана и формулой площади шара:

$$W = \sigma T^4 4\pi R^2 t,$$

$$W = 7{,}1 \cdot 10^{10}\, Дж.$$

Эта энергия распространяется в пространстве, и на расстоянии r от поверхности поверхностная плотность энергии с учетом коэффициента поглощения равна

$$Q_s = \frac{\eta W}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{\eta W}{4\pi Q_s}}.$$

Проверим размерность:

$$[r]=\sqrt{\frac{Дж}{Дж/м^2}}=м.$$

Произведя вычисления, получим

$$r = 281\ м.$$

Ответ: $T = 1{,}0\cdot10^4\ К$, $W = 7{,}1\cdot10^{10}\ Дж$, $r = 281\ м$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При открытой дверце печи в ней поддерживается температура $800°\ C$. Размеры дверцы $22\times15\ см$. Сколько энергии в единицу времени получает комната от печи через открытую дверцу? (2,5 *кДж*)

2. Мощность излучения абсолютно черного тела 34 *кВт*. Найти температуру этого тела, если известно, что площадь его поверхности $0{,}6\ м^2$. ($1{,}0\cdot10^3\ К$)

3. Найти мощность, излучаемую абсолютно черным шаром радиусом 10 *см*, который находится в комнате при температуре $20°\ C$. (2,5 *Вт*)

4. Температура а.ч.т. $127°\ C$. После повышения температуры суммарная мощность излучения увеличилась в 3 раза. Насколько повысилась при этом температура? (На 126 *К*)

5. Раскаленная металлическая поверхность площадью $10\ см^2$ излучает за 1 *мин* энергию $4{,}0\cdot10^4\ Дж$. Температура поверхности $2{,}5\cdot10^3\ К$. Найти отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре. (0,3)

6. Волосок лампы накаливания, рассчитанной на напряжение 2,0 *В*, имеет длину 10 *см* и диаметр 0,03 *мм*. Полагая, что волосок излучает как а.ч.т., определить температуру нити и длину волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения. Вследствие теплопроводности лампа рассеивает 8% мощности, удельное сопротивление материала волоска $5{,}5\ 10^{-9}\ Ом\cdot м$. ($2{,}4\cdot10^3\ К$; 1,22 *мкм*)

7. По тонкой нихромовой пластинке шириной 1 *см* и площадью поперечного сечения $0{,}001\ см^2$ идет ток. Коэффициент поглощения пластинки 0,34. При каком значении силы тока пластинка будет наиболее эффективным источником света, если максимальная чувствительность человеческого глаза соответствует излучению с длиной волны 0,55 *мкм*? (65 *А*)

8. В какой области спектра лежит длина волны, соответствующая максимуму излучательной способности Солнца, если температура его поверхности 5800 *К*? (0,5 *мкм*)

9. Из отверстия в печи площадью 10 *см*^{2} излучается 250 *кДж* энергии за 1 *мин*. В какой области спектра лежит длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности? (1*мкм*)

10. Длина волны, соответствующая максимуму излучательной способности а.ч.т., 720 *нм*, площадь излучающей поверхности – 5 *см*^{2}. Определить мощность излучения. (7,5 *кВт*)

11. Температура а.ч.т. изменилась при нагревании от 1327 до 1727° *С*. Насколько изменилась при этом длина, на которую приходится максимум излучательной способности, и во сколько раз увеличилась максимальная излучательная способность? (На 360 *нм*; в 3,1 раза)

12. При увеличении термодинамической температуры а.ч.т. в два раза длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшается на 400 *нм*. Определить начальную и конечную температуры. (3620 *К*; 7240 *К*)

13. В черный тонкостенный металлический сосуд, имеющий форму куба, налита вода массой 1 *кг*, нагретая до 323 *К*. Определить время остывания сосуда до 283 *К*, если он помещен в черную полость. Температура стенок поддерживается около 0 *К*, а вода заполняет весь объем сосуда. (1,64 *ч*)

14. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки (3000 *К*); б) поверхность Солнца (6000 *К*); в) атомная бомба, которая в момент взрыва имеет температуру около 10^9 *К*? Излучение считать близким к излучению а.ч.т. (1 *мкм*; 500 *нм*; 300 *нм*)

15. С поверхности сажи площадью 2 *см*^{2} при температуре 400 *К* за время 5 *мин* излучается энергия 83 *Дж*. Определить коэффициент черноты сажи. (0,953)

16. Определить относительное увеличение $\Delta R_e/R_e$ энергетической светимости а.ч.т. при увеличении его температуры на 1%. (4%)

17. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру а.ч.т., чтобы его энергетическая светимость возросла в два раза? (В 1,19 раза)

18. Вследствие изменения температуры а.ч.т. максимум спектральной плотности излучения сместился с 2,4 *мкм* на 0,8 *мкм*. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости? (Увеличилась в 81 и 243 раза)

19. Эталон силы света – кандела представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадью 0,5305 *мм*^{2} имеет температуру затвердевания платины, равную 1769° *С*. Определить мощность излучателя. (95,8 *мВт*)

20. Определить температуру тела, при которой оно при температуре окружающей среды 23° *C* излучало бы энергии в 10 раз больше, чем поглощало. (533 *К*)

21. На какую длину волны приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости а.ч.т. при температуре 0° *С*? (10,6 *мкм*)

22. Температура верхних слоев Солнца 5300 *К*. Считая Солнце а.ч.т., определить длину волны, которой соответствует максимальная спектральная плотность энергетической светимости. (547 *нм*)

23. Определить температуру а.ч.т., при которой максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на красную границу видимого спектра (780 *нм*), на фиолетовую (380 *нм*). (3700 *К*; 7600 *К*)

24. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело при температуре 280 *К*. Определить коэффициент черноты Земли, если энергетическая светимость ее поверхности 325 *кДж*/($м^2$·*ч*). (0,26)

25. Мощность излучения шара радиусом 10 *см* при некоторой постоянной температуре 1000 *Вт*. Найти эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом черноты 0,25. (866 *К*)

2 КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ

Вопросы для обсуждения

Внешний фотоэффект. Внутренний фотоэффект. Законы внешнего фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Красная граница фотоэффекта. Применение фотоэффекта. Опыты Лебедева. Опыты Вавилова и Боте. Фотоны. Давление света. Квантовый и волновой подходы к объяснению давления света.

Краткие теоретические сведения

Фотоэлектрический эффект – вырывание электронов из атомов и молекул вещества под действием света (излучения). Впервые был обнаружен в 1887 г. Г. Герцем.

Если электроны, выбитые светом, вылетают за пределы вещества, фотоэффект называют *внешним*. Он наблюдается главным образом у металлов. Если же оторванные от своих атомов или молекул электроны остаются внутри освещаемого вещества в качестве свободных, фотоэффект называют *внутренним*. Он наблюдается у некоторых полупроводников и в меньшей степени у диэлектриков.

Опытным путем были сформулированы следующие *законы фотоэффекта*:

1. Сила фототока насыщения, возникающая при освещении монохроматическим светом, пропорциональна световому потоку, падающему на катод.

2. Скорость фотоэлектронов увеличивается с ростом частоты (с уменьшением длины волны) падающего света и не зависит от интенсивности светового потока.

3. Независимо от интенсивности светового потока фотоэффект начинается только при определенной для данного металла минимальной частоте (максимальной длине волны) света, называемой *красной границей фотоэффекта*.

Фотоэффект практически *безынерционен*.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2},$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка; ν – частота световой волны; A – работа выхода электрона из металла; m – масса электрона; $\upsilon_{\max}$ – максимальная скорость электронов, покидающих поверхность металла под действием света.

Уравнение Эйнштейна представляет собой закон сохранения и превращения энергии применительно к фотоэффекту. *Красная граница фотоэффекта*

$$\nu_0 = \frac{A_{вых}}{h} \text{ или } \lambda_0 = \frac{hc}{A_{вых}},$$

где $c = 3{,}0\cdot 10^8$ *м/с* – скорость света.

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов равна:

1. Если $h\nu < 5$ *кэВ*, то

$$E_к = \frac{m_0 \upsilon_{\max}^2}{2},$$

где $m_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг* – масса покоя электрона.

2. Если $h\nu >> 5$ *кэВ*, то

$$E_к = (m - m_0)c^2 \text{ или } E_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

где m – масса релятивистского электрона; $\beta = \frac{\upsilon_{\max}}{c}$; $\upsilon_{\max}$ – максимальная скорость электронов.

Свет, падающий на какую-либо поверхность, оказывает на нее давление. Световое давление – это явление, которое обусловлено передачей импульса фотоном телу, с которым он взаимодействует. Давление света при нормальном падении лучей определяется по формуле:

$$p = \frac{nh\nu}{c}(1+\rho) \text{ или } p = \frac{I}{c}(1+\rho) = \omega(1+\rho),$$

где p – давление света, c – скорость света, n – число фотонов, падающих на единицу площади освещаемой поверхности в единицу времени, I – интенсивность падающего излучения, ρ – коэффициент отражения поверхности, ω – объемная плотность энергии.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В чем заключается явление внешнего фотоэффекта? Какова принципиальная схема установки для изучения внешнего фотоэффекта?

2. Какие выводы можно сделать, проанализировав ВАХ вакуумного промежутка, в котором металлический катод освещается светом определенной длины волны?

3. Сформулируйте основные законы внешнего фотоэффекта. Какие из них нельзя объяснить с волновой точки зрения на свет?

4. В чем состоит гипотеза Эйнштейна, использованная для объяснения фотоэффекта? Запишите уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

5. Что такое работа выхода электрона?

6. Что такое красная граница фотоэффекта и как она связана с работой выхода электрона?

7. Что такое задерживающая разность потенциалов? От чего она зависит?

8. Объясните явление давления света с квантовой точки зрения.

9. Какие трудности возникают при измерении давления света и как их удалось преодолеть Лебедеву?

10. В каком случае давление света больше: при падении на черную поверхность или зеркальную?

11. Почему хвост комет всегда направлен от Солнца, хотя между веществом кометы и Солнцем существует гравитационное взаимодействие?

Примеры решения задач

Задача 1. Определить длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 9,8 *В*.

Дано:
$P_ф = P_e$
$U = 9{,}8\ В$

$\lambda - ?$

Решение.

Работа электрического поля идет на изменение кинетической энергии электрона:

$$A = eU = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}. \qquad (1)$$

При равной нулю начальной скорости электрона имеем

$$eU = \frac{m\upsilon^2}{2} \ \Rightarrow\ \upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}}, \qquad (2)$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$ – заряд электрона; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ кг$ – масса электрона.

Импульс электрона:

$$p_e = m\upsilon; \qquad (3)$$

импульс фотона:

$$p_ф = mc = \frac{h}{\lambda}, \qquad (4)$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$ – постоянная Планка; $c = 3{,}0 \cdot 10^8\ м/с$ – скорость света.

Приравнивая правые части (4) и (3) и подставляя выражение для скорости (2), находим

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{h}{m\sqrt{2eU/m}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Проверим размерность:

$$[\lambda] = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{кг \cdot Кл \cdot В}} = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{кг \cdot Кл \cdot \frac{Дж}{Кл}}} = \sqrt{\frac{Дж^2 \cdot с^2}{кг \cdot Дж}} = \sqrt{\frac{кг \cdot \frac{м^2}{с^2} \cdot с^2}{кг}} = м.$$

После вычислений получим

$$\lambda = 3{,}9 \cdot 10^{-10}\ м.$$

Ответ: $\lambda = 3{,}9 \cdot 10^{-10}\ м$.

Задача 2. Фотоны с энергией 5,0 *эВ* вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода 4,7 *эВ*. Определить максимальный импульс, передаваемый поверхности при вылете каждого электрона.

Дано:
$\varepsilon = 5{,}0$ *эВ* $=$
$= 8{,}0\cdot10^{-19}$ *Дж*
$A = 4{,}7$ *эВ* $=$
$= 7{,}52\cdot10^{-19}$ *Дж*
$p - ?$

Решение.

Запишем формулу Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2},$$

где $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг* – масса электрона; $\upsilon_{\max}$ – максимальная скорость вылетающих электронов.

Выражение для кинетической энергии домножим и разделим на m:

$$E_к = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}\cdot\frac{m}{m} = \frac{m^2\upsilon_{\max}^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

где p – импульс электрона. По закону сохранения импульса такой же импульс получит и поверхность при вылете электрона:

$$\varepsilon = A + \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2m(\varepsilon - A)}.$$

Подставив численные значения, находим

$$p = 2{,}95\cdot10^{-25}\ \frac{кг\cdot м}{с}.$$

Ответ: $p = 2{,}95\cdot10^{-25}$ *кг·м/с*.

Задача 3. Какова максимальная скорость электронов, вылетающих с поверхности молибдена при освещении его светом длиной волны 200 *нм*?

Дано:
$\lambda = 200$ *нм* $=$
$= 2{,}0\cdot10^{-7}$ *м*
$A = 4{,}2$ *эВ* $=$
$= 6{,}72\cdot10^{-19}$ *Дж*
$\upsilon - ?$

Решение.

Исходим из формулы Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где ν – частота световой волны; $h = 6{,}63\cdot10^{-34}\ Дж\cdot с$ – постоянная Планка.

Длина волны, частота и скорость света связаны соотношением:

$$c = \lambda\nu \ \Rightarrow\ \nu = \frac{c}{\lambda}.$$

С учетом этого

$$h\frac{c}{\lambda} = A + \frac{m\upsilon^2}{2} \ \Rightarrow\ \upsilon = \sqrt{\frac{2\left(h\frac{c}{\lambda} - A\right)}{m}}.$$

Проверим размерность:

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\dfrac{Дж \cdot c \cdot \dfrac{м}{c}}{м} - Дж}{кг}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}} = \frac{м}{c}.$$

Произведя вычисления, найдем

$$\upsilon = 8{,}4 \cdot 10^5 \ м/c.$$

Ответ: $\upsilon = 8{,}4 \cdot 10^5 \ м/c.$

Задача 4. Красная граница фотоэффекта для платины лежит около 198 *нм.* Если платину прокалить при высокой температуре, то красная граница станет равна 220 *нм.* На сколько *эВ* прокаливание уменьшит работу выхода?

Дано:

λ_{01} = 198 *нм* = = $1{,}98 \cdot 10^{-7}$ *м*

λ_{02} = 220 *нм* = = $2{,}20 \cdot 10^{-7}$ *м*

ΔA – ?

Решение.

Красная граница фотоэффекта определяется из соотношения:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A}, \qquad (1)$$

где $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ $Дж \cdot c$ – постоянная Планка.

Из (1) выразим работу выхода электрона из металла:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0}. \qquad (2)$$

Для двух случаев соответственно получаем:

$$A_1 = \frac{hc}{\lambda_{01}} \ \text{и} \ A_2 = \frac{hc}{\lambda_{02}} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta A = \frac{hc}{\lambda_{01}} - \frac{hc}{\lambda_{02}} = hc\left(\frac{1}{\lambda_{01}} - \frac{1}{\lambda_{02}}\right).$$

Произведя вычисления, найдем

$$\Delta A = 9{,}6 \cdot 10^{-20} \ Дж;$$

полученное значение переведем в электрон-вольты:

$$1эВ = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \ Дж,$$

$$\Delta A = 0{,}6 \ эВ.$$

Ответ: $\Delta A = 0{,}6$ *эВ*.

Задача 5. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра γ-излучением с длиной волны 2,47 *пм*.

Дано:
λ = 2,47 *нм* = = $2{,}47 \cdot 10^{-12}$ *м*

υ – ?

Решение.

Энергия γ-кванта равна

$$\varepsilon = h\frac{c}{\lambda},$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка;
$c = 3{,}0 \cdot 10^{8}$ *м/с* – скорость света.

Подставляя численные значения, найдем

$$\varepsilon = 5{,}0 \cdot 10^{5} \text{ эВ}.$$

Работа выхода для серебра $A = 4{,}7$ *эВ* много меньше энергии γ-кванта, поэтому можно принять, что кинетическая энергия электрона равна энергии фотона $E_к = \varepsilon = 5{,}0 \cdot 10^{5}$ *эВ*. В этом случае для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии:

$$E_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{(2m_0c^2 + E_к)E_к}}{m_0c^2 + E_к},$$

где $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* – масса покоя электрона.

Проверим размерность:

$$[\beta] = \frac{\sqrt{(кг \cdot м^2/c^2 + м^2 \cdot кг/c^2) \cdot м^2 \cdot кг/c^2}}{кг \cdot м^2/c^2 + м^2 \cdot кг/c^2} = 1.$$

Вычислим β:

$$\beta = 0{,}755,$$

т. к. $\beta = \dfrac{\upsilon}{c} \Rightarrow \upsilon = \beta c.$

Откуда

$$\upsilon = 2{,}26 \cdot 10^{8} \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 2{,}26 \cdot 10^{8}$ *м/с*.

