УДК 519.21

***М.Д. Юдин***

# К ВОПРОСУ ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

В данной статье устанавливается корректность найденных нами ранее [1] условий аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин безгранично делимыми распределениями.

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$ – система серий случайных величин, имеющих нулевые математические ожидания (м. о.), и конечные дисперсии, $S_n=\sum\limits_{s}^{n}\xi_{ns}$, $\varphi_n(t)$ – характеристическая функция (х. ф.) суммы $S_n$, $G_n(x)$ – функция распределения (ф. р.) суммы $S_n$,

$$\mathrm{K}_n(x)=\sum_{s=1}^{n}\mathrm{M}\left(\xi_{ns}^2;\quad \xi_{ns}\le x\right),$$

$$a_n=\sum_{s\ne q}\mathrm{M}\xi_{ns}\xi_{nq},$$

$$\psi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}\,d\mathrm{K}_n(x)-\frac{a_nt^2}{2}, \tag{1}$$

$F_n(x)$ – ф. р. с х. ф. $exp\psi_n(x)$.

Заметим, что функция $\mathrm{K}_n(x)$ ограниченная и неубывающая.

Положим,

$$\mathrm{K}_n\left(\frac{c}{\sqrt{n}}+o\right)-\mathrm{K}_n\left(-\frac{c}{\sqrt{n}}-o\right)=b_n^2,\quad c>0, \tag{2}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\mathrm{M}\left(\xi_{ns}^2;\quad |\xi_{ns}|>\frac{c}{\sqrt{n}}\right)=g_n^2. \tag{3}$$

В [1] доказываются теорема и лемма, содержание которых мы сформулируем в виде одного предложения.

Теорема. *Пусть системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n=m_0n^{\rho}$ *– зависимая, где* $0\le\rho<1/4$, $m_0$ *– любое постоянное число, кроме того, существуют постоянные* $H_1$, $H_2$, $n_0$ *и с такие, что при* $n\ge n_o$, $0<|p-s|\le m_0n^{\rho}$, $0\le|q-s|\le m_0n^{\rho}$ *выполняются условия:*

$$\max_s \mathrm{M}\xi_{ns}^2\le\frac{H_1}{n}, \tag{4}$$

$$\max_{s,p,q}\mathrm{M}\left|\xi_{ns}\xi_{nr}\xi_{nq}\right|\le\frac{H_2}{n^{3/2}}, \tag{5}$$

$$\inf_n a_n\ge 0, \tag{6}$$

$$b_n^2 \geq g_n^2 . \tag{7}$$

*Тогда при* $|t| \leq An^{1/2-\delta}$*, где* $\delta > 0$*,* $A$ *– любое постоянное число, найдется* $n_1$ *такое, что при* $n \geq n_1$*, будут выполняться неравенства*

$$\left|\varphi_n(t) - \exp\psi_n(t)\right| \leq \frac{C_1|t|^3}{n^{1/2-2\rho}}, \tag{8}$$

$$\sup_x\left|G_n(x) - F_n(x)\right| \leq \frac{C_2}{n^{1/8-\rho/2}}, \tag{9}$$

*где* $C_1$ *и* $C_2$ *– независимые от* $n$ *постоянные.*

Мы ставим перед собой задачу нахождения примера серий $m_n$ – зависимых случайных величин, которая удовлетворяла бы всем условиям приведенной теоремы.

Пример. Пусть $Y_{n1}, Y_{n2}, \ldots, Y_{n(n+1)}, Z_{n1}, Z_{n2}, \ldots, Z_{nn}$ – система серий, $n = \overline{1,\infty}$, независимых (в совокупности) случайных величин, где $Y_{nq}$, $q = \overline{1, n+1}$, случайные величины, имеют одинаковое распределение:

$$Y_{nq} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, & p_1 = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, & p_2 = \dfrac{1}{2}, \quad \sigma > 0. \end{cases}$$

Величины $Z_{np}$ также распределены одинаково, причем

$$Z_{np} = \begin{cases} 0, & p_1 = \dfrac{n-\lambda}{n}, \\ 1, & p_2 = \dfrac{\lambda}{n}, \quad p = \overline{1,n}, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Составим систему серий $m = 2$ зависимых случайных величин $\xi_{ns}$, имея в виду, что $MZ_{np} = \dfrac{\lambda}{n}$, положив

$$\left.\begin{aligned} \xi_{n1} &= Y_{n1} + Y_{n2} + Z_{n1} - \frac{\lambda}{n}, \\ \xi_{n2} &= Y_{n2} + Y_{n3} + Z_{n2} - \frac{\lambda}{n}, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \xi_{nn} &= Y_{nn} + Y_{n(n+1)} + Z_{nn} - \frac{\lambda}{n} \end{aligned}\right\}, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{10}$$

Очевидно, что величины системы (10) имеют нулевые м. о., для этой системы $\rho = 0$, $m_0 = 2$.

