УДК 517.917

В. В. Шкут

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

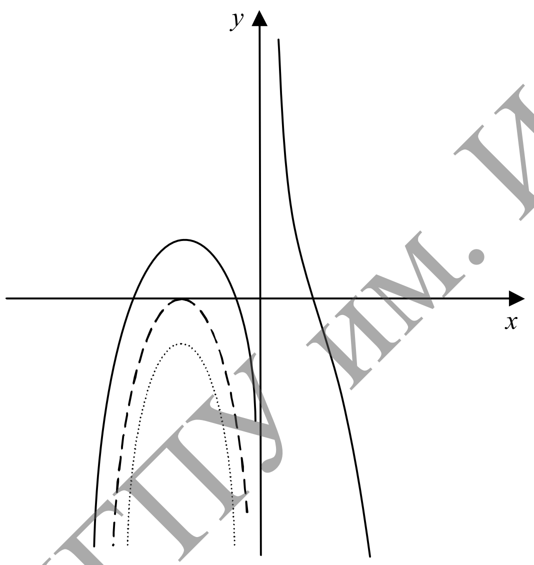
Пусть для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \equiv P(x,y),\\ \frac{dy}{dt} &= b_{10}x + b_{01}y + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \equiv Q(x,y),\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

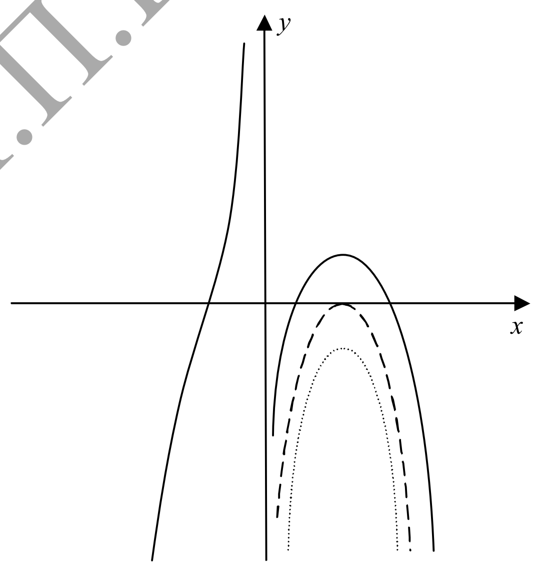
где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, алгебраическая кривая [см. 1, 52]

$$\omega(x,y) \equiv x^3 + xy + px + q = 0,\ q \neq 0 \quad (2)$$

является частным интегралом. Кривая (2) состоит из двух бесконечных ветвей, имеющих одну асимптоту. Она пересекает ось Ox в одной, двух или трех точках в зависимости от того, имеет ли уравнение $x^3 + px + q = 0$ один, два или три действительных корня. Кривая имеет вид:



$q < 0$



$q > 0$

Лемма. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{2p}{3}x + x^3 - \frac{p}{3q}x^2y \equiv P(x,y),\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2p^3 + 9q^2}{3q}x - \frac{5p}{3}y + \frac{2p^2}{3q}x^3 + 2x^2y - \frac{2p}{3q}xy^2 \equiv Q(x,y).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для доказательства леммы следует воспользоваться известной теоремой [2], которая применительно к нашему случаю, звучит так: для того чтобы кривая $\omega(x, y) = 0$ была частным интегралом системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \ \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}P + \frac{\partial\omega}{\partial y}Q \equiv \omega F. \tag{4}$$

Здесь $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ – многочлены степени n, $F(x,\ y)$ – многочлен степени $n-1$. В нашем случае равенство (4) имеет вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}P + \frac{\partial\omega}{\partial y}Q \equiv \omega\left(\frac{2p^2}{3q}x + 3x^2 - \frac{p}{q}xy\right). \tag{5}$$

Используя эту теорему, легко показать, что $x = 0$ также является частным интегралом системы (3).

Замечание. Если $p = 0$, то $x = 0$ – особая линия системы (3). Считаем далее, что $p \neq 0$.

Найдем возможные особые точки системы (3) в конечной части плоскости. Из равенства (5) следует, что они лежат на линиях

$$x = 0, \ 9q - 3py + 2p^2 = 0, \ \omega(x,\ y) = 0.$$

С учетом этого для отыскания особых точек системы (3) решаем систему $P(x,\ y) = 0$, $Q(x,\ y) = 0$ и получаем особые точки системы (3) в конечной части плоскости:

$$x_1 = 0, \ y_1 = 0; \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{3q}{p}, \ y_2 = \frac{2p^3 + 27q^2}{3p^2}; \tag{7}$$

$$x_3 = -\frac{3q}{p}, \ y_3 = -\frac{2p^3 + 27q^2}{3p^2}; \tag{8}$$

$$x_4 = \sqrt{-p}, \ y_4 = -\frac{q}{\sqrt{-p}}, \ p < 0; \tag{9}$$

$$x_5 = -\sqrt{-p}, \ y_4 = \frac{q}{\sqrt{-p}}, \ p < 0. \tag{10}$$

Замечаем, что точка (7) лежит на прямой $9q - 3py + 2p^2 = 0$, а точки (8), (9), (10) лежат на кривой (2).