Задача 6. На поверхность площадью 10 $см^2$ ежесекундно падает нормально $1{,}0 \cdot 10^{8}$ фотонов. Длина волны падающего света 500 *нм*. Определить световое давление на поверхность, если ее коэффициент отражения 0,7.

Дано:
$S = 10$ $см^2$ = = $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ $м^2$
$n = 1{,}0 \cdot 10^{8}$ $с^{-1}$
λ = 500 *нм* = = $5{,}0 \cdot 10^{-7}$ *м*
$\rho = 0{,}7$

P – ?

Решение.

Для вычисления давления света при нормальном падении лучей воспользуемся формулой:

$$P = \frac{I}{c}(1+\rho),$$

где I – интенсивность света, определяемая как отношение мощности излучения к его площади −

$$I = \frac{\Phi}{S}.$$

Число фотонов, падающих за 1 *с* на поверхность, равно

$$n = \frac{\Phi}{\varepsilon},$$

т. к. $\varepsilon = h\dfrac{c}{\lambda}$, то $n = \dfrac{\Phi\lambda}{hc} \Rightarrow \Phi = \dfrac{hnc}{\lambda}$,

тогда

$$I = \frac{hcn}{\lambda S}.$$

С учетом этого

$$P = \frac{hn}{\lambda S}(\rho + 1).$$

Проверим размерность:

$$[P] = \frac{Дж \cdot с \cdot с^{-1}}{м \cdot м^2} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{кг \cdot с^{-2}}{м} = Па.$$

Выполнив вычисления, получим

$$P = 2,26 \cdot 10^{-16}\, Па.$$

Ответ: $P = 2,26 \cdot 10^{-16}$ *Па*.

Задача 7. Электрическая лампочка имеет мощность 45,0 *Вт*. Вычислить давление света на зеркальную поверхность с коэффициентом отражения 1,0, расположенную нормально к падающим лучам на расстоянии 1,0 *м* от лампы.

Дано:
$N = 45,0$ *Вт*
$r = 1,0$ *м*
$\rho = 1,0$

P – ?

Решение.
Световое давление вычислим по формуле:

$$P = \frac{I}{c}(1 + \rho),$$

где I – интенсивность света; $c = 3,0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света.

С другой стороны, $I = \dfrac{N}{S}$, где S – площадь поверхности, на которую падает свет. Будем считать электрическую лампочку точечным источником света. Окружим точечный источник шаровой поверхностью. Ее площадь на расстоянии r от источника равна

$$S = 4\pi r^2.$$

С учетом этого

$$P = \frac{N(\rho + 1)}{4\pi r^2 c} = \frac{N}{2\pi r^2 c}.$$

Проверим размерность:

$$[P] = \frac{Вт}{м^2 \cdot м/с} = \frac{м^2 \cdot кг/с^3}{м^3/с} = \frac{кг}{м \cdot с^2} = Па.$$

Подставив числовые значения, найдем

$$P = 2,4 \cdot 10^{-8}\, Па.$$

Ответ: $P = 2,4 \cdot 10^{-8}$ *Па*.

Задача 8. Пучок монохроматического света с длиной волны 663 *нм* падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии 0,6 *Вт*. Определить силу давления на поверхность и число фотонов, падающих на нее за 5,0 *с*.

Дано:
$\Phi = 0,6$ *Вт*
$\lambda = 663$ *нм* $= 6,63 \cdot 10^{-7}$ *м*
$t = 5,0$ *с*

$F - ?$
$N - ?$

Решение.

Сила светового давления равна

$$F = PS, \qquad (1)$$

где P – давление света; S – площадь поверхности.

Давление света найдем по формуле:

$$P = \frac{I}{c}(1+\rho), \qquad (2)$$

где I – интенсивность света; $c = 3,0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света; ρ − коэффициент отражения, для зеркальной поверхности $\rho = 1,0$.

Подставим (2) в (1):

$$F = \frac{IS}{c}(1+\rho). \qquad (3)$$

Т. к. $I = \frac{\Phi}{S}$, то $F = \frac{\Phi}{c}(\rho+1) = \frac{2\Phi}{c}$.

Проверим размерность и выполним вычисления:

$$[F] = \frac{м^2 \cdot кг/с^3}{м/с} = м \cdot кг/с^2 = Н;$$

$$F = 4,0 \cdot 10^{-9}\, Н.$$

Число фотонов, падающих на поверхность, равно

$$N = \frac{W}{\varepsilon}, \qquad (4)$$

где W – энергия излучения, получаемая поверхностью за время t.

$$W = \Phi t \;\Rightarrow\; N = \frac{\Phi t}{\varepsilon}, \qquad (5)$$

где $\varepsilon = h\nu$ − энергия кванта света. Тогда с учетом $c = \lambda\,\nu$ получим

$$W = \frac{\Phi \lambda t}{hc}.$$

Проверим размерность:

$$[N] = \frac{Вт \cdot м \cdot с}{Дж \cdot с \cdot м / с} = \frac{Вт \cdot с}{Дж} = \frac{Дж}{Дж} = 1.$$

Выполнив вычисления, найдем

$$N = 1{,}0 \cdot 10^{18}.$$

Ответ: $N = 1{,}0 \cdot 10^{18}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить пределы (в *эВ*), в которых находится энергия фотонов, соответствующая видимой части спектра. (1,6−3,1 *эВ*)

2. При какой скорости импульс электрона совпадает по модулю с импульсом фотона, длина волны которого 0,001 *нм*? (0,92 *с*)

3. При какой температуре кинетическая энергия молекулы двухатомного газа будет равна энергии фотона с длиной волны 589 *нм*? ($9{,}8 \cdot 10^3$ *K*)

4. Найти массу фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода при температуре 20° *С*. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости. ($2{,}1 \cdot 10^{-32}$ *кг*)

5. Принадлежит ли к составу видимого света излучение, фотоны которого обладают энергией $6{,}0 \cdot 10^{-19}$ *Дж*? (Нет)

6. Определить длину волны, если соответствующий фотон обладает энергией $1{,}0 \cdot 10^{-19}$ *Дж*. К какой части спектра принадлежит эта длина волны? (2 *мкм* − инфракрасная часть спектра)

7. Какая длина волны соответствует фотону, релятивистская масса которого $1{,}66 \cdot 10^{-30}$ *кг*? (1,33 *пм*)

8. Энергия фотона 1,0 *МэВ*. Определить импульс фотона. ($5{,}33 \cdot 10^{-22}$ *кг·м/с*)

9. Точечный источник света потребляет мощность 100,0 *Вт* и равномерно испускает свет во все стороны. Длина волны испускаемого при этом света 589 *нм*. КПД источника 0,1%. Вычислить число фотонов, испускаемых источником за 1,0 *с*. ($3{,}0 \cdot 10^{17}$)

10. Будет ли иметь место фотоэффект у лития, если он освещается монохроматическим светом с длиной волны 589 *нм*? (Нет)

11. Определить красную границу фотоэффекта для платины и серебра. (235 *нм*; 262 *нм*)

12. Красная граница фотоэффекта для железа, ртути и лития определяется соответственно длинами волн 262, 274 и 517 *нм*. Найти работу выхода электронов из металла и выразить ее в *эВ*. (4,7 *эВ*; 4,5 *эВ*; 2,4 *эВ*)

13. Какова максимальная скорость электронов, вылетающих с поверхности молибдена при освещении его лучами с длиной волны 200 *нм*? (840 *км*/*с*)

14. Определить задерживающее напряжение, необходимое для прекращения эмиссии электронов с фотокатода, если на его поверхность падает излучение с длиной волны 0,4 *мкм*, а красная граница фотоэффекта 0,67 *мкм*. (13,5 *В*)

15. Красной границе фотоэффекта для алюминия соответствует длина волны 332 *нм*. Найти: а) работу выхода электрона из металла; б) длину световой волны, при которой задерживающий потенциал 1 *В*. (3,74 *эВ*; 62 *нм*)

16. До какого потенциала можно зарядить удаленный от других тел цинковый шарик, облучая его излучением с длиной волны 200 *нм*? (2,5 *В*)

17. Если поочередно освещать поверхность металла излучением с длинами волн 350 и 450 *нм*, то максимальные скорости фотоэлектронов будут отличаться в 2 раза. Определить работу выхода электрона из металла. (1,9 *эВ*)

18. Излучение с энергией 15 *Дж* освещает нормально площадку 2 $см^2$ в течение 61 *с*. Определить световое давление в случаях: а) полного поглощения энергии; б) полного отражения энергии. ($4{,}2\cdot10^{-6}$ *Па*; $84{,}0\cdot10^{-6}$ *Па*)

19. На зеркало площадью 10 $см^2$ каждую секунду падает по нормали $1{,}0\cdot10^{18}$ фотонов. Определить давление света, если длина волны фотонов 400 *нм*, а коэффициент отражения 0,75. ($3\cdot10^{-6}$ *Па*)

20. Параллельные лучи длиной 0,5 *мкм* падают нормально на черную поверхность, при этом давление равно $1{,}0\cdot10^{-9}$ *Па*. Определить число фотонов, заключенных в 1,0 *м* падающего светового потока. ($3{,}0\cdot10^{9}$)

21. Солнечные лучи за год приносят на Землю энергию, равную $5{,}4\cdot10^{24}$ *Дж*. На сколько изменилась бы масса Земли за 100 лет, если бы она поглощала всю эту энергию. (На $6{,}0\cdot10^{9}$ *кг*)

22. Во сколько раз давление синего света (400 *нм*) больше давления красного света (700 *нм*), если число фотонов обоих излучений, упавших нормально на одну и ту же поверхность, одинаково? (В 1,75 раз)

23. На идеально отражающую плоскую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,55 *мкм*. Поток излучения составляет 0,45 *Вт*. Определить число фотонов, падающих на поверхность за время 3,0 *с* и силу давления, испытываемую этой поверхностью. ($4{,}15\cdot10^{18}$; 3,0 *нН*)

24. Плоская световая волна интенсивностью 0,1 $Вт/см^2$ падает под углом 30° на плоскую отражающую поверхность с коэффициентом отражения 0,7. Используя квантовые представления, определить нормальное давление, оказываемое светом на эту поверхность. (4,25 *мкПа*)

3 РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Вопросы для обсуждения

Тормозное и характеристическое рентгеновское излучение. Рентгеновские спектры. Закон Мозли. Применение рентгеновского излучения. Эффект Комптона. Комптоновская длина волны.

Краткие теоретические сведения

Наиболее распространенным источником рентгеновского излучения является рентгеновская трубка (рисунок 1), в которой сильно ускоренные электрическим полем электроны бомбардируют анод *A*, изготовленный из тяжелых металлов (W, Cu, Pt и т. д.), испытывая на нем резкое торможение. При этом возникает рентгеновское излучение, представляющее собой электромагнитные волны с длиной волны примерно $10^{-12} - 10^{-8}$ *м*.

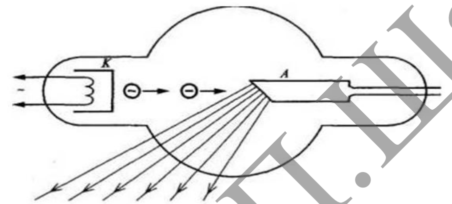


Рисунок 1 – Схематическое изображение рентгеновской трубки

Спектр рентгеновского излучения состоит из сплошного спектра *тормозного излучения*, возникающего при торможении электронов в аноде, и линейчатого спектра *характеристического излучения*, определяемого материалом анода.

Тормозное излучение имеет коротковолновую границу $\lambda_{\min}$, называемую *границей сплошного спектра*, которая соответствует ситуации, при которой вся энергия электрона переходит в энергию рентгеновского кванта:

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = eU,$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж*$\cdot$*с* – постоянная Планка; *e* – заряд электрона, *U* – разность потенциалов.

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}$$

не зависит от материала анода, а определяется только напряжением на трубке.

Закон, связывающий частоты линий с атомным номером *Z* испускающего их элемента, называется *законом Мозли*:

$$\nu = R\ (Z-b)^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right),$$

где Z – порядковый номер элемента, из которого сделан антикатод; b – постоянная экранирования; k – номер орбиты, с которой переходит электрон; n – номер орбиты, на которою переходит электрон; R – постоянная Ридберга, $R = 3{,}29\cdot10^{15}\ c^{-1}$.

Закон Мозли обычно выражают формулой:

$$\sqrt{\nu} = C\ (Z-b),$$

(C и b − константы) и формулируют следующим образом: *корень квадратный из частоты является линейной функцией его порядкового номера Z.*

Эффект Комптона – упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и γ-излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны. Это увеличение $\Delta\lambda$ не зависит от длины волны λ падающего излучения и природы рассеивающего вещества:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi) \text{ или } \Delta\lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

где c – скорость света; m – масса электрона отдачи; λ_1 – длина волны излучения до рассеяния; λ_2 – длина волны излучения после рассеяния; h – постоянная Планка.

Комптоновская длина волны определяется согласно

$$\lambda_k = \frac{h}{mc};$$

для электрона $\lambda_k = 2{,}426\cdot10^{-12}$ *м*.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как получают в настоящее время рентгеновское излучение?
2. Каков физический механизм возникновения тормозного рентгеновского излучения? Характеристического излучения?
3. Чем отличаются спектры тормозного и характеристического излучений?
4. Как объясняется наличие коротковолновой границы спектра у тормозного спектра?
5. Почему спектр характеристического излучения иногда называют белым?
6. В чем отличие оптических спектров от спектров характеристического излучения?
7. Запишите закон Мозли. Что такое постоянная экранирования?
8. В чем состоит эффект Комптона и для каких веществ он наблюдается?

9. Запишите формулу для смещения длины волны при комптоновском рассеянии рентгеновского излучения.

10. Каков физический механизм эффекта Комптона?

11. Какие законы выполняются при комптоновском рассеянии излучения? Запишите их.

12. Почему длина волны рассеянного излучения, как правило, больше, чем длина волны падающего излучения?

13. Как объясняется наличие в составе рассеянного излучения «несмещенной» линии?

Примеры решения задач

Задача 1. Наименьшая длина волны сплошного рентгеновского спектра, полученного в результате торможения электронов на антикатоде, 0,5 *нм*. Какова наибольшая скорость электронов?

Дано:
$\lambda_m = 0{,}5$ *нм* $= 5{,}0 \cdot 10^{-10}$ *м*

$\upsilon - ?$

Решение.

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра определяется соотношением:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU},$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка; $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}$ *м/с* – скорость света; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* – заряд электрона.

$A = eU$ – работа электрического поля, которая идет на изменение кинетической энергии электрона, и т. к. электрон начинает двигаться с катода, то его начальная скорость равна нулю, поэтому $eU = \frac{m\upsilon^2}{2}$, т. е. работа электрического поля равна кинетической энергии в конце движения. Поэтому можно записать

$$\lambda_m = \frac{2hc}{m\upsilon^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda_m}}.$$

Проверим размерность:

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{Дж \cdot с \cdot м / с}{кг \cdot м}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}} = \sqrt{\frac{м^2 \cdot кг / с^2}{кг}} = м / с.$$

Выполнив вычисления, найдем

$$\upsilon = 2{,}96 \cdot 10^{7}\ м / с.$$

Ответ: $\upsilon = 2{,}96 \cdot 10^{7}$ *м/с*.

Задача 2. Принимая для молибдена постоянную экранирования $b = 1{,}0$, найти, при каком максимальном напряжении на рентгеновской трубке с молибденовым катодом появляются линии K_α.

Дано:	*Решение.*
$b = 1{,}0$	Запишем закон Мозли для K_α-линий:
$U - ?$	

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4} R'(Z-1)^2,$$

где $R' = 1{,}1 \cdot 10^7\, м^{-1}$ – постоянная Ридберга; $Z = 42$ – порядковый номер молибдена.

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3R'(z-1)^2};$$

$$\lambda_{K_\alpha} = 7{,}2 \cdot 10^{-11}\, м.$$

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра определяется соотношением:

$$\lambda_m = \frac{hc}{eU} \;\Rightarrow\; U = \frac{hc}{e\lambda_m},$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Дж \cdot с$ – постоянная Планка; $c = 3{,}0 \cdot 10^8\, м/с$ – скорость света; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, Кл$ – заряд электрона.

Проверим размерность:

$$[U] = \frac{Дж \cdot с \cdot м/с}{Кл \cdot м} = \frac{Дж}{Кл} = \frac{м^2 \cdot кг/с^2}{с \cdot А} = \frac{м^2 \cdot кг}{с^3 \cdot А} = В.$$

Подставляя численные значения, получим

$$U = 1{,}73 \cdot 10^4\ В.$$

Ответ: $U = 1{,}73 \cdot 10^4\ В$.