Заметив, что

$$MY_{nq}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$M\left(Z_{np} - \frac{\lambda}{n}\right)^2 = MZ_{np}^2 - \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2},$$

найдем для величин системы (10), в силу независимости слагаемых, $Y_{ns}$, $Y_{n(s+1)}$, $Z_{ns}$,

$$M\xi_{ns}^2 = \frac{2\sigma^2}{n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2}. \qquad (11)$$

Из (11) следует, что существует число $H_1 > 0$ такое, что

$$M\xi_{ns}^2 \le \frac{H_1}{n},$$

т. е. условие (4) теоремы выполняется.

Пусть $\mathcal{B}_{ns}$ – σ-алгебра, порожденная величиной $\xi_{ns}$. Тогда, очевидно,

$$M\left(\xi_{np}^2 / \mathcal{B}_{ns}\right) \le \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2}, \qquad |p-s| = 1.$$

Поэтому, используя также (11), найдем

$$M\left|\xi_{ns}\xi_{np}^2\right| = M\left(\left|\xi_{np} M\left(\xi_{np}^2/\mathcal{B}_{ns}\right)\right|\right) \le \left(\frac{2\sigma^2}{n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) M^{1/2}\left|\xi_{np}\right|^2 \le \left(\frac{2\sigma^2}{n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2}\right)^{3/2}.$$ Если же $s, p$ и $q$ различны, то какие-то две величины из $\xi_{ns}$, $\xi_{np}$, $\xi_{nq}$ независимы. Пусть, например, $\xi_{ns}$ и $\xi_{nq}$ независимы. Тогда

$$M\left|\xi_{ns}\xi_{np}\xi_{nq}\right| = M\left(\left|\xi_{ns}\right| M\left(\left|\xi_{np}\right|/\mathcal{B}_{ns}\right) M\left(\left|\xi_{nq}\right|/\mathcal{B}_{ns}\right)\right) \le$$
$$\le \left(\frac{2\sigma^2}{n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) M^{1/2}\left|\xi_{ns}\right|^2 \le \left(\frac{2\sigma^2}{n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2}\right)^{3/2}.$$

Таким образом, найдется постоянная $H_2$, при которой будут выполняться неравенства

$$M\left|\xi_{ns}\xi_{np}\xi_{nq}\right| \le \frac{H_2}{n^{3/2}}.$$

Это значит, что условие (5) выполняется.

Впрочем, оценку смешанных моментов третьего порядка можно было провести непосредственно, не пользуясь условным м. о.

Оценим в нашем примере $a_n$. Очевидно, здесь

$$a_n = \sum_{0<|s-p|\le 1} M\xi_{ns}\xi_{np}.$$

Поскольку

$$M\xi_{ns}\xi_{n(s+1)} = M\left\{\left(Y_{ns} + Y_{n(s+1)} + Z_{ns} - \frac{\lambda}{n}\right)\left(Y_{n(s+1)} + Y_{n(s+2)} + Z_{n(s+1)} - \frac{\lambda}{n}\right)\right\} =$$
$$= MY_{n(s+1)}^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

то

$$a_n = \sum_{0<|s-p|\le 1} M\xi_{ns}\xi_{np} = 2(n-1)\frac{\sigma^2}{n}. \qquad (12)$$

Следовательно, при $n > 1$ $\inf a_n > 0$. Это показывает, что выполняется условие (6).