Далее находим характеристические числа особых точек (6) – (10). Они, соответственно, такие:

$$\lambda_1 = \frac{2p}{3}, \ \lambda_2 = -\frac{5p}{3}; \tag{6'}$$

$$\lambda_1 = -4p, \ \lambda_2 = -\frac{p^3 + 9q^2}{p^2}; \tag{7', 8'}$$

$$\lambda_1 = -\frac{2p}{3q}(3q - p\sqrt{-p}),\ \lambda_2 = -\frac{2p}{3q}(3q + p\sqrt{-p}). \qquad (9', 10')$$

Найдем теперь особые точки системы (3) в бесконечной части плоскости и их характеристические числа. К системе (3) последовательно применяем преобразования Пуанкаре [3, 400]:

$$x = \frac{1}{z},\ y = \frac{u}{z}\ \text{ и }\ x = \frac{v}{z},\ y = \frac{1}{z}$$

и сделаем замену времени $\frac{dt}{z^2} \to dt.$ Получим системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{2p^2}{3q} + u - \frac{p}{3q}u^2 + \frac{2p^3 + 9q^2}{3q}z^2 - \frac{7p}{3}uz^2 \equiv \bar{P}(u, z), \\ \frac{dz}{dt} &= -z + \frac{p}{3q}uz - \frac{2p}{3}z^3 \equiv \bar{Q}(u, z) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{p}{3q}v^2 - v^3 + \frac{7p}{3}vz^2 - \frac{2p^2}{3q}v^4 - \frac{2p^3 + 9q^2}{3q}v^2z^2 \equiv \bar{\bar{P}}(v, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{2p}{3q}vz - 2v^2z + \frac{5p}{3}z^3 - \frac{2p^2}{3q}v^3z - \frac{2p^3 + 9q^2}{3q}vz^3 \equiv \bar{\bar{Q}}(v, z). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Полагая в правых частях системы (11) $z = 0,$ получим уравнение для определения координаты u особых точек $(u, 0)$:

$$pu^2 - 3qu - 2p^2 = 0.$$

Отсюда

$$u = \frac{3q \pm \sqrt{9q^2 + 8p^3}}{2p}.$$

Итак, система (3) в бесконечной части плоскости имеет особые точки, не лежащие на «концах» оси Oy:

$$u_{1,2} = \frac{3q \pm \sqrt{9q^2 + 8p^3}}{2p},\ z = 0, \qquad (13)$$

если $9q^2 + 8p^3 > 0,$ и

$$u = \frac{3q}{2p},\ z = 0, \qquad (14)$$

если $9q^2 + 8p^3 = 0.$

Характеристические числа для них такие:

$$\lambda_1 = \mp\frac{\sqrt{9q^2 + 8p^3}}{3q}, \lambda_2 = \frac{-3q \pm \sqrt{9q^2 + 8p^3}}{6q}; \qquad (13')$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{2}. \qquad (14')$$

Подставив в правые части системы (12) $v = z = 0,$ видим, что «концы» оси Oy – особая точка системы (3). Характеристические числа для нее $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$ Замечаем при этом, что в системе (14) отсутствует линейная часть.

Исследование особых точек системы (3) распадается на следующие случаи:

1) $p^3+9q^2<0$; 2) $p^3+9q^2=0$; 3) $-9q^2<p^3\le-\dfrac{27}{4}q^2$;

4) $4p^3+27q^2=0$; 5) $-\dfrac{27}{4}q^2<p^3<-\dfrac{9}{8}q^2$; 6) $8p^3+9q^2=0$;

7) $8p^3+9q^2>0$ и $p<0$; 8) $p>0$.

В случае 2) система (3) имеет две сложные особые точки в конечной части плоскости, а именно:

$$\left(\mp\sqrt[3]{3q};\ \pm\sqrt[3]{\frac{q^2}{3}}\right) \qquad (15)$$

с характеристическими числами $\lambda_1=0,\ \lambda_2\ne0$. Они получаются при слиянии точек $(x_2,\ y_2)$ и $(x_5,\ y_5)$, а также точек $(x_3,\ y_3)$ и $(x_4,\ y_4)$. Исследование этих особых точек методом, данным в [4, 08], а также точек (14) показывает, что все они являются седло-узлами. Характер остальных особых точек выясняется по их характеристическим числам. Во всех случаях «концы» оси Oy имеют индекс $+2$.

Результаты исследования особых точек системы (3) приведены в таблице:

Таблица

Особые точки / Случаи	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(13)	(14)	(15)	«концы» оси Oy индекс
1	С	У	У	С	С	–	–	–	2
2	С	–	–	–	–	–	–	С-У, С-У	2
3	С	С	С	У	У	–	–	–	2
4	С	С	С	У	У	–	–	–	2
5	С	С	С	У	У	–	–	–	2
6	С	С	С	У	У	–	С-У	–	2
7	С	С	С	У	У	У, С	–	–	2
8	С	У	У	–	–	С, С	–	–	2

Здесь С – четырехсепаратрисное седло, У – узел, С-У – седло-узел.

Литература

1. Савелов, А. А. Плоские кривые / А. А. Савелов. – М. : Изд. физ.-мат. лит., 1960. – 294 с.

2. Еругин, Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую / Н. П. Еругин // ПММ, 1952. – Т. 16, вып. 6. – С. 650–670.

3. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.

4. Андреев, А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений / А. Ф. Андреев. – Минск : Выш. шк., 1979. – 136 с.

Summary

Character of special points of one special cubic differential system of the second order is found out.

Поступила в редакцию 28.02.07