Задача 3. Рентгеновские лучи с длиной волны 70,8 *нм* испытывают комптоновское рассеяние. Найти длину волны рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) 90°, б) 180°.

Дано:	*Решение.*
$\lambda = 70{,}8\ нм =$ $= 7{,}08 \cdot 10^{-8}\ м$	Запишем формулу Комптона:
$\varphi_1 = 90^\circ$	
$\varphi_2 = 180^\circ$	
$\lambda'_1 - ?$	
$\lambda'_2 - ?$	

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\lambda'_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi_1) + \lambda;$$

$$\lambda'_2 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi_2) + \lambda,$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж · с* – постоянная Планка; $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* – масса электрона.

Вычислим длины волн рентгеновских лучей:

$$\lambda_1' = 7{,}32 \cdot 10^{-11} \text{ м};$$

$$\lambda_2' = 7{,}56 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda_1' = 7{,}32 \cdot 10^{-11}$ *м*; $\lambda_2' = 7{,}56 \cdot 10^{-11}$ *м.*

Задача 4. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на 90°. Энергия рассеянного фотона 0,4 *МэВ*. Определить энергию фотона до рассеяния.

Дано:
$\varphi = 90°$
$\varepsilon' = 0{,}4$ *МэВ* = $= 6{,}4 \cdot 10^{-14}$ *Дж*

ε – ?

Решение.

Энергия фотона равна

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка, λ − длина волны фотона, $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света.

Запишем формулу Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi). \qquad (2)$$

Формула (2) с учетом (1) примет вид:

$$\frac{hc}{\varepsilon'} - \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi). \qquad (3)$$

Умножим числитель и знаменатель правой части (3) на c и сократим на hc, в результате найдем искомую энергию:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' mc^2}{mc^2 - \varepsilon'(1 - \cos\varphi)};$$

$$\varepsilon = 2{,}96 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Ответ: $\varepsilon = 2{,}96 \cdot 10^{-13}$ *Дж.*

Задача 5. Фотон с энергией 0,75 *МэВ* рассеялся на свободном электроне под углом 60°. При этом его энергия стала 0,43 *МэВ*. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить направление движения электрона.

Дано:
$\theta = 60°$
$\varepsilon = 0{,}75$ *МэВ* $= 1{,}2\cdot10^{-13}$ *Дж*
$\varepsilon' = 0{,}43$ *МэВ* $= 6{,}9\cdot10^{-14}$ *Дж*

$\varphi - ?$

Решение.

Согласно закону сохранения импульса, импульс падающего фотона $\vec{p}$ равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона $\vec{p'}$ и электрона отдачи $m\vec{\upsilon}$ (рисунок 2):

$$\vec{p} = \vec{p'} + m\vec{\upsilon}.$$

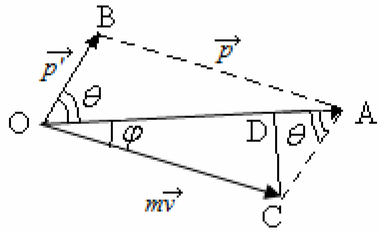


Рисунок 2 – Векторная диаграмма импульсов при эффекте Комптона

На рисунке 2 O − точка соударения. Рассмотрим треугольник ΔOCD:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{CD}{OD} = \frac{CA\cdot\sin\theta}{OA - CA\cdot\cos\theta} \quad \text{или}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{p'\sin\theta}{p - p'\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{p}{p'} - \cos\theta}.$$

Импульс фотона равен

$$P = mc.$$

Домножим последнее равенство на c:

$$Pc = mc^2 = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\varepsilon}{c}.$$

С учетом этого

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \cos\theta}.$$

Подставив численные значения, находим

$$\mathrm{tg}\varphi = 0{,}7 \text{, тогда } \varphi = 35°.$$

Ответ: $\varphi = 35°$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить длину волны, соответствующую коротковолновой границе рентгеновского спектра, для случая, когда к трубке приложено напряжение 50 *кВ*. (25 *пм*)

2. Определить скорость электронов, падающих на антикатод рентгеновской трубки, если минимальная длина волны в сплошном спектре рентгеновского излучения равна 1 *нм*. (21 *Мм*/*с*)

3. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке от 16 до 24 *кВ* длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на 26 *пм*. Определить по этим данным числовое значение постоянной Планка. ($6{,}6\cdot10^{-34}$ *Дж*·*с*)

4. Увеличение напряжения на рентгеновской трубке в 2 раза сопровождается изменением длины волны, отвечающей коротковолновой границе рентгеновского спектра, на 25 *пм*. Определить первоначальное напряжение, приложенное к трубке. (25 *кВ*)

5. Принимая поправку на экранирование электронов атома молибдена, равной 0,5, вычислить длину волны излучения, испускаемого рентгеновской трубкой с молибденовым антикатодом. (0,07 *нм*)

6. Вычислить наибольшую длину волны в *К*-серии характеристического рентгеновского спектра скандия. (304 *нм*)

7. При исследовании линейчатого рентгеновского спектра некоторого элемента было найдено, что длина волны линии равна 76 *нм*. Какой это элемент? (Ниобий; $Z = 41$)

8. Какую наименьшую разность потенциалов $U_{\min}$ нужно приложить к рентгеновской трубке, антикатод которой покрыт ванадием ($Z = 23$), чтобы в спектре рентгеновского излучения появились все линии *К*-серии ванадия? Граница *К*-серии ванадия 226 *пм*. (5,5 *кВ*)

9. Определить максимальное изменение длины волны при комптоновском рассеянии на свободных электронах, на свободных протонах. (4,84 *пм*; 2,64 *пм*)

10. В атоме вольфрама электрон перешел с *М*-слоя на *L*-слой. Принимая постоянную экранирования 5,5, определить длину волны испущенного фотона. (0,14 *нм*)

11. Если известно, что длина волны *К*-линии железа равна 193 *пм*, подсчитать длину волны *К*-линии меди. (154 *пм*)

12. Какие элементы содержатся в ряду между теми, у которых длины волн *К*-линий 193 *пм* и 154 *пм*? (Co, Ni)

13. Определить интервал длин волн между *К*-линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра с медным антикатодом при напряжении 20 *кВ*. (2 *пм*)

14. Разность длин волн между K_α-линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра 84 *пм*. Чему равно напряжение на рентгеновской трубке с никелевым антикатодом ($Z = 28$)? (15 *кВ*)

15. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке от 10 до 30 *кВ* интервал длин волн между *К*-линией и коротковолновой границей увеличивается в 3 раза. Из какого металла сделан антикатод трубки? (Cu; $Z = 29$)

16. Рентгеновские лучи с длиной волны 70,8 *пм* испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) $\pi/2$; б) π. (73,2 *пм*; 75,6 *пм*)

17. Рентгеновские лучи с длиной волны 20 *пм* испытывают комптоновское рассеяние под углом 90°. Найти изменение длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию и импульс электрона отдачи. (2,42 *пм*; 6,6 *кэВ*; $4{,}4\cdot10^{-23}$ *кг·м/с*)

18. Длина волны фотона равна комптоновской длине волны электрона. Определить энергию и импульс фотона. (0,511 *МэВ*; $2{,}7\cdot10^{-27}$ *кг·м/с*)

19. Фотон с энергией 1,0 *МэВ* рассеялся на свободном покоящемся электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25%. (0,2 *МэВ*)

20. Фотон с энергией 0,15 *МэВ* рассеялся на покоящемся свободном электроне, в результате его длина изменилась на 3,0 *пм*. Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон. (31°)

21. Определить кинетическую энергию, приобретаемую первоначально покоившейся свободной частицей массой m при рассеянии на ней под углом θ фотона с энергией ε.

22. Определить длину волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения под углом 60° длина волны рассеянного излучения оказалась равной 57 *пм*. (56,9 *пм*)

23. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказывается, что длины волн рассеянного под углами 60° и 120° излучения отличаются в 1,5 раза. Определить длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходят на свободных электронах. (3,64 *пм*)

24. Фотон с энергией 0,3 Мэ*В* рассеялся под углом 180° на свободном электроне. Определить долю энергии фотона, приходящуюся на рассеянный фотон. (0,461)

25. Фотон с энергией 100,0 *кэВ* в результате комптоновского эффекта рассеялся при соударении со свободным электроном на угол $\pi/2$. Определить энергию фотона после рассеяния. (87,3 *кэВ*)

4 ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

Вопросы для обсуждения

Волны де Бройля. Опыты по дифракции электронов. Принцип неопределенностей Гейзенберга. Волновая функция и ее физический смысл. Уравнение Шредингера. Квантование энергии линейного гармонического осциллятора. Частица в потенциальной яме. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Движение частицы в центрально-симметричном поле.

Краткие теоретические сведения

Гипотеза Луи де Бройля: электроны и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами. Корпускулярные характеристики – энергия E и импульс p, волновые характеристики – частота ν и длина волны λ.

Формула де Бройля устанавливает зависимость длины волны, связанной с движущейся частицей вещества, от импульса p частицы:

а) в классическом приближении ($\upsilon \ll c$; $p = m_0\upsilon$)

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где h – постоянная Планка; υ – скорость частицы; m_0 – масса покоя частицы; c – скорость света;

б) в релятивистском случае ($\upsilon \approx c$; $p = m \cdot \upsilon = \dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$)

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Связь длины волны де Бройля с кинетической энергией частицы $E_к$:

а) в классическом случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_к}};$$

б) в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_к(E_к - 2E_0)}},$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга: микрочастица не может иметь одновременно определенную координату (x, y, z) и определенную соответствующую проекцию импульса (p_x, p_y, p_z), причем неопределенности этих величин удовлетворяют соотношениям:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_z \Delta z \geq \frac{\hbar}{2},$$

т. е. произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка $\hbar/2$.

Для неопределенности энергии ΔE некоторого состояния системы и промежутка времени Δt, в течение которого это состояние существует, также выполняется соотношение неопределенностей:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2},$$

т. е. система, имеющая среднее время жизни Δt, не может быть охарактеризована определенным значением энергии.

Положение частицы в пространстве в данный момент времени определяется в квантовой механике заданием *волновой функции* $\Psi(x, y, z, t)$. Вероятность dW обнаружить частицу в интервале x до $x + dx$ (в одномерном случае) равна

$$dW = \left|\Psi(x)\right|^2 dx,$$

где $\left|\Psi(x)\right|^2$ − плотность вероятности.

Вероятность обнаружить частицу в интервале x_1 до x_2 находится интегрированием dW в указанных пределах:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left|\Psi(x)\right|^2 dx.$$

Временным уравнением Шредингера называется основное дифференциальное уравнение квантовой механики относительно волновой функции $\Psi(x, y, z, t)$. Оно определяет Ψ-функцию для микрочастиц, движущихся в силовом поле с потенциальной энергией $U(x, y, z, t)$ со скоростью $x << c$, где c – скорость света в вакууме. Уравнение Шредингера имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t)\Psi,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где Δ – оператор Лапласа; m – масса частицы; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$; h – постоянная Планка; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Уравнение Шредингера дополняется условиями, которые накладываются на Ψ-функцию:

а) функция Ψ должна быть конечной, однозначной и непрерывной;

б) производные $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}$ должны быть непрерывны;

в) функция $|\Psi|^2$ должна быть интегрируема, т. е. интеграл $\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int|\Psi|^2\,dxdydz$ должен быть конечным.

В случае, когда функция U не зависит от времени $(\partial U/\partial t = 0)$, решение временного уравнения Шредингера имеет вид $\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\cdot\phi(t)$, причем координатная часть волновой функции $\psi(x,y,z)$ удовлетворяет *стационарному уравнению Шредингера:*

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0,$$

где E – полная энергия частицы. Функции ψ, удовлетворяющие уравнению Шредингера при заданном виде $U = U(x,y,z)$, называются *собственными функциями.* Они существуют лишь при определенных значениях E, называемых *собственными значениями энергии*. Совокупность собственных значений E образует *энергетический спектр частицы*. В зависимости от вида функции $U(x,y,z)$ энергетический спектр частицы может быть *дискретным* или *непрерывным*. Нахождение собственных значений и собственных функций составляет важнейшую задачу квантовой механики.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Приведите примеры явлений, в которых проявляется корпускулярно-волновой дуализм электромагнитных волн (света).
2. В чем состоит гипотеза де Бройля? Запишите формулу для определения длины волны де Бройля для микрочастиц.
3. Запишите и объясните соотношения неопределенностей: а) для координаты и проекций импульса частицы; б) для энергии и времени.
4. Что такое неопределенность данной физической величины?
5. Что такое волновая функция и каков ее статистический смысл?
6. Каким условиям должна удовлетворять волновая функция?
7. Запишите уравнение Шредингера для стационарного состояния.
8. В чем отличие между преодолением потенциального барьера микрочастицей и классической частицей?

Примеры решения задач

Задача 1. Найти длину волны де Бройля для электронов, прошедших разность потенциалов 1,0 *В*; 1,0 *кВ*.

Дано:	Решение.
$U_1 = 1{,}0\ В$ $U_2 = 1{,}0\ кВ =$ $= 1{,}0 \cdot 10^3\ В$	
$\lambda - ?$	

Длина волны де Бройля определяется соотношением:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon}, \qquad (1)$$

где m – масса электрона; υ – скорость электрона; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка; p – импульс.

Если скорость частицы соизмерима со скоростью света, то

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}, \qquad (2)$$

где $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* − масса покоя электрона; $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с* − скорость света.

Пройдя ускоряющую разность потенциалов, электрон приобретает кинетическую энергию, при этом

$$eU = \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \qquad (3)$$

Выполним вычисления:

Для $U_1 = 1{,}0\ В$, $\upsilon_1 = 6{,}0 \cdot 10^5\ м/с$;

Для $U_2 = 1{,}0 \cdot 10^3 В$, $\upsilon_2 = 2{,}0 \cdot 10^7\ м/с$.

Исходя из результатов вычисления скорости, видно, что в первом случае для нахождения длины волны де Бройля можно применить уравнение (1), во втором случае лучше использовать уравнение (2):

$\lambda_1 = 1{,}22 \cdot 10^{-9}\ м$;

$\lambda_2 = 3{,}7 \cdot 10^{-11}\ м$.

Ответ: $\lambda_1 = 1{,}22 \cdot 10^{-9}\ м$; $\lambda_2 = 3{,}7 \cdot 10^{-11}\ м$.

Задача 2. α-частица движется по окружности радиусом 8,3 *см* в однородном магнитном поле напряженностью 19,0 *кА/м*. Найти длину волны де Бройля.

Дано:	Решение.
$R = 8{,}3\ см =$ $= 8{,}3 \cdot 10^{-2}\ м$ $H = 19{,}0\ кА/м =$ $= 1{,}9 \cdot 10^4\ А/м$	
$\lambda - ?$	

На заряженную частицу, движущуюся со скоростью υ в магнитном поле индукцией B, действует сила Лоренца:

$$F = q\upsilon B \sin\alpha, \qquad (1)$$

где $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ *Кл* – заряд α-частицы.

При движении по окружности угол между направлением скорости и вектором индукции 90°, поэтому $\sin\alpha = 1$. В этом случае сила Лоренца является центростремительной и сообщает частице нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (2)$$

Тогда по второму закону Ньютона

$$F = \frac{m\upsilon^2}{R}. \qquad (3)$$

Приравнивая правые части (1) и (3), находим скорость:

$$\upsilon = \frac{qBR}{m}, \qquad (4)$$

где $m = 6{,}68 \cdot 10^{-27}$ *кг* − масса α-частицы.

Используя соотношение между индукцией и напряженностью магнитного поля

$$B = \mu\mu_0 H \qquad (5)$$

и учитывая, что для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1{,}0$, выражение для скорости примет вид:

$$\upsilon = \frac{q\mu_0 HR}{m}, \qquad (6)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* – магнитная постоянная.

Проверим размерность:

$$[\upsilon] = \frac{Кл \cdot Гн \cdot А \cdot м}{кг \cdot м \cdot м} = \frac{А \cdot с \cdot м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2} \cdot А}{м \cdot кг} = \frac{м}{с}.$$

Вычислим скорость α-частицы:

$$\upsilon = 9{,}24 \cdot 10^3\, м/с.$$

Длину волны де Бройля можно рассчитать по формуле:

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}.$$

Подставив численные значения, находим

$$\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-11}\, м.$$

Ответ: $\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-11}\, м.$

Задача 3. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l. Вычислить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен в средней трети ямы.

Дано:
l
$n = 2$

$W - ?$

Решение.