Выберем числа $\sigma > 0$, $c > 0$ и $n_0$ так, чтобы при $n > n_0'$ выполнялось неравенство

$$\frac{\lambda}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{c}{\sqrt{n}} < 1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (13)$$

Очевидно, это всегда можно сделать. Подсчитаем непосредственно значения $b_n^2$ и $g_n^2$, определенных в (2) и (3). Имеем

$$b_n^2 = \mathbf{K}_n\left(\frac{c}{\sqrt{n}}+o\right)-\mathbf{K}_n\left(-\frac{c}{\sqrt{n}}-o\right)=\sum_{s=1}^{n} M\left(\xi_{ns}^2;\left|\xi_{ns}\right|<\frac{c}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left\{4\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\frac{\lambda}{n}\right)^2+2\frac{\lambda^2}{n^2}+4\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\frac{\lambda}{n}\right)^2\right\}\frac{1}{4}\frac{n-\lambda}{n}n=\left(\frac{2\sigma^2}{n}+\frac{5\lambda^2}{2n^2}\right)(n-\lambda).$$

Также

$$g_n^2=\sum_{s=1}^{n} M\left(\xi_{ns}^2;\ \left|\xi_{ns}\right|>\frac{c}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left\{\left(-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}+\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^2+2\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^2+\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}+\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^2\right\}\frac{1}{4}\frac{\lambda}{n}n=\left(\frac{2\sigma^2}{n}+\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^2\right)\lambda.$$

Таким образом, мы получили

$$b_n^2=\left(\frac{2\sigma^2}{n}+\frac{5\lambda^2}{2n^2}\right)(n-\lambda)\xrightarrow[n\to\infty]{}2\sigma^2,$$

$$g_n^2=\left(\frac{2\sigma^2}{n}+\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^2\right)\lambda\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda.$$

Следовательно, если взять в неравенстве (13) $0<\lambda<2\sigma^2$, то, начиная с некоторого $n_0''$, будет $b_n^2>g_n^2$, т. е. будет выполняться условие (7) теоремы.

Таким образом, при $n_0=\max\left(n_0', n_0''\right)$ система серий (10) будет удовлетворять всем условиям теоремы. Следовательно, при $|t|\le A^{1/2-\rho}$, где А – любое постоянное число, для системы (10) найдется $n_1$ и независимые от $n$ постоянные $C_1$ и $C_2$ такие, что будут выполняться неравенства (8) и (9).

Если в нашем примере рассматривать действия величин $Y_{ns}$ в сумме $S_n=\sum\xi_{ns}$ как «помехи», причем соседние две «помехи» накладываются, то следует заметить, что поскольку $a_n\to 2\sigma^2$, то «корреляционный шум» сохранится и в предельном распределении $S_n$.

Условие (7), по-видимому, выполняется в тех случаях, когда значения величины, попадающие в окрестность нуля, имеют сравнительно большие вероятности, а сами значения убывают «не очень быстро». Это ведет к появлению нормального компонента в предельном распределении $S_n$, дисперионный параметр которого даст скачок функции

$$K(x)=\lim_{n\to\infty}K_n(x)\quad \text{в нуле.}$$

Кстати, имея в виду асимптотическое поведение $b_n^2$ и $g_n^2$, получим

$$\mathbf{K}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2\sigma^2, & 0<x\le 1,\\ 2\sigma^2+\lambda, & x>1.\end{cases}\qquad(14)$$

Если воспользоваться теоремой 1 из [2], ее условия в нашем примере выполнены, то из равенств (14), (1) и соотношения $a_n \to 2\sigma^2$ последует, что суммы $S_n$ будут иметь предельное распределение, логарифм х.ф. которого

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2}\, d\mathbf{K}(x) - \frac{2\sigma^2 t^2}{2}.$$

или

$$\psi(x) = -\frac{2\sigma^2 t^2}{2} + \lambda \left( e^{it} - 1 - it \right) - \frac{2\sigma^2 t^2}{2}.$$

Поскольку $\exp\left(-\frac{4\sigma^2 t^2}{2}\right)$ – х. ф. нормального распределения с дисперсией $4\,\sigma^2$ и нулевым м. о., а $\exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1 - it\right)\right)$ – х. ф. сдвинутого распределения Пуассона, то суммы $S_n$ будут иметь предельное распределение, которое является сверткой нормального и пуассоновского распределений.

***Литература***

1. Юдин, М.Д. Замечание к аппроксимации распределений сумм зависимых величин безгранично делимыми распределениями / М.Д. Юдин // Весцi АН БССР, Сер. фiз.-мат. навук. – 1987. – № 2. – С. 38–41.

2. Юдин, М.Д. Об обобщениях формул Колмогорова и Леви-Хинчина на суммы зависимых величин / М.Д. Юдин // Доклады АН БССР. – 1986. – Том XXX, № 1. – С. 29–31.

***Summary***

It is built example, in which the distribution of the sums of dependent random variables is approximated by the infinitely divisible distribution.

*Поступила в редакцию 24.03.06.*