Вероятность обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$ равна

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx, \qquad (1)$$

где $\psi(x)$ − нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x. \qquad (2)$$

С учетом этого формула (1) примет вид:

$$W = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx. \qquad (3)$$

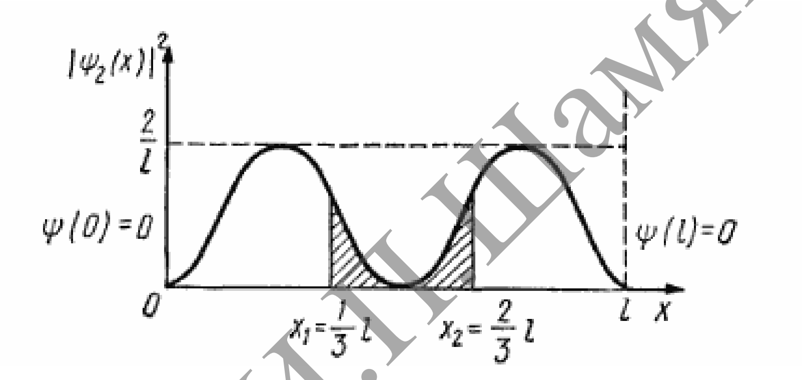


Рисунок 3 – Плотность вероятности обнаружения электрона в средней трети ямы

По условию $x_1 = \frac{1}{3} l$, $x_2 = \frac{2}{3} l$. В (3) произведем замену $\sin^2 \frac{2\pi}{l} x = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{4\pi}{l} x)$ и разобьем интеграл на два:

$$W = \frac{1}{l}\left(\int_{\frac{1}{3}l}^{\frac{2}{3}l} dx - \int_{\frac{1}{3}l}^{\frac{2}{3}l} \cos \frac{4\pi}{l} x dx\right) = \frac{1}{l}\left(\frac{l}{3} - \frac{l}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{l} x \Big|_{\frac{1}{3}l}^{\frac{2}{3}l}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \sin \frac{2\pi}{3} = 0{,}195.$$

Ответ: $W = 0{,}195$.

Задача 4. Кинетическая энергия электронов в атоме водорода 10,0 *эВ*. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома.

Дано:	*Решение.*
$E_k = 10$ *эВ* $= 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ *Дж*	Неопределенность координаты и импульса связаны соотношением:
$l_{\min}$ – ?	

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка. Из этого следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l. Тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью:

$$\frac{l}{2}\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \;\Rightarrow\; l \geq \frac{\hbar}{\Delta p}.$$

Физически разумная неопределенность импульса не должна превышать самого импульса:

$$\Delta p \leq p.$$

Импульс и кинетическая энергия E_k связаны соотношением

$$p = \sqrt{2mE_к},$$

где $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* – масса электрона, с учетом этого

$$l_{\min} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_к}}.$$

Проверим размерность:

$$\left[l_{\min}\right] = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{кг \cdot Дж}} = \sqrt{\frac{Дж \cdot с^2}{кг}} = \sqrt{\frac{м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot с^2}{кг}} = м.$$

Произведя вычисления, получим

$$l_{\min} = 6{,}2 \cdot 10^{-11}\, м.$$

Ответ: $l_{\min} = 6{,}2 \cdot 10^{-11}\, м.$

Задача 5. Предполагая, что неопределенность координаты частицы равна длине волны де Бройля, определить относительную неточность импульса этой частицы.

Дано:	*Решение.*
$\Delta x = \lambda$	Неопределенность координаты и импульса связаны соотношением:
$\dfrac{\Delta p}{p}$ – ?	

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar.$$

Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{p}$, где $\hbar = h/2\pi$. Тогда с учетом условия

$$\frac{h}{p}\Delta p \geq \hbar \;\Rightarrow\; \frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar}{h} = \frac{1}{2\pi} = 0{,}16.$$

Ответ: $\Delta p / p = 0{,}16.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить дебройлевские длины волн электрона, протона и атома урана, если известно, что кинетическая энергия каждого 100 *эВ*. (0,123 *нм*; 0,286 *пм*; 0,186 *пм*)

2. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 0,1 до 0,05 *нм*? (0,45 *кэВ*)

3. Найти длину волны де Бройля: а) для электрона, летящего со скоростью 10 *м/с*; б) для атома водорода, движущегося со скоростью, равной средней квадратичной скорости при температуре 300 *К*; в) для шарика массой 1 *г*, движущегося со скоростью 1 *см/с*. ($7{,}3\cdot10^{-10}$ *м*; $1{,}4\cdot10^{-10}$ *м*; $6{,}62\cdot10^{-12}$ *м*)

4. Найти длину волны де Бройля для электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 1 *В*; 100 *В*. Сравнить длину волны электрона с длиной волны протона, прошедшего ту же разность потенциалов, что и электрон. (1,235 *нм*; 0,123 *нм*; в 43 раза больше)

5. α-частица движется по окружности с радиусом 83 *см* в однородном магнитном поле, индукция которого 0,025 *Тл*. Найти длину волны де Бройля для α-частицы. ($1{,}0\cdot10^{-13}$ *м*)

6. Вычислить кинетическую энергию электрона, молекулы кислорода и частицы, радиус которой $1{,}0\cdot10^{-7}$ *м* и плотность $2{,}0\cdot10^{4}$ *кг/м*^{3}, если каждой из частиц соответствует длина волна де Бройля 0,1 *нм*. (152 *эВ*; $2{,}6\cdot10^{-3}$ *эВ*; $1{,}7\cdot10^{-11}$ *эВ*)

7. Какой кинетической энергией обладает протон с длиной волны де Бройля, равной граничной длине волны рентгеновских лучей, возникающих в трубке при разности потенциалов 40 *кВ*? ($1{,}4\cdot10^{-19}$ *Дж*)

8. Определить, при каком числовом значении скорости длина волны де Бройля для электрона равна его комптоновской длине волны. ($2{,}9\cdot10^{8}$ *м/с*)

9. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов 500 *В*, имеет длину волны де Бройля 1,282 *пм*. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определить ее массу. ($1{,}672\cdot10^{-27}$ *кг*)

10. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол 55° с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка при энергии электронов 180 *эВ*. Вычислить соответствующее значение межплоскостного расстояния. (0,21 *нм*)

11. При движении частицы вдоль оси x скорость оказывается определенной с точностью 1 *см/с*. Оценить неопределенность координаты Δx: а) для электрона, б) для броуновской частицы массой 10^{-13} *г*; в) для дробинки массой 0,1 *г*. (0,5 *см*; 10^{-14} *см*; 10^{-27} *см*)

12. Электрон с кинетической энергией 4 *эВ* локализован в области размером 1 *мкм*. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность $\Delta \upsilon/\upsilon$ его скорости. (10^{-4})

13. Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $1{,}5\cdot10^{6}$ *м*/*с*, если допустимая неточность в определении скорости 10% от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния. (0,77 *м*; 0,106 *нм*; $\Delta x >> d$)

14. Электрон с кинетической энергией 15 *эВ* находится на металлической пластинке диаметром 1 *мкм*. Оценить относительную неточность $\Delta \upsilon/\upsilon$, с которой может быть определена скорость электрона. (10^{-4})

15. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неточность $\Delta p/p$ импульса этой частицы. (16%)

16. Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть моноэнергетический пучок электронов (10 *эВ*) падает на щель шириной *a*. Можно считать, что если электрон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a$. Оценить относительную неточность в определении импульса $\Delta p/p$ электрона в двух случаях: 1) $a = 10$ *нм*; 2) $a = 0{,}1$ *нм*. (0,012; 1,2)

17. Во сколько раз дебройлевская длина волны частицы меньше неопределенности ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса, равной 1%? (В 10 раз)

18. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов 1 *кВ*. Известно, что неопределенность скорости составляет 0,1 % от ее числового значения. Определить неопределенность координаты электрона. Является ли электрон в данных условиях квантовой или классической частицей? (38,8 *нм*)

19. Длина волны излучаемого атомом фотона составляет 0,6 *мкм*. Принимая время жизни возбужденного состояния $1{,}0\cdot10^{-8}$ *с*, определить отношение естественной ширины энергетического уровня, на который был возбужден электрон, к энергии, излучаемой атомом. ($2{,}0\cdot10^{-7}$)

20. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии ($1{,}0\cdot10^{-8}$ *с*) и длина волны излучаемого фотона 0,6 *мкм*. ($3{,}0\cdot10^{-8}$)

21. Используя собственные волновые функции $\psi_n(x)$ частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, найти с помощью уравнения Шредингера выражение для дискретных уровней энергии E_n.

22. Частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме длиной L. Найти вероятность нахождения частицы в области $0 \le x \le L/3$ в основном и первом возбужденном состоянии. (0,2; 0,4)

23. Определить длину волны де Бройля, если его скорость 1 *Мм*/*с*. Аналогичный расчет провести для протона. (727 *пм*; 0,396 *пм*)

24. Электрон движется со скоростью 200 *Мм/с*. Определить длину волны де Бройля, учитывая изменение массы электрона в зависимости от скорости. (2,7 *пм*)

25. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,1 *нм*? (150 *В*)

5 ПЛАНЕТАРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМА. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЗАКОН МЕНДЕЛЕЕВА

Вопросы для обсуждения

Опыты Резерфорда. Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Модель атома водорода по Бору. Спектральные серии излучения атомарного водорода. Опыты Франка и Герца. Квантование энергии, момента импульса, проекции момента импульса электрона в атоме. Опыты Штерна и Герлаха. Спин и магнитный момент электрона. Принцип Паули. Периодический закон Менделеева.

Краткие теоретические сведения

Первый постулат Бора: в атоме существует набор стационарных состояний, находясь в которых атом не излучает электромагнитные волны. Стационарным состояниям соответствуют стационарные орбиты, по которым электроны движутся с ускорением, но излучение света при этом не происходит.

Правило квантования орбит Бора: в стационарном состоянии атома электрон, движущийся по круговой орбите, имеет квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию:

$$m_e \upsilon r_n = n\hbar \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...),$$

где m_e – масса электрона; υ – его скорость на n-й орбите радиуса r_n; $\hbar = h/(2\pi)$.

Второй постулат Бора: при переходе атома из одного состояния в другое испускается или поглощается один фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m,$$

равной разности энергий соответствующих стационарных состояний.

Энергия фотона, излучаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое, равна

$$\varepsilon = E_i\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где n – номер орбиты, на которую переходит электрон; k – номер орбиты, с которой переходит электрон; E_i – энергия ионизации водорода (E_i = 13,6 *эВ*) равна потенциалу ионизации, выраженному в вольтах. *Потенциалом ионизации* называется ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти бомбардирующий электрон, чтобы приобрести кинетическую энергию, достаточную для ионизации атома.

Частоты линий ν в дискретном линейчатом спектре атома водорода описываются *обобщенной формулой Бальмера*:

$$\nu = cR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где c – скорость света в вакууме; n и k – положительные целые числа, причем $k > n$; R − постоянная Ридберга.

Целые числа n и k называются главными квантовыми числами, причем $k = n+1,\ n+2$ и т. д. Группа линий с одинаковым числом n называется *серией*.

Таблица 1 − Серии линий водородного спектра

n	***k***	**Серия**	**Область**
1	2, 3, 4, …	Лаймана	ультрафиолетовая
2	3, 4, 5, …	Бальмера	видимая
3	4, 5, 6, …	Пашена	инфракрасная
4	5, 6, 7, …	Брэккета	
5	6, 7, 8, …	Пфунда	
6	7, 8, 9, …	Хэмпфри	

Для водородоподобных ионов формула Бальмера имеет вид:

$$\nu = Z^2 cR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где Z – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева.

Состояние каждого электрона в атоме характеризуется набором четырех квантовых чисел.

Главное квантовое число n определяет энергетические уровни электрона в атоме:

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Орбитальное квантовое число l при заданном n принимает значения:

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ (n-1)$$

и определяет величину момента импульса (механический орбитальный момент) электрона в атоме:

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}.$$

Магнитное квантовое число m при данном l принимает значения:

$$m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...,\ \pm l$$

и определяет величину момента импульса электрона в заданном направлении. Орбитальный момент импульса электрона L_l может иметь лишь такие ориентации в пространстве, при которых проекция L_{lz} вектора L_l на направление внешнего магнитного поля принимает только квантованные значения, кратные $\hbar$ (пространственное квантование):

$$L_{lz} = m\hbar.$$

Магнитное спиновое квантовое число m_s может принимать только два значения:

$$m_s = \pm 1 / 2.$$

Пространственное квантование спина означает, что проекция L_{sz} вектора спина L_s на направление внешнего магнитного поля находится по формуле:

$$L_{sz} = m_s \hbar.$$

Принцип Паули: в любом атоме не может быть двух электронов, находящихся в двух одинаковых стационарных состояниях, определяемых набором четырех квантовых чисел – главного n, орбитального l, магнитного m и спинового m_s.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какие явления подтверждают сложное строение атома?
2. В чем заключается опыт Резерфорда?
3. О чем свидетельствует наличие в опыте Резерфорда α-частиц, которые отклоняются на углы, большие 90°?
4. Что представляет собой планетарная модель атома?
5. Что понимают под энергией атома?
6. Какое состояние атома называется: а) основным; б) возбужденным?
7. В чем состоит: а) первый постулат Бора; б) второй постулат?
8. Как записывается правило квантования?
9. Что называется энергией ионизации?
10. Что описывает обобщенная формула Бальмера? Получите из этой формулы выражение для видимой области спектра излучения атомарного водорода.
11. Что означает понятие «спектральная серия»?
12. Какая физическая величина может быть поставлена в соответствие главному квантовому числу?
13. Какая физическая величина может быть поставлена в соответствие орбитальному числу?
14. Какая физическая величина может быть поставлена в соответствие магнитному числу?
15. Какая физическая величина может быть поставлена в соответствие спиновому числу?
16. Сформулируйте принцип Паули.
17. Каковы принципы построения таблицы Менделеева?

Примеры решения задач

Задача 1. Найти радиус первой орбиты атома водорода и скорость электрона на этой орбите.

Дано:
$n = 1$

$r_1 - ?$
$\upsilon_1 - ?$

Решение.

Согласно теории Бора, радиус r орбиты электрона и его скорость υ связаны равенством:

$$m\upsilon r = n\hbar.$$

Т. к. по условию задачи главное квантовое число $n = 1$, то равенство примет вид:

$$m\upsilon_1 r_1 = \hbar, \qquad (1)$$

где $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг* – масса электрона; $\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка.

Электрон вращается вокруг ядра. Сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение, тогда с учетом второго закона Ньютона можно записать равенство:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{r_1} = \kappa\frac{e^2}{r_1^2} \quad \Rightarrow$$

$$m\upsilon_1^2 = \kappa\frac{e^2}{r_1}, \qquad (2)$$

где $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ *Кл* – заряд электрона; $\kappa = 9{,}0\cdot10^{9}$ *м/Ф*.

Решая совместно (1) и (2) относительно r, получим

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{\kappa m e^2}.$$

Проверим размерность:

$$[r] = \frac{Дж^2\cdot с^2}{\frac{м}{Ф}\cdot кг\cdot Кл^2} = \frac{Дж^2\cdot с^2\cdot\frac{Кл}{В}}{м\cdot кг\cdot Кл^2} =$$

$$= \frac{Дж^2\cdot с^2}{м\cdot кг\cdot Дж} = \frac{кг\cdot\frac{м^2}{с^2}}{m\cdot кг} = \frac{м^2}{м} = м.$$

Подставив числовые значения, найдем радиус первой орбиты атома водорода:

$$r_1 = 5{,}3\cdot10^{-11} м.$$

Из равенства (1) найдем выражение для скорости:

$$\upsilon_1 = \frac{\hbar}{mr} = 2{,}2\cdot10^{6}\, м/с.$$

Ответ: $r_1 = 5{,}3\cdot10^{-11} м$; $\upsilon_1 = 2{,}2\cdot10^{6}\, м/с$.

Задача 2. Найти период обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость.

Дано:
$n = 1$

$T - ?$
$\omega - ?$

Решение.

Период обращения электрона равен

$$T = \frac{2\pi r_n}{\upsilon_n}, \qquad (1)$$

где r_n – радиус орбиты; υ_n – скорость электрона на орбите. Радиус орбиты электрона равен

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{\kappa m e^2}, \qquad (2)$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* – заряд электрона; $\kappa = 9{,}0 \cdot 10^9$ *м/Ф*; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* – масса электрона; $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка.

Скорость электрона на *n*-орбите:

$$\upsilon_n = \frac{n\hbar}{mr}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$T = \frac{2\pi n^3 h^3}{k^2 m e^4}.$$

Проверим размерность:

$$[T] = \frac{Дж^3 \cdot c^3}{\frac{м^2}{Ф^2} \cdot кг \cdot Кл^4} = \frac{Ф^2 \cdot Дж^3 \cdot c^3}{м^2 \cdot кг \cdot Кл^4} = \frac{\frac{Кл^2}{В^2} \cdot Дж^3 \cdot c^3}{м^2 \cdot кг \cdot Кл^4} =$$

$$= \frac{Дж^3 \cdot c^3}{В^2 \cdot м^2 \cdot кг \cdot Кл^4} = \frac{Дж^3 \cdot c^3}{\frac{Дж^2}{Кл^2} \cdot м^2 \cdot кг \cdot Кл^2} = \frac{Дж \cdot c^3}{м^2 \cdot кг} = c.$$

$$T = 1{,}5 \cdot 10^{-16} c.$$

Угловая скорость $\omega = 2\pi\nu$, где $\nu = \frac{1}{T}$ – частота вращения, тогда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{k^2 m e^4}{n^3 \hbar^3};$$

$$\omega = 4{,}13 \cdot 10^{16} c^{-1}.$$

Ответ: $T = 1{,}5 \cdot 10^{-16}$ *с*; $\omega = 4{,}13 \cdot 10^{16}$ c^{-1}.

Задача 3. Найти наибольшую длину волны в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость должны иметь бомбардирующие электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

Дано:
$n = 1$

$\lambda - ?$
$\upsilon - ?$

Решение.

Длины волн спектральных линий атома водорода всех серий определяются формулой

$$\frac{1}{\lambda} = R'(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}), \qquad (1)$$

для ультрафиолетовой области $n = 1$; $k = 2, 3, 4, ...$ $R' = 1{,}1 \cdot 10^7\, м^{-1}$ – постоянная Ридберга. Очевидно, что наибольшая длина волны будет при комбинации $n = 1$, $k = 2$. Тогда из (1) имеем

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4}R' \text{ или } \lambda = \frac{4}{3R'};$$

$$\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-7}\, м.$$

Для нахождения скорости воспользуемся соотношением де Бройля для релятивистских частиц:

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}, \qquad (2)$$

где $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* – масса покоя электрона; $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка.

Откуда наименьшая скорость, необходимая для появления спектральных линий, равна

$$\upsilon = \frac{hc}{\sqrt{\lambda^2 m_0^2 c^2 + h^2}}.$$

Произведя вычисления, найдем

$$\upsilon = 1{,}9 \cdot 10^6\, м/с.$$

Ответ: $\upsilon = 1{,}9 \cdot 10^6\, м/с.$

Задача 4. В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты электрона увеличивался в 9 раз?

Дано:
$\frac{r_k}{r_n} = 9$

$\frac{k}{n} - ?$

Решение.

Радиусы орбит, по которым возможно движение электронов в атоме водорода, согласно первому постулату Бора, удовлетворяют соотношению:

$$m\upsilon r = n\hbar, \qquad (1)$$

где $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* − масса электрона; $\hbar$ = $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка; n – номер орбиты.

Электрон и ядро взаимодействуют с силой Кулона:

$$F = \kappa \frac{e^2}{r^2}, \qquad (2)$$

которая для электрона является центростремительной, поэтому можно записать:

$$\kappa \frac{e^2}{r^2} = m \frac{\upsilon^2}{r}, \qquad (3)$$

где e = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* − заряд электрона; κ = 9,0 10^9 *м/Ф*.

С учетом (1) выражение (3) примет вид:

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{\kappa e^2 m}. \qquad (4)$$

По условию $\frac{r_k}{r_n} = 9$, тогда для орбит n и k получим $\frac{k}{n} = 3$, т. е. $k = 3n$, что соответствует переходу электрона между первым и третьим энергетическими уровнями.

Ответ: $\frac{k}{n} = 3$.

Задача 5. Найти первый потенциал возбуждения однократно ионизованного атома гелия.

Дано:
$n = 1$
$k = 2$

$U - ?$

Решение.

Согласно второму постулату Бора, энергия излучения, соответствующая переходу электрона с орбиты k на орбиту n, определяется разностью энергий электрона на этих орбитах:

$$\varepsilon = h\nu = W_k - W_n, \qquad (1)$$

где h = $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка; ν − частота излучения.

Для водородоподобных атомов частота излучения равна

$$\nu = R' c Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \qquad (2)$$

где c = $3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость света; $R' = 1{,}1 \cdot 10^7$ $м^{-1}$ – постоян ная Ридберга; $Z = 2$ – порядковый номер гелия в таблице Менделеева.

По условию задачи n = 1, k = 2, тогда

$$\nu = \frac{3}{4} R' c Z^2. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$\frac{3}{4}R'cz^2h = W_k - W_n. \qquad (4)$$

Для возбуждения ионов электроны должны обладать энергией

$$W = eU. \qquad (5)$$

Тогда по закону сохранения энергии

$$eU = W_k - W_n. \qquad (6)$$

Приравнивая (6) и (3), получим

$$eU = \frac{3R'cz^2h}{4}. \qquad (7)$$

Из (7) находим

$$U = \frac{3R'cz^2h}{4e}. \qquad (8)$$

Проверим размерность:

$$[U] = \frac{м^{-1} \cdot \frac{м}{с} \cdot Дж \cdot с}{Кл} = \frac{Дж}{Кл} = В.$$

Для гелия $Z = 2$, тогда

$$U = 41\ В.$$

Ответ: $U = 41$ *В*.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти радиусы второй и третьей боровских электронных орбит атома водорода и скорости электрона на них. ($2{,}12 \cdot 10^{-10}$ *м*; $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ *м*; $1{,}09 \cdot 10^6$ *м/с*; $7{,}3 \cdot 10^5$ *м/с*)

2. Чему равны кинетическая, потенциальная и полная энергии электрона на первой боровской орбите атома водорода? (13,6 *эВ*; −27,2 *эВ*; −13,6 *эВ*)

3. Определить, насколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении фотона с длиной волны $4{,}86 \cdot 10^{-7}$ *м*. (На 2,5 *мэВ*)

4. Определить длину волны спектральной линии, излучаемой при переходе электрона с более высокого уровня энергии на более низкий, если при этом энергия уменьшилась на 10 *эВ*. (124 *нм*)

5. Определить: 1) частоту вращения электрона, находящегося на первой боровской орбите; 2) эквивалентный ток. ($6{,}58 \cdot 10^{15}$ *Гц*; 1,06 *мА*)

6. Определить частоту света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом 2, если радиус электронной орбиты изменился в 9 раз. ($7{,}31 \cdot 10^{14}$ *Гц*)

7. Определить потенциал ионизации атома водорода. (13,6 *В*)

8. Определить первый потенциал возбуждения атома водорода. (10,2 *В*)

9. Электрон выбит из атома водорода, находящегося в основном состоянии, фотоном с энергией 17,7 *эВ*. Определить скорость электрона за пределами атома. (1,2 *Мм/с*)

10. Фотон с энергией 12,12 *эВ*, поглощенный атомом водорода, находящегося в основном состоянии, переводит атом в возбужденное состояние. Определить главное квантовое число этого состояния. (3)

11. Определить, какие спектральные линии появятся в видимой области спектра излучения атомарного водорода под действием ультрафиолетового излучения с длиной волны 0,1 *мкм*. ($1{,}22\ 10^{-7}$ *м*; $1{,}03\ 10^{-7}$ *м*; $6{,}56\ 10^{-7}$ *м*)

12. Определить максимальную и минимальную энергии фотона в видимой серии спектра водорода (серия Бальмера). (3,4 *эВ*; 1,89 *эВ*)

13. Определить длину волны, соответствующую второй спектральной линии в серии Пашена. (1,28 *мкм*)

14. Максимальная длина волны спектральной водородной линии серии Лаймана 0,12 *мкм*. Предполагая, что постоянная Ридберга неизвестна, определить максимальную длину волны линии Бальмера. (0,65 *мкм*)

15. Определить длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия? (0,41 *мкм*)

16. Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантовым числом 4. Определить возможные спектральные линии в спектре водорода, появляющиеся при переходе атома из возбужденного состояния в основное. ($1{,}21 \cdot 10^{-7}$ *м*; $1{,}02 \cdot 10^{-7}$ *м*; $9{,}7 \cdot 10^{-8}$ *м*; $6{,}54 \cdot 10^{-7}$ *м*; $4{,}85 \cdot 10^{-7}$ *м*; $1{,}87 \cdot 10^{-6}$ *м*)

17. Экспериментально установлено, что вторая линия водородной серии Брэккета соответствует длине волны 2,63 *мкм*. На основании этих данных установить приближенное значение постоянной Ридберга. ($1{,}095 \cdot 10^{7}$ $м^{-1}$)

18. Какие спектральные линии появятся в видимой области спектра при возбуждении атомов водорода электронами энергией 13 *эВ*? ($6{,}56 \cdot 10^{-7}$ *м*; $4{,}85 \cdot 10^{-7}$ *м*; $4{,}34 \cdot 10^{-7}$ *м*)

19. Атом водорода освещается ультрафиолетовым излучением с длиной волны 100 *нм*. Определить, какие спектральные линии появятся в спектре водорода. ($1{,}22 \cdot 10^{-7}$ *м*; $1{,}03 \cdot 10^{-7}$ *м*; $6{,}56 \cdot 10^{-7}$ *м*)

20. В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию? (10,2 – 12,1 *эВ*)

21. Какую наименьшую энергию (в электрон-вольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн этих линий. (12,1 *эВ*; 121 *нм*; 103 *нм*; 656 *нм*)

22. В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии? (97,3 *нм* − 102,6 *нм*)

23. На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны 486 *нм*? (На 2,56 *эВ*)

24. Определить длину волны, соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера. (434 *нм*)

6 ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Вопросы для обсуждения

Теплоемкость твердых тел. Закон Дюлонга и Пти. Зависимость теплоемкости от температуры. Теория теплоемкости Эйнштейна. Теория теплоемкости Дебая. Фононы. Квантовая теория теплоемкости. Теплоемкость электронного газа. Теплоемкость металлов. Теплопроводность диэлектрических кристаллов.

Краткие теоретические сведения

Удельная теплоемкость вещества с – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 *кг* вещества на 1 *К*.

Молярная теплоемкость C_M – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 *моль* вещества на 1 *К*.

Молярная C_M и удельная c теплоемкость твердых тел связаны соотношением:

$$C_M = cM,$$

где M – молярная масса.

Внутренняя энергия 1 моля химически простого (состоящего из одинаковых атомов) твердого тела в классической теории теплоемкости выражается формулой:

$$U = 3N_A kT,$$

где N_A − число Авогадро; T – термодинамическая температура; k – постоянная Больцмана.

Закон Дюлонга и Пти: молярная теплоемкость всех химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова и равна

$$C_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M = 3N_A k = 3R,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Этот закон справедлив только в ограниченном интервале температур. При низких температурах теплоемкость твердых тел уменьшается и стремится к нулю при $T \to 0$.

Закон Неймана−Коппа: молярная теплоемкость химически сложных тел (состоящих из различных атомов) равна

$$C_M = n \cdot 3R,$$

где n – общее число частиц в химической формуле соединения.

Квантовая теория теплоемкости Эйнштейна позволила впервые объяснить падение теплоемкости в области низких температур. В этой модели предполагается, что решетка из N атомов имеет $3N$ независимых квантовых осцилляторов, колеблющихся с одинаковой частотой ω. Среднее значение энергии квантового осциллятора, приходящейся на одну степень свободы, выражается формулой:

$$< E > \; = E_0 + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1},$$

где E_0 – нулевая энергия $\left(E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\right)$; $\hbar$ – постоянная Планка; ω – круговая частота колебаний осциллятора.

Молярная внутренняя энергия кристалла, по Эйнштейну, определяется по формуле:

$$U_m = U_{0m} + 3R\frac{\Theta_E}{\exp\left(\frac{\Theta_E}{T}\right) - 1},$$

где $U_{0m} = \frac{3}{2}R\Theta_E$ – молярная нулевая энергия;

$\Theta_E = \hbar\omega_E / k$ – характеристическая температура Эйнштейна;

$\omega_E = \sqrt{\gamma / m}$,

γ – постоянная квазиупругой силы; m – масса атома (молекулы).

Молярная теплоемкость кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна определяется согласно

$$C_M = 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\Theta_E}{T}\right) - 1\right)^2},$$

при низких температурах $\left(T \ll \Theta_E\right)$

$$C_M = 3R\frac{\Theta_E}{T}\exp\left(-\frac{\Theta_E}{T}\right).$$

В модели Дебая учитывается, что колебания атомов в решетке не являются независимыми и каждый квантовый осциллятор колеблется со своей собственной частотой ω. Частотный спектр колебаний в квантовой теории теплоемкости Дебая задается функцией распределения частот $g(\omega)$. Число dZ собственных частот тела, приходящихся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$, определяется выражением:

$$dZ = g(\omega)d\omega.$$

Энергия U твердого тела связана со средней энергией $< E >$ квантового осциллятора и функцией распределения частот $g(\omega)$ соотношением:

$$U = \int_0^{\omega_D} \langle E \rangle g(\omega)d\omega.$$

Молярная внутренняя энергия кристалла, по Дебаю, равна

$$U_m = U_{0m} + 9RT\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int\limits_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx,$$

где $U_{0m} = \frac{9}{8}R\Theta_D$ – молярная нулевая энергия кристалла по Дебаю;

$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$ – характеристическая температура Дебая;

$\omega_D = \upsilon_{зв}\kappa_D$ – максимальная, или дебаевская, частота колебаний,

$\upsilon_{зв}$ – скорость звука; κ_D – волновое число:

$$\kappa_D = \frac{2\pi}{\lambda_D},$$

λ_D – минимальная длина волны в кристалле;

$\lambda_D = 2a$, a – параметр кристаллической решетки.

Молярная теплоемкость кристалла по Дебаю:

$$C_M = 3R\left[12\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int\limits_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3dx}{\exp(x)-1} - \frac{3\Theta_D/T}{\exp(\Theta_D/T)-1}\right],$$

в области низких температур, $T \ll \Theta_D$, формула примет вид (предельный закон Дебая):

$$C_M = \frac{12\pi^3}{5}N_A k\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3.$$

Фонон – квант колебательного движения атомов кристалла. Фонон является бесспиновой квазичастицей, сопоставляемой волне смещений атомов кристалла из положения равновесия.

Импульс фонона равен

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}; \quad \left|\vec{k}\right| = k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор фонона; k – волновое число; λ – длина звуковой волны в кристалле.

Количество теплоты, необходимое для нагревания тела массой m от температуры T_1 до температуры T_2, определяется согласно

$$Q = \frac{m}{M}\int\limits_{T_1}^{T_2} C_M dT \cdot$$

Теплоемкость электронного газа единичного объема металла:

$$C_V^{el} = \frac{\pi^2}{2}nk\frac{kT}{\varepsilon_F},$$

где ε_F – энергия Ферми; n – концентрация атомов в единице объема.

Закон Фурье: количество теплоты *dQ*, перенесенное через поверхность площадью *S*, перпендикулярно направлению теплового потока, за время *dt* равно

$$dQ = -\kappa \frac{dT}{dx} S dt,$$

где κ − теплопроводность; $\dfrac{dT}{dx}$ − градиент температуры. Знак минус в формуле показывает, что направление теплового потока противоположно вектору градиента температуры.

Теплопроводность κ, теплоемкость C_V, рассчитанная на единицу объема, скорость звука $\upsilon_{зв}$ (усредненное значение) и средняя длина свободного пробега $\Lambda_ф$ фононов связаны соотношением:

$$\kappa = \frac{1}{3} C_V \upsilon_{зв} \Lambda_ф .$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое удельная теплоемкость? Молярная? В каких единицах они измеряются?
2. Сформулируйте и выведите закон Дюлонга и Пти.
3. На чем базируется теория теплоемкости Эйнштейна? Дебая?
4. Что такое характеристическая температура Дебая?
5. Что такое фононы? Почему они называются квазичастицами?
6. Каковы механизмы теплопроводности диэлектриков?
7. Из чего складывается внутренняя энергия кристалла?

Примеры решения задач

Задача 1. Определить параметр решетки алмаза, если его дебаевская температура 1860 *К*, а скорость звука в алмазе $1{,}14\cdot10^4$ *м/с*.

Дано:	*Решение.*
$\theta_D = 1860\ К$ $\upsilon_{зв} = 1{,}14\cdot10^4$ *м/с*	Характеристическая температура Дебая равна $$\theta_D = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k}.$$
$a - ?$	Максимальную частоту колебаний $\omega_{\max}$ можно найти, если считать, что половина длины волны $\lambda_{\min}$, соответствующая максимальной частоте, равна параметру кристаллической решетки $$\frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{\upsilon_{зв}}{\lambda_{\min}} = \frac{\upsilon_{зв}}{2a}.$$

Отсюда

$$\omega_{\max} = \frac{\pi \upsilon_{зв}}{a}.$$

Тогда

$$\theta_D = \frac{\pi \hbar \upsilon_{зв}}{ka},$$

$$a = \frac{\pi \hbar \upsilon_{зв}}{k\theta_D} = \frac{h\upsilon_{зв}}{2k\theta_d},$$

где $h = 2\pi \cdot \hbar = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Дж/К* – постоянная Больцмана.

Проверим размерность:

$$\left[a\right] = \frac{Дж \cdot c \cdot \dfrac{м}{c}}{\dfrac{Дж}{К} \cdot К} = м.$$

Произведя вычисления, найдем

$$a = 1{,}47 \cdot 10^{-10}\ м.$$

Ответ: $a = 1{,}47 \cdot 10^{-10}\ м.$

Задача 2. Характеристическая температура золота 170 *К*. Определить постоянную квазиупругой силы.

Дано:

$\theta_E = 170\ К$

$\gamma - ?$

Решение.

В приближении Эйнштейна характеристическая температура находится по формуле:

$$\theta_E = \frac{\hbar\omega_E}{k} \text{ или } \theta_E = \frac{h\nu_E}{k},$$

где ω_E – собственная частота колебаний атомов;
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Дж/К* – постоянная Больцмана;
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка.

С другой стороны,

$$\nu_E = \frac{\omega_E}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

где $m = 3{,}29 \cdot 10^{-25}$ *кг* – масса атома золота.

Тогда

$$\theta = \frac{h}{2\pi k}\sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

откуда

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m k^2 \theta^2}{h^2}.$$

Проверим размерность:

$$[\gamma] = \frac{кг \cdot \dfrac{Дж^2}{K^2} \cdot K^2}{Дж^2 \cdot c^2} = \frac{кг}{c^2} = \frac{кг \cdot м \cdot c^{-2}}{м} = \frac{H}{м}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$\gamma = 1{,}62 \cdot 10^3 \ H / м.$$

Ответ: $\gamma = 1{,}62 \cdot 10^3 \ H / м.$

Задача 3. Вычислить по классической теории теплоемкости теплоемкость кристалла бромида алюминия $AlBr_3$ объемом 1,0 *м*^{3}. Плотность кристалла 3000 *кг/м*^{3}.

Дано:
$V = 1{,}0 \ м^3$
$\rho = 3000 \ \frac{кг}{м^3}$
$C - ?$

Решение.

Теплоемкость вещества массой m равна

$$C = cm. \qquad (1)$$

Масса, плотность и объем связаны выражением:

$$m = \rho V. \qquad (2)$$

Удельная теплоемкость:

$$c = \frac{C_M}{M}, \qquad (3)$$

где C_M – молярная теплоемкость; M – молярная масса, для $AlBr_3$ $M = (27 + 3 \cdot 80) \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*.

В классической теории молярная теплоемкость химически сложных тел, согласно закону Неймана–Коппа, равна

$$C_M = n \cdot 3R, \qquad (4)$$

где $n = 4$ – общее число атомов в химической формуле соединения $AlBr_3$.

Подставим (2), (3) и (4) в (1):

$$C = \frac{3nR}{M} \rho V.$$

Проверим размерность:

$$[C] = \frac{\dfrac{Дж}{моль \cdot K} \cdot \dfrac{кг}{м^3} \cdot м^3}{\dfrac{кг}{моль}} = \frac{Дж}{K}.$$

Выполнив вычисления, найдем

$$C = 1{,}12 \cdot 10^6 \ Дж / K.$$

Ответ: $C = 1{,}12 \cdot 10^6 \ Дж / K$.

Задача 4. Определить усредненную скорость звука в кристалле, характеристическая температура которого 300 *К*, а межатомное расстояние 0,25 *нм*.

Дано:
$\theta = 300\ K$
$a = 0{,}25\ нм = 2{,}5\cdot 10^{-10}\ м$

$\upsilon_{зв} - ?$

Решение.

Максимальная частота колебаний узлов кристаллической решетки равна

$$\omega_D = \upsilon_{зв}\kappa_D, \qquad (1)$$

где κ_D – волновое число,

$$\kappa_D = \frac{2\pi}{\lambda_D}, \qquad (2)$$

а λ_D – минимальная длина волны

$$\lambda_D = 2a. \qquad (3)$$

Характеристическая температура:

$$\theta = \frac{\hbar\omega_D}{k}, \qquad (4)$$

где $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34}\ Дж\cdot с$ – постоянная Планка;

$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К}$ – постоянная Больцмана.

Решая совместно (1)–(4), находим

$$\upsilon_{зв} = \frac{a\theta k}{\hbar\pi}.$$

Проверим размерность:

$$\upsilon_{зв} = \frac{м\cdot К\cdot \frac{Дж}{К}}{Дж\cdot с} = \frac{м}{с}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$\upsilon_{зв} = 3{,}13\cdot 10^{3}\ м/с.$$

Ответ: $\upsilon_{зв} = 3{,}13\cdot 10^{3}\ м/с.$

Задача 5. Вычислить среднюю длину свободного пробега фононов в кварце SiO_2 при некоторой температуре, если при той же температуре теплопроводность $13{,}0\ Вт/(м\cdot К)$, молярная теплоемкость $44{,}0\ Дж/(моль\cdot К)$ и усредненная скорость звука $5{,}0\cdot 10^{3}\ м/с$. Плотность кварца $2{,}65\cdot 10^{3}\ кг/м^{3}$.

Дано:
$\kappa = 13{,}0\ Вт/(м\cdot К)$
$C_M = 44{,}0\ Дж/(моль\cdot К)$
$\upsilon_{зв} = 5{,}0\cdot 10^{3}\ м/с$
$\rho = 2{,}65\cdot 10^{3}\ кг/м^{3}$

$\Lambda_Ф - ?$

Решение.

Теплопроводность твердых тел равна

$$\kappa = \frac{1}{3}C_V\upsilon_{зв}\Lambda_Ф, \qquad (1)$$

где C_V – теплоемкость единицы объема кристалла.

Молярная и удельная теплоемкость связаны соотношением:

$$C_M = cM, \qquad (2)$$

где M – молярная масса, для кварца $M = (28 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*.

Удельная теплоемкость

$$c = \frac{C}{m}, \qquad (3)$$

где m – масса кристалла. С учетом $m = \rho V$, где V – объем кристалла,

$$c = \frac{C}{\rho V}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2), найдем теплоемкость единицы объема:

$$C_V = \frac{C}{V} = \frac{C_M \rho}{M}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (1), найдем теплопроводность:

$$\kappa = \frac{1}{3}\frac{\rho C_M}{M}\upsilon_{зв}\Lambda_Ф, \qquad (6)$$

откуда

$$\Lambda_Ф = \frac{3\kappa M}{C_M \rho \upsilon_{зв}}.$$

Проверим размерность:

$$\Lambda_Ф = \frac{\dfrac{Вт}{м \cdot К} \cdot \dfrac{кг}{моль}}{\dfrac{Дж}{К \cdot моль} \cdot \dfrac{кг}{м^3} \cdot \dfrac{м}{с}} = \frac{Вт \cdot м^3 \cdot с}{Дж \cdot м^2} = \frac{Дж \cdot м}{Дж} = м.$$

Выполнив вычисления, получим

$$\Lambda_Ф = 4{,}0 \cdot 10^{-9}\, м.$$

Ответ: $\Lambda_Ф = 4{,}0 \cdot 10^{-9}\, м.$

Задача 6. Определить количество теплоты, необходимое для нагревания кристалла NaCl массой 20 *г* на 2 *К*, в двух случаях, если нагревание происходит от температуры: 1) $T_1 = \theta_D$; 2) $T_2 = 2$ *К*. Характеристическую температуру Дебая θ_D для NaCl принять равной 320 *К*.

Дано:
$m = 0{,}02$ *кг*
$\Delta T = 2$ *К*
$T_1 = \theta_D$
$T_2 = 2$ *К*
$\theta_D = 320$ *К*
ΔQ – ?

Решение.

Количество теплоты ΔQ, подводимое для нагревания тела от температуры T_1 до T_2, может быть вычислено по формуле:

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C\,dT, \qquad (1)$$

где C − теплоемкость тела.

Теплоемкость тела связана с молярной теплоемкостью $C_м$ соотношением:

$$C = (m/M)\,C_м\,,$$

где $M = (23 + 35)\cdot 10^{-3}\,кг/моль$ − молярная масса NaCl.

Подставив это выражение для C в формулу (1), получим

$$\Delta Q = \left(\frac{m}{M}\right)\int_{T_1}^{T_2} C_M\,dT. \qquad (2)$$

В общем случае C_M есть функция температуры, поэтому за знак интеграла ее выносить нельзя. Однако в первом случае изменением теплоемкости по сравнению с ее значением при температуре T_1 можно пренебречь и считать ее на всем интервале температур ΔT постоянной и равной $C_м(T_1)$. Ввиду этого формула (2) примет вид:

$$\Delta Q = \left(\frac{m}{M}\right) C_M(T_1)\Delta T. \qquad (3)$$

Молярная теплоемкость $C_м(T_1)$ в теории Дебая выражается формулой:

$$C_M(T_1) = 3R\left[12\left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)\int_0^{\theta_D/T_1}\frac{x^3dx}{e^x-1} - \frac{3\left(\frac{\theta_D}{T_1}\right)}{e^{\theta_D/1}}\right],$$

где $R = 8{,}31\,Дж/(моль\cdot K)$ − газовая постоянная.

В первом случае при $T = \theta_D$ интеграл равен

$$\int_0^{\theta_D/T_1}\frac{x^3dx}{e^x-1} = \int_0^1\frac{x^3dx}{e^x-1} = 0{,}225$$

и, следовательно,

$$C_M = 2{,}87R.$$

Подставляя это значение $C_м$ в формулу (3), получим

$$\Delta Q = 2{,}87\left(\frac{m}{M}\right)R\Delta T. \qquad (4)$$

Проверим размерность:

$$[\Delta Q] = \frac{кг}{\frac{кг}{моль}}\cdot\frac{Дж}{моль\cdot K}\cdot K = Дж\,.$$

$$\Delta Q = 16{,}3\,Дж.$$

Во втором случае ($T<<\theta_D$) нахождение ΔQ облегчается тем, что можно воспользоваться законом Дебая, в согласии с которым теплоемкость пропорциональна кубу абсолютной температуры. В этом случае теплоемкость сильно изменяется в пределах заданного интервала температур и ее нельзя выносить за знак интеграла в формуле (2).

Используя выражение предельного закона Дебая, $C_M = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3$, получим

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\theta_D^3} \int_{T_2}^{T_2+\Delta T} T^3 dT. \qquad (5)$$

Выполним интегрирование:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\theta_D^3} \left[\frac{(T_2+\Delta T)^4}{4} - \frac{T_2^4}{4} \right].$$

С учетом того, что $T_2+\Delta T = 2T_2$, выражение (5) примет вид:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\theta_D^3} 15 T_2^4$$

или

$$\Delta Q = 9\pi^4 \frac{m}{M} R \frac{T_2^4}{\theta_D^3}.$$

Проверим размерность:

$$[\Delta Q] = \frac{кг \cdot Дж \cdot K^4}{\frac{кг}{моль} \cdot моль \cdot K \cdot K^3} = Дж.$$

Подставив в последнюю формулу значения величин π, m, M, R, T и θ_D и произведя вычисления, найдем

$$\Delta Q = 1{,}22 \cdot 10^{-3}\ Дж.$$

Ответ: $\Delta Q = 16{,}3\ Дж$; $\Delta Q = 1{,}22 \cdot 10^{-3}\ Дж$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Теплоемкость серебра при $10°\ C$ равна 199 *Дж*/(*кмоль·К*). Определить характеристическую температуру. (231 *К*)

2. Удельная теплоемкость свинца и алюминия при постоянном объеме и температуре $20°\ C$ составляет соответственно 126 и 896 *Дж*/(*кг·К*). Вычислить теплоемкость каждого из этих металлов и сравнить со значениями, полученными по закону Дюлонга и Пти. (26,1 *кДж*/(*моль·К*), 24,2 *кДж*/(*кг·К*)

3. Определить характеристическую температуру золота, если постоянная квазиупругой силы $1{,}62\cdot10^3$ *Н*/*м*. (170 *К*)

4. Определить скорость звука в алмазе, зная, что дебаевская температура алмаза равна 1860 *К*, а параметр решетки 0,154 *нм*. ($1{,}14\cdot10^4$ *м*/*с*)

5. Вычислить молярную электронную теплоемкость для меди при 2 *К* и 1000 *К* и сравнить ее с теплоемкостью решетки при тех же температурах. Характеристическая температура меди 316 *К*. ($1{,}46\cdot10^{-3}$ *Дж*/(*моль·К*); $7{,}28\cdot10^{-1}$ *Дж*/(*моль·К*); $4{,}80\cdot10^{-4}$ *Дж*/(*моль·К*); 24,96 *Дж*/(*моль·К*))

6. Вычислить минимальную длину волны Дебая в титане, если его характеристическая температура 5° *С*, а скорость распространения звука $6{,}0\cdot10^3$ *м*/*с*. (1,02 *нм*)

7. Какова максимальная энергия фононов в кристалле свинца, если его характеристическая температура 94 *К*. ($8{,}2\cdot10^{-3}$ *эВ*)

8. Какова удельная теплоемкость цинка при 100° *С*? (0,398 *кДж*/(*кг·К*))

9. Удельная теплоемкость алюминия при 20° *С* 840 *Дж*/(*кг·К*). Выполняется ли при этой температуре закон Дюлонга и Пти? (Нет)

10. На нагревание металлического предмета массой 100 *г* от 20 до 50° *С* затрачено $8{,}3\cdot10^3$ *Дж*. Определить, из какого металла изготовлен предмет, если указанный интервал температур выше характеристической температуры. (Бериллий)

11. Определить изменение внутренней энергии кристалла никеля при нагревании его от 0 до 200° *С*. Масса кристалла 20 *г*. Теплоемкость вычислить. (1,7 *кДж*)

12. Пользуясь классической теорией, вычислить удельные теплоемкости кристаллов $NaCl$ и $CaCl_2$. (825 *кДж*/(*кг·К*), 675 *кДж*/(*кг·К*))

13. Найти частоту колебаний атомов серебра по теории Эйнштейна, если характеристическая температура серебра равна 165 *К*? (3,44 *ТГц*)

14. Во сколько раз изменится средняя энергия квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1 = \theta_E/2$ до $T_2 = \theta_E$? Учесть нулевую энергию. (В 3,74 раза)

15. Определить отношение $\langle E\rangle/\langle E_т\rangle$ средней энергии квантового осциллятора к средней энергии теплового движения молекул идеального газа при температуре $T = \theta_E$. (1,16)

16. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение внутренней энергии 1 *моля* кристалла при нагревании его на 2 *К* от температуры $T = \theta_E/2$. (36 *кДж*/*моль*)

17. Пользуясь теорией теплоемкости Эйнштейна, определить изменение внутренней энергии 1 *моля* кристалла при нагревании его от нуля до $T_1 = 0{,}1\theta_E$. Характеристическую температуру Эйнштейна принять для данного кристалла равной 300 *К*. (340 *Дж*/*моль*)

18. Определить относительную погрешность, которая будет допускаться, если при вычислении теплоемкости вместо значения по теории Эйнштейна (при $T = \theta_E$) воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти. (8,8%)

19. Вычислить по теории Эйнштейна молярную нулевую энергию кристалла цинка. Характеристическая температура для цинка 230 *К*. (2,87 *МДж*/*моль*)

20. Характеристическая температура Эйнштейна для меди 316 *К*. Найти постоянную квазиупругой силы. ($1{,}8\cdot 10^3$ *кН*/*м*)

21. Вычислить по теории Дебая молярную нулевую энергию кристалла меди. Характеристическая температура меди 320 *К*. (2,99 *МДж*)

22. Определить максимальную частоту собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая. Характеристическая температура 180 *К*. ($2{,}36\cdot 10^{13}\, c^{-1}$)

23. Вычислить максимальную частоту Дебая, если известно, что молярная теплоемкость серебра при 20 *К* равна 1,7 *Дж*/(*моль*·*К*). ($2{,}75\cdot 10^{13}\, c^{-1}$)

24. Молярная теплоемкость серебра при температуре 10 *К* равна 1,65 *Дж*/(*моль*·*К*). Вычислить по этому значению характеристическую температуру θ_D. (210 *К*)

25. Найти отношение изменения внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0{,}1\theta_D$ к нулевой энергии. Считать $T << \theta_D$. ($5{,}2\cdot 10^{-3}$)

26. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0{,}1\theta_D$. Характеристическую температуру Дебая принять равной 300 *К*. Считать $T << \theta_D$. (14,6 *кДж*)

27. Используя квантовую теорию теплоемкости Дебая, вычислить изменение молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на 2 *К* от температуры $T = \theta_D/2$. (41,4 *кДж*)

28. Определить характеристическую температуру Дебая серебра при нагревании этого вещества массой 10 *г* от 10 *К* до 20 *К*, при этом подведено 0,71 *Дж* теплоты. (212 *К*)

29. Сравнить молярную теплоемкость кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна с молярной теплоемкостью по закону Дюлонга и Пти. Характеристическая температура Эйнштейна $\theta_E = T$. ($C_м = 0{,}92\cdot 3R$)

30. Найти молярную энергию нулевых колебаний кристалла, для которого характеристическая температура Дебая 320 *К*. (3 *кДж*/*моль*)

31. Характеристическая температура Дебая для хлорида калия 230 *К*, а для хлорида натрия 280 *К*. Во сколько раз удельная теплоемкость KCl больше удельной теплоемкости NaCl при температуре 40 *К*? (В 1,4 раза)

32. Найти теплоемкость электронов проводимости единицы объема натрия при 2 *К* и 1000 *К*. Концентрация свободных электронов $2{,}5\cdot 10^{28}$ $м^{-3}$. Энергия Ферми 7 *эВ*. (42 *Дж*/(*К*·$м^3$); 21 *кДж*/(*К*·$м^3$))

33. Вычислить относительный вклад электронного газа в общую теплоемкость серебра при комнатной температуре. Считать, что на каждый атом приходится один свободный электрон и что теплоемкость серебра при данной температуре определяется законом Дюлонга и Пти. (0,8%)

34. Определить температуру, при которой теплоемкость электронного газа будет равна теплоемкости кристаллической решетки лития. Характеристическая температура лития 404 *К*, концентрация свободных электронов в нем $4{,}66\cdot 10^{28}$ $м^{-3}$. (5 *К*)

35. Найти теплоемкость электронов проводимости единицы объема меди при температуре 200 *К*. Значение энергии Ферми для меди 7 *эВ*. Принять, что концентрация электронов равна числу атомов в единице объема. (*13,7 кДж*/(*К*·$м^3$))

36. Вода при температуре 0° *С* покрыта слоем льда толщиной 50 *см*. Температура воздуха −30° *С*. Определить количество теплоты, переданное водой за время 1 *ч* через поверхность льда площадью 1 $м^2$. Теплопроводность льда 2,2 *Вт*/*м*·*К*. (475 *кДж*)

37. Вычислить среднюю длину свободного пробега фонона в кристалле серебра при 300 *К*, если коэффициент теплопроводности серебра 418 *Вт*/(*м*·*К*), а скорость распространения звука 3700 *м*/*с*. ($1{,}47\cdot 10^{-5}$*см*)

38. Вычислить удельную теплопроводность алмаза при температуре 30 *К*. (5,44 *кДж*/(*кг*·*К*))

39. Найти энергию фонона, соответствующего максимальной частоте Дебая, если характеристическая температура Дебая 250 *К*. ($3{,}45\cdot 10^{-21}$ *Дж*)

40. При комнатной температуре средняя длина свободного пробега фонона в кристалле NaCl в четыре раза больше параметра его решетки. Вычислить коэффициент теплопроводности этого кристалла, если $d = 0{,}564$ *нм* и скорость звука в нем $5{,}0\cdot 10^3$ *м*/*с*. (6,7 *кДж*/(*м*·*К*·*с*))

41. Определить квазиимпульс фонона, соответствующего частоте 0,1 $\omega_{макс}$. Усредненная скорость звука в кристалле равна 1380 *м*/*с*, характеристическая температура Дебая равна 100 *К*. Дисперсией звуковых волн в кристалле пренебречь. (10^{-25} *Н*·*с*)

42. Длина волны фонона, соответствующего частоте 0,01 $\omega_{макс}$, равна 50 *нм*. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру Дебая, если усредненная скорость звука равна 4,8 *км*/*с*. (443 *К*)

43. Характеристическая температура Дебая для вольфрама равна 310 *К*. Определить длину волны фононов, соответствующих частоте 0,1 $\omega_{\text{макс}}$. Усредненная скорость звука в вольфраме 5,17 *км*/*с*. Дисперсией волн в кристалле пренебречь. (4,8 *нм*)

44. Период решетки одномерного кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом, равен 0,3 *нм*. Определить максимальную энергию фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Усредненная скорость звука в кристалле равна 5 *км*/*с*. ($1{,}1\cdot10^{-21}$ *Дж)*

45. Каково отношение средней длины свободного пробега фононов к параметру решетки при комнатной температуре в кристалле NaCl, если теплопроводность при той же температуре равна 71 *Вт*/(*м*·*К*). Теплоемкость вычислить по закону Неймана−Коппа. Плотность кристалла $2{,}17\cdot10^{3}$ *кг*/*м*^{3}. Усредненную скорость звука принять равной 5 *км*/*с*. (4,1)

7 ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Вопросы для обсуждения

Квантовая теория свободных электронов в металлах. Энергетические зоны в кристаллах. Динамика электронов в кристаллической решетке. Квантовые явления при низких температурах. Электропроводность металлов и полупроводников. Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов. Уровень Ферми. Температура вырождения.

Краткие теоретические сведения

Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле при $T \neq 0\ K$:

$$dn(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon}{\exp\left(\left(\varepsilon-\varepsilon_F\right)/\left(kT\right)\right)+1},$$

при $T = 0\ K$, $\varepsilon < \varepsilon_F$:

$$dn(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon,$$

где $dn(\varepsilon)$ − концентрация электронов, энергия которых заключена в интервале значений от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$; $\hbar$ − постоянная Планка; T − термодинамическая температура; m и ε − масса и энергия электрона; ε_F − уровень или энергия Ферми.

Распределение электронов в металле по импульсам:

$$dn(p)=\frac{1}{\pi^2\hbar^3}\frac{p^2dp}{\exp\left(\frac{\left(p^2/2m\right)-\varepsilon_F}{kT}\right)+1},$$

где $dn(p)$ − число электронов в единице объема, импульсы которых заключены от p до $p + dp$.

Энергия Ферми – это значение энергии $\varepsilon_F(0)$, ниже которой все состояния системы частиц, подчиняющихся статистике Ферми–Дирака, при абсолютном нуле температуры заняты. Энергия Ферми в металле при $T = 0\ K$ равна

$$\varepsilon_F=\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(3\pi^2n\right)^{\frac{2}{3}},$$

где n – концентрация электронов в металле; m^* − эффективная масса электрона.

Температура вырождения для ферми-газа определяется максимальной энергией частиц при абсолютном нуле:

$$T_{кр} = \frac{2\pi\hbar^2}{km^*} n^{\frac{2}{3}},$$

где k − постоянная Больцмана. При вырожденной температуре почти все низшие энергетические уровни газа Ферми оказываются заполненными.

Температура Ферми равна

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k}.$$

Вероятность нахождения электрона в состоянии с энергией ε дается функцией распределения вырожденного газа электронов Ферми−Дирака:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}} + 1},$$

где T – термодинамическая температура.

Среднее число фононов, обладающих энергией $\varepsilon = \hbar\omega$, задается функцией распределения Бозе−Эйнштейна:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Плотность тока определяется по формуле:

$$j = en\upsilon_d,$$

где e − заряда электрона; n − концентрация электронов; υ_d − средняя скорость дрейфа электронов.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$j = \sigma E,$$

где j − плотность тока; σ − удельная проводимость; E − напряженность электрического поля.

Подвижность носителей заряда определяется как отношение их средней дрейфовой скорости к напряженности электрического поля:

$$\mu = \frac{\upsilon_d}{E} = \frac{e\tau}{m},$$

где τ − время релаксации; m − масса носителя заряда.

Удельная электропроводность металлов равна

$$\sigma = \frac{e^2 n\tau}{m} = \frac{4}{3}\frac{e^2 n\bar{l}}{m}\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\right)},$$

где $\bar{l}$ − средняя длина свободного пробега электронов; v − средняя скорость хаотического (теплового) движения электронов.

Для максвелловского распределения

$$\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\right)} = \left(\frac{2m}{\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где k − постоянная Больцмана, T − термодинамическая температура.

Закон Видемана−Франца:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 3\left(\frac{e}{k}\right)^2 = LT,$$

где κ − теплопроводность; $(e/k)^2 = L$ − число Лоренца.

Скорость электронов υ_F на уровне Ферми определяется из соотношения:

$$\frac{m\upsilon_F^2}{2} = \varepsilon_F .$$

Зависимость удельной электропроводности полупроводников от температуры:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

где ΔE − энергия активации; σ_0 – удельная электропроводность при $0°$ C.

Удельная электропроводность собственных полупроводников равна

$$\sigma = en(\mu_n + \mu_p),$$

где n − концентрация носителей зарядов (электронов и дырок); μ_n и μ_p − подвижности электронов и дырок соответственно.

Эффект Холла – явление возникновения поперечной разности потенциалов (называемой также холловским напряжением) при помещении проводника с постоянным током в магнитное поле. Холловская разность потенциалов определяется как

$$U_H = R_H IBd,$$

где R_H − коэффициент Холла; B − индукция магнитного поля; I − сила тока в образце; d − ширина образца в направлении поля.

Коэффициент Холла для полупроводников, обладающих носителями заряда одного вида (n или p):

$$R_H = \frac{3\pi}{8}\frac{1}{en} = \frac{\mu}{\sigma};$$

коэффициент Холла для проводников:

$$R_H = -\frac{1}{en}.$$

Иногда при описании эффекта Холла вводят угол Холла – угол между током и напряженностью суммарного электрического поля. Угол Холла φ определяется из соотношения:

$$tg\varphi = -R_H \sigma B.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Объяснить механизм образования энергетических зон в твердых телах.

2. В чем разница между проводником, полупроводником и диэлектриком с точки зрения зонной теории?

3. Как изменяется зонная структура с изменением давления? С изменением температуры?

4. Опишите механизм проводимости проводника с точки зрения зонной теории.

5. Опишите механизм проводимости собственных полупроводников.

6. Опишите механизм проводимости примесных полупроводников.

7. В чем отличие вырожденного и невырожденного электронного газа?

8. Что такое эффективная масса электрона?

9. Каковы причины и условия возникновения эффекта Холла?

10. Чем объясняется явление сверхпроводимости и сверхтекучести?

Примеры решения задач

Задача 1. Концентрация атомов в металле равна *n*. Считая, что каждый атом отдает в зону проводимости по одному электрону, найти энергию Ферми ε_F при $T = 0\ K$.

Дано:
$T = 0\ K$

$\varepsilon_F - ?$

Решение.

Поскольку при $T = 0\,K$ уровни выше ε_F не заняты электронами, концентрация электронов будет равна

$$n = \int_0^{\varepsilon_F} dn(\varepsilon).$$

Так как при $T = 0$

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon,$$

имеем

$$n = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_F^{\frac{3}{2}}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Проверим размерность:

$$[\varepsilon_F] = \frac{Дж^2 \cdot c^2}{кг} \cdot (м^{-3})^{\frac{2}{3}} = \frac{кг^2 \cdot \dfrac{м^4}{c^4} \cdot c^2}{кг} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{м^6}} = кг \cdot \frac{м^2}{c^2} = Дж.$$

Ответ: $\varepsilon_F = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}.$

Задача 2. Кусок металла объемом 20,0 $см^3$ находится при температуре 0 *К*. Определить число ΔN свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса $p_{\max}$ не более чем на 0,1 $p_{\max}$. Энергия Ферми 5,0 *эВ*.

Дано:
$V = 20{,}0\ см^3 =$ $= 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ м^3$
$T = 0\ K$
$\varepsilon_F = 5{,}0\ эВ =$ $= 8{,}0 \cdot 10^{-19}\ Дж$
$\Delta N - ?$

Решение.

Распределение электронов в металле по импульсам:

$$dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{(p^2/2m) - \varepsilon_F}{kT}\right) + 1},$$

где $dn(p)$ − число электронов в единице объема, импульсы которых заключены от p до $p + dp$; $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$ − постоянная Планка; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ кг$ − масса электрона; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$ − постоянная Больцмана.

Поскольку для $T = 0\ K$ функция распределения Ферми−Дирака

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}\right) + 1} = 1,$$

то

$$dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp.$$

Число электронов в единице объема, импульсы которых заключены в интервале от 0,9 $p_{\max}$ до $p_{\max}$, найдем интегрированием в соответствующих пределах:

$$\Delta n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int\limits_{0,9 p_{\max}}^{p_{\max}} p^2 dp = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_{\max}^3 \left(1 - (0{,}9)^3\right);$$

$$\Delta n = \frac{0{,}271}{3\pi^2} \frac{p_{\max}^3}{\hbar^3}.$$

Учитывая, что $p_{\max}^2 = 2m\varepsilon_F$, можно найти число электронов объема V:

$$\Delta N = \frac{0{,}271}{3\pi^2 \hbar^3} (2m\varepsilon_F)^{\frac{3}{2}} V$$

или

$$\Delta N = \frac{0{,}271}{3\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} V.$$

Проверим размерность:

$$[\Delta N] = (\frac{кг \cdot Дж}{Дж^2 \cdot c^2})^{\frac{3}{2}} \cdot м^3 = \sqrt{(\frac{кг}{Дж \cdot c^2})^3} \cdot м^3 =$$

$$= \sqrt{\frac{кг^3}{кг^3 \cdot \frac{м^6}{c^6} \cdot c^6}} \cdot м^3 = 1.$$

Произведя вычисления, найдем

$$\Delta N = 2,9 \cdot 10^{23}.$$

Ответ: $\Delta N = 2,9 \cdot 10^{23}$.

Задача 3. Рассчитать величину коэффициента Холла для серебра по известным значениям плотности и молярной массы.

Дано:
ρ
μ

$R_H - ?$

Решение.

Коэффициент Холла для проводников равен

$$R_H = -\frac{1}{en},$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* – заряд электрона; n – концентрация электронов.

Каждый атом серебра отдает в зону проводимости один электрон, поэтому концентрация электронов равна числу атомов в единице объема:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{\rho V}{\mu} N_A,$$

тогда

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho}{\mu} N_A,$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ $моль^{-1}$ − число Авогадро; $\rho = 1,05 \cdot 10^4$ $кг/м^3$ − плотность серебра; $\mu = 0,108$ $кг/моль$ − молярная масса серебра. С учетом этого

$$R_H = -\frac{\mu}{eN_A\rho}.$$

Проверим размерность:

$$[R_H] = \frac{кг / моль}{Кл / моль \cdot кг / м^3} = \frac{м^3}{Кл}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$R_H = -1,06 \cdot 10^{-10} м^3 / Кл.$$

Ответ: $R_H = -1,06 \cdot 10^{-10} м^3 / Кл$.

Задача 4. Концентрация свободных электронов железа $8{,}5\cdot10^{22}$ *см*$^{-3}$, удельное сопротивление $9{,}7\cdot10^{-8}$ *Ом·м*. Найти время релаксации, среднюю длину свободного пробега электронов и их подвижность при темпера туре $20°$ *С*.

Дано:
$n = 8{,}5\cdot10^{22}$ *см*$^{-3}$ = $= 8{,}5\cdot10^{28}$ *м*$^{-3}$
$\rho = 9{,}7\cdot10^{-8}$ *Ом·м*
$t = 20°$ *C*,
$T = 293$ *К*

$l - ?$
$\tau - ?$
$\mu - ?$

Решение.

Электропроводность металлов определяется согласно

$$\sigma = \frac{e^2 n\tau}{m} = \frac{4}{3}\frac{e^2 n\bar{l}}{m}\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\right)}, \qquad (1)$$

где $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг* – масса электрона; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ *Кл* – заряд электрона.

Из (1) с учетом $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ и распределения Максвелла для скорости хаотического (теплового) движения электронов $\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\right)} = \left(\frac{2m}{\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}$ найдем

$$\tau = \frac{m}{\rho e^2 n}, \qquad (2)$$

$$l = \frac{3m\sqrt{\pi kT}}{4\rho e^2 n\sqrt{2m}}, \qquad (3)$$

где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ *Дж/К* – постоянная Больцмана.

Проверим размерность:

$$[\tau] = \frac{кг}{Ом\cdot м\cdot Кл^2\cdot м^{-3}} = \frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot В\cdot А} = \frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot \frac{Дж}{с}} = с;$$

$$[l] = \frac{кг\cdot\sqrt{Дж/К\cdot К}}{Ом\cdot м\cdot Кл^2\cdot м^{-3}\sqrt{кг}} = \frac{\sqrt{кг\cdot Дж}}{Ом\cdot Кл^2\cdot м^{-2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{кг\cdot м^2\cdot кг\cdot с^{-2}}}{м^2\cdot кг\cdot с^{-3}\cdot А^{-2}\cdot с^2\cdot А^2\cdot м^{-2}} = м.$$

Подставляя численные значения, найдем

$$\tau = 4{,}3\cdot10^{-15}\,с;\ \ l = 6{,}7\cdot10^{-9}\,м.$$

Зная τ, найдем

$$\mu = \frac{e\tau}{m} = 7{,}6\cdot10^{-4}\,м^2/(В\cdot с).$$

Ответ: $\tau = 4{,}3\cdot10^{-15}\,с;\ \ l = 6{,}7\cdot10^{-9}\,м;$
$\mu = 7{,}6\cdot10^{-4}\,м^2/(В\cdot с).$

Задача 5. Во сколько раз изменится электропроводность чистого германия при повышении температуры от –23° *C* до +27° *C*? Ширина запрещенной зоны для германия равна 0,74 *эВ*.

Дано:

$t_1 = -23°\ C$,
$T_1 = 250\ K$

$t_2 = +27°\ C$,
$T_2 = 300\ K$

$\Delta E = 0{,}74\ эВ = 1{,}18 \cdot 10^{-19}\ Дж$

$\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$ – ?

Решение.

Зависимость удельной электропроводности полупроводников от температуры определяется согласно

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2\kappa T}\right),$$

где σ_0 – электропроводность при 0° *C*;

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$ – постоянная Больцмана.

С учетом условия

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT_1}\right) \text{ и } \sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT_2}\right).$$

Найдем отношение

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left(\frac{\Delta E}{2kT_1} - \frac{\Delta E}{2\kappa T_2}\right) = \exp\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right);$$

откуда

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 17{,}5.$$

Ответ: $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = 17{,}5.$

Задачи для самостоятельного решения

1. При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура вырождения электронного газа в нем 0° *C*? (При $1{,}86 \cdot 10^{25}\ м^{-3}$)

2. Экспериментальное значение границы Ферми для лития при 0 *K* равно 3,5 *эВ*. Какое значение эффективной массы электрона следует подставить в формулу, чтобы получить согласие между теоретическим и экспериментальным значениями границы Ферми? ($1{,}15 \cdot 10^{-30}\ кг$)

3. Каковы соответственно вероятности того, что при комнатной температуре ($kT = 0{,}025\ эВ$) электрон займет состояния, лежащие на 0,1 *эВ* выше и на 0,1 *эВ* ниже уровня Ферми? (0,0179; 0,98)

4. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T = 0\ K$, больше в алюминии, чем в меди, если уровни Ферми соответственно равны 11,7 *эВ*, 7 *эВ*? (В 3 раза)

5. Определить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся в интервале 0,05 *эВ* ниже уровня Ферми и выше уровня Ферми, для двух температур: 1) 290 *К*; 2) 58 *К*. (0,893 и −0,119; 0,999955 и $4{,}5\cdot10^{-5}$)

6. Вычислить среднюю кинетическую энергию электронов в металле при $T = 0$ *К*, если уровень Ферми 7,0 *эВ*. (4,2 *эВ*)

7. Металл находится при температуре 0 *К*. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $\varepsilon_F/2$ до ε_F больше числа электронов с энергией от 0 до $\varepsilon_F/2$? (В 1,83)

8. Электроны в металле находятся при температуре 0 *К*. Определить относительное число свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2%. (0,03)

9. Какова вероятность того, что электрон при температуре 27° *С* займет состояние, лежащее на 0,1 *эВ* выше уровня Ферми? ($1{,}79\cdot10^{-2}$)

10. Какова вероятность того, что электрон в металле будет иметь энергию, равную энергии Ферми при $T > 0$ *К*? (0,5)

11. В медном проводнике с площадью поперечного сечения 0,2 *см*^{2} идет ток 1,0 *А*. Какова средняя скорость дрейфа электронов? ($3{,}7\cdot10^{-6}$ *м/с*)

12. Чему равна подвижность электронов натрия при 0° *С*, если электропроводность его $2{,}3\cdot10^{7}$ *Ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$, а концентрация носителей заряда $2{,}5\cdot10^{28}$ *м*$^{-3}$? ($5{,}6\cdot10^{-3}$ *м*^{2}*/(В·с)*)

13. Отношение электропроводностей серебра и меди при одинаковой температуре равно 1,06. Вычислить отношение подвижностей электронов в этих металлах, считая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. (1,5)

14. Удельная электропроводность меди $6{,}0\cdot10^{7}$ *Ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$. Определить время релаксации электрона, считая, что каждый атом меди в твердом состоянии отдает в зону проводимости один валентный электрон. ($2{,}5\cdot10^{-14}$ *с*)

15. Вычислить среднюю длину свободного пробега электронов проводимости натрия при комнатной температуре. Удельная электропроводность натрия $2{,}3\cdot10^{7}$ *Ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$. ($4{,}1\cdot10^{-9}$ *м*)

16. Удельная электропроводность меди $6{,}0\cdot10^{7}$ *Ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$. Определить теплопроводность меди при указанной температуре, если число Лоренца $2{,}23\cdot10^{-8}$ *Вт·Ом·К*$^{-2}$. (365 *Дж/(К·м·с)*)

17. Вычислить число Лоренца для калия, если его удельное сопротивление $6{,}23\cdot10^{-8}$ *Ом·м*, а теплопроводность 97,1 *Вт/(м·К)* при 300 *К*. ($2{,}21\cdot10^{-8}$ *Вт·Ом·К*$^{-2}$)

18. Исходя из закона Видемана–Франца, рассчитать теплопроводность кадмия при температуре 293 *К*, если его удельное сопротивление $7{,}57\cdot10^{-8}$ *Ом·м*, а число Лоренца $2{,}42\cdot10^{-8}$ *Вт·Ом·К*$^{-2}$. (94 *Вт*/(*м·К*))

19. Удельное сопротивление серебряного провода при комнатной температуре $1{,}54\cdot10^{-8}$ *Ом·м*. Вычислить среднюю скорость дрейфа электронов при напряженности электрического поля вдоль провода 1,0 *В/см*, полагая, что в 1,0 *м*^{3} серебра находится $5{,}8\cdot10^{28}$ электронов проводимости. Определить подвижность и время релаксации электронов. ($6{,}9\cdot10^{-3}$ *м*^{2}/(*В·с*); $3{,}9\cdot10^{-4}$ *с*)

20. Вычислить скорость дрейфа электрона меди при наложении электрического поля напряженностью 100 *В/м*. Подсчитать отношение скорости дрейфа к скорости Ферми, если уровень Ферми для меди равен 7 *эВ*. ($1{,}56\cdot10^{-6}$ *м/с*; $1{,}9\cdot10^{5}$)

21. Удельная проводимость металла $1{,}0\cdot10^{7}$ *Ом*$^{-1}$·*м*$^{-1}$. Вычислить среднюю длину свободного пробега электрона в металле, если концентрация свободных электронов $1{,}0\cdot10^{23}$ *м*$^{-3}$. Среднюю скорость хаотического движения электронов принять равной 10 *Мм/с*. (71 *нм*)

22. В медном проводнике площадью сечения 0,4 *см*^{2} сила тока 1,5 *А*. Найти среднюю скорость дрейфа электронов, если их концентрация $8{,}4\cdot10^{28}$ *м*$^{-3}$. (0,3 *м/с*)

23. В серебре объемом 1,0 *м*^{3} находится приблизительно $5{,}8\cdot10^{28}$ электронов проводимости. Найти среднюю скорость дрейфа электронов при наложении электрического поля напряженностью 1,0 *В/см* вдоль проводника. (0,68 *м/с*)

24. Считая, что каждый атом меди в твердом состоянии отдает в зону проводимости один валентный электрон, найти время релаксации электрона. Удельное сопротивление меди 17,2 *нОм·м*. ($2{,}6\cdot10^{-14}$ *с*)

25. Концентрация свободных электронов натрия $2{,}5\cdot10^{28}$ *м*$^{-3}$. Определить температуру Ферми и скорость электронов на уровне Ферми. ($3{,}5\cdot10^{4}$ *К*; $1{,}0\cdot10^{6}$ *м/с*)

26. Вычислить коэффициент Холла для меди. Молярная масса меди 63,5 *кг/кмоль*, плотность $8{,}89\cdot10^{3}$ *кг/м*^{3}. ($7{,}4\cdot10^{-11}$ *м*^{3}/*Кл*)

27. Вычислить концентрацию и подвижность электронов проводимости натрия, если для него коэффициент Холла и удельное сопротивление равны соответственно $-2{,}35\cdot10^{-10}$ *м*^{3}/*Кл* и $4{,}35\cdot10^{-8}$ *Ом·м*. ($2{,}7\cdot10^{28}$ *м*$^{-3}$; $5{,}4\cdot10^{-3}$ *м*^{2}/(*В·с*))

28. Через золотую фольгу толщиной $1{,}0\cdot10^{-4}$ *м*, помещенную в магнитное поле индукцией 1,2 *Тл*, пропускается ток 1,5 *А*. Вычислить коэффициент Холла золота, если измеренная э.д.с. Холла 1,5 *мкВ*. Сравнить экспериментальное значение коэффициента Холла с расчетным в предположении, что на один атом приходится один валентный электрон. Плотность золота $1{,}93\cdot10^{4}$ *кг/м*^{3}, молярная масса 0,197 *кг/моль*. ($8{,}3\cdot10^{-11}$ *м*^{3}/*Кл*, $1{,}06\cdot10^{-10}$ *м*^{3}/*Кл*)

29. Вычислить удельное сопротивление германиевого полупроводника *p*-типа при плотности дырок $3{,}0\cdot10^{20}$ *м*$^{-3}$. Сравнить с сопротивлением полупроводника *n*-типа при той же концентрации электронов. (0,115 *Ом·м*; 0,054 *Ом·м*)

30. Удельное сопротивление собственного германия при 27° *C* 0,47 *Ом·м*. Полагая, что подвижности электронов и дырок соответственно равны 0,38 и 0,18 *м*^{2}/(*В·с*), вычислить плотность носителей тока. (2,3·10^{-19} *м*$^{-3}$)

31. Вычислить скорость дрейфа электронов и дырок в германии при комнатной температуре (300 *К*) в поле напряженностью 1,0·10^3 *В/м*. (380 *м/с*; 180 *м/с*)

32. Образец из полупроводника прямоугольной формы высотой 0,2 *см*, шириной 0,2 *см* и длиной 0,5 *см* имеет 1,0·10^{21} свободных зарядов в 1 *м*^{3} при 20° *С*. К двум противоположным узким граням приложено напряжение 20 *В*. Вычислить величину тока, полагая подвижность носителей зарядов равной 0,03 *м*^{2}/(*В·с*). (4,8·10^{-2} *А*)

33. Образец германия *n*-типа толщиной 1,0 *мм* с концентрацией электронов 1,0·10^{20} *м*$^{-3}$ помещен в магнитное поле с индукцией 0,1 *Тл*. Определить величину э.д.с. Холла при силе тока 1,0 *мА*, протекающего через образец. (6,0·10^{-3} *В*)

34. Удельная проводимость и коэффициент Холла антимонида индия соответственно равны 4,0·10^2 *Ом*$^{-1}$·*м*$^{-1}$ и 1,0·10^{-2} *м*^{3}/*Кл*. Считая, что проводимость осуществляется зарядами одного знака, определить их концентрацию и подвижность. (4,0 *м*^{2}/(*В·с*))

35. Удельное сопротивление монокристалла кремния *р*-типа при комнатной температуре (300 *К*) составляет 9,0·10^{-4} *Ом·м*. Чему должен равняться коэффициент Холла, если подвижность дырок 0,04 *м*^{2}/(*В·с*)? (3,6·10^{-5} *м*^{3}/*Кл*)

36. Коэффициент Холла и удельное сопротивление полупроводника соответственно равны −3,66·10^{-4} *м*^{3}/*Кл* и 8,93·10^{-3} *Ом·м*. Для определения эффекта Холла к образцу приложено магнитное поле с магнитной индукцией 0,5 *Тл*. Найти угол Холла. (1°12')

37. Вычислить коэффициент Холла для кристалла германия с концентрацией индия и сурьмы соответственно 1,0·10^{23} и 1,0·10^{24} *м*$^{-3}$. (−5,5·10^{-6} *м*^{3}/*Кл*)

38. Вычислить концентрации собственных и примесных носителей тока в германии, содержащем 5,0·10^{23} *м*$^{-3}$ атомов мышьяка, при комнатной температуре. (2,0·10^{19} *м*$^{-3}$)

39. Определить концентрацию свободных электронов в металле при температуре 0 *К*. Энергию Ферми принять равной 1,0 *эВ*. (4,57·10^{27} *м*$^{-3}$)

40. Определить отношение концентраций свободных электронов при $T = 0$ *К* в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны 4,72 *эВ*; 1,53 *эВ*. (5,41)

41. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление 0,48 *Ом·м.* Определить концентрацию носителей заряда, если подвижность электронов и дырок соответственно равны 0,36 и 0,16 *м*^{2}/(*В·с*). (2,5·10^{19} *м*$^{-3}$)

42. Удельная проводимость кремния с примесями равна 112 $Ом^{-1}\cdot м^{-1}$. Определить подвижность дырок и их концентрацию, если коэффициент Холла равен $3{,}66\cdot 10^{-4}$ $м^3/Кл$. Принять, что проводник обладает только дырочной проводимостью. ($3{,}5\cdot 10^{-2}$ $м^2/(В\cdot с)$; $2{,}0\cdot 10^{22}$ $м^{-3}$)

43. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной 1 *см* и длиной 10 *см* помещен в однородное магнитное поле индукцией 0,2 *Тл*. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению длины) приложено постоянное напряжение 300 *В*. Определить холловскую разность потенциалов на гранях пластины, если коэффициент Холла 0,1 $м^3/Кл$, удельное сопротивление 0,5 $Ом\cdot м$. (1,2 *В*)

44. Тонкая пластина из кремния шириной 2 *см* помещена перпендикулярно линиям магнитного поля ($B = 0{,}5$ *Тл*). При плотности тока 2 $мкА/мм^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов оказалась равной 2,8 *В*. Определить концентрацию носителей тока. ($5{,}25\cdot 10^{16}$ $м^{-3}$)

45. Сравнить удельную электропроводность чистого германия при $-40°$ *С* и $+100°$ *С*. Энергия активации для германия 0,72 *эВ*. ($\sigma_1/\sigma_2 = 6{,}6\cdot 10^5$)

46. Найти удельное сопротивление германиевого полупроводника *p*-типа при плотности дырок $3{,}0\cdot 10^{20}$ $м^{-3}$ и сравнить его с сопротивлением полупроводника *n*-типа при той же концентрации электронов. Подвижность дырок в германии 0,18 $м^2/(В\cdot с)$, электронов 0,38 $м^2/(В\cdot с)$. (0,12 $Ом\cdot м$; 0,05 $Ом\cdot м$)

47. Удельное сопротивление германия при $27°$ *С* 0,47 $Ом\cdot м$. Найти концентрацию носителей заряда в германии. Принять для германия подвижность электронов и дырок 0,38 $м^2/(В\cdot с)$ и 0,18 $м^2/(В\cdot с)$. ($2{,}37\cdot 10^{19}$ $м^{-3}$)

48. Во сколько раз концентрация носителей тока в чистом соединении InSb при температуре 400 *К* больше, чем при 300 *К*? Ширина запрещенной зоны для InSb 0,18 *эВ*. (В 3,67 раза)

49. Найти электропроводность германия, если известно, что в нем содержится In в концентрации $1{,}0\cdot 10^{22}$ $м^{-3}$ и Sb в концентрации $1{,}0\cdot 10^{21}$ $м^{-3}$. Принять подвижность в германии электронов $\mu_n = 0{,}38$ $м^2/В\cdot с$ и дырок $\mu_p = 0{,}18$ $м^2/В\cdot с$. (350 $Ом^{-1}\cdot м^{-1}$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – 3-е изд., испр. и доп. – СПб. : Книжный мир, 2005. – 328 с.
2. Иродов, И. Е. Задачи по квантовой физике : учеб. пособие для физ. спец. вузов / И. Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1991. – 175 с.
3. Квантовая физика: сб. задач / И. И. Коваленко [и др.] ; под ред. Е. Н. Котликова, Н. П. Лавровской. – СПб. : СПбГУАП, 2004. – 55 с.
4. Маскевич, С. А. Атомная физика. Практикум по решению задач : учеб. пособие / С. А. Маскевич. – Минск : Выш. шк., 2010. – 455 с.
5. Пинчук, А. И. Задачи по физике твердого тела / А. И. Пинчук, С. Д. Шаврей. – Мозырь : МГПИ, 2001.
6. Практические занятия по оптике / А. И. Бежанова [и др.]. – Мозырь : МГПУ, 2005.
7. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 3 т. / И. В. Савельев. – 10-е изд. – СПб. : Лань, 2011. – Т. 3 : Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. – 320 с.
8. Сборник задач по общему курсу физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин [и др.]. – 5-е изд., стер. – М. : Физматлит ; Лань, 2006. – Т. 5 : Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц. – 184 с.
9. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – 2-е изд., стер. – М. : Физматлит ; Изд-во МФТИ, 2002. – Т. 5 : Атомная и ядерная физика. – 784 с.
10. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – 11-е изд., стер. – М. : Академия, 2006. – 560 с.
11. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2001. – 640 с.