С. В. Игнатович

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ТРУДНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ В ВУЗАХ

Одной из основных целей преподавания математических дисциплин в высших учебных заведениях является воспитание умения будущих специалистов различных отраслей народного хозяйства математически исследовать явления окружающего нас мира. Следовательно, необходимо научить студентов составлять математические модели изучаемых объектов, а для этого они должны овладеть языком математики, позволяющим описывать указанные модели.

Для математических исследований действительности важными в силу их широкого использования в описаниях различных процессов является следующие понятия математического анализа: предел числовой последовательности, предел функции на бесконечности, предел функции в точке. При изучении тем, касающихся указанных понятий, как в разделе математического анализа «Введение в анализ», так и в курсе высшей математики, у многих студентов возникают разнообразные затруднения, и при усвоении теоретического материала, и при нахождении пределов на практике. К основным методическим трудностям изучения пределов мы относим недостаточное знание студентами школьного курса математики, а также формальные знания студентов теоретического материала элементов математического анализа. Это подтверждается результатами эксперимента, проводимого нами в УО МГПУ имени И.П. Шамякина среди студентов физико-математического факультета, факультета технологии и ИПФ в рамках исследования проблемы предупреждения математических ошибок студентов.

Анкетирования, тестирования, самостоятельные и контрольные работы, индивидуальные семестровые задания, коллоквиумы, результаты зачетов и экзаменов показали, что в процессе вычисления пределов студентами допускается масса ошибок из-за незнания ключевых понятий, формул и правил. Очень многие ошибки допускаются также из-за неумения студентов самостоятельно применять известные им формулы и правила к вычислениям пределов, из-за неточного использования алгоритмов решения поставленной задачи. Зачастую студенты пренебрегают проверкой наличия в данном пределе той или иной неопределенности, формально используют замены эквивалентных бесконечно малых функций между собой. Также большое число ошибок допускается из-за невнимательности и поспешности выбора метода решения данной задачи (см. таблица, примеры 9, 10, 15). Особенно эти проблемы актуальны для студентов первого курса.

Среди наиболее распространенных ошибок, причинами которых является недостаточное знание школьного курса математики, слабый уровень математических умений и навыков студентов, следует отметить ошибки в тождественных преобразованиях. Наиболее типичными из них являются следующие ошибки:

1.Ошибки, допускаемые при действиях с многочленами:

– ошибки, допускаемые при раскрытии скобок, в случае, если перед скобками стоит знак «минус» (см. таблица, примеры 4, 12);

– ошибки при разложении многочленов на множители (см. таблица, примеры 1, 2);

– ошибки в применении формул сокращенного умножения (см. таблица, примеры 5–8, 13).

2.Ошибки, допускаемые в действиях с алгебраическими дробями:

– ошибки при сокращении дробей, самая распространенная среди которых – это сокращение на слагаемое (см. таблица, пример 3);

– ошибки при сложении алгебраических дробей (см. таблица, примеры 4, 12).

К типичным ошибкам, которые допускаются по причине слабых знаний высшей математики, относятся следующие:

1) неверный выбор метода избавления от неопределенности (см. таблица, примеры 9, 10, 13);

2) неправильное использование замечательных пределов (см. таблица, примеры 11, 12);

3) неграмотное использование замен эквивалентных бесконечно малых функций, т. е. использование этих замен без предварительной проверки того, являются ли функции бесконечно малыми в данном примере и возможно ли вообще осуществление такой замены (см. таблица, пример 14);

4) нарушение алгоритма вычисления пределов (см. таблица, примеры 11, 12).

Таблица – Наиболее часто встречающиеся ошибки студентов
при решении пределов, а также причины этих ошибок

Пример 1	
Найти	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-x^2)(x-1)}{(x^3+x^2)(x-1)}$
Причина ошибки	Низкий уровень умений разлагать на множители многочлены способом группировки

Продолжение таблицы

Пример 2	
Найти	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)}$
Причина ошибки	Неверное разложение квадратного трехчлена на множители, т. е. неправильно использована формула $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
Пример 3	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{5x-1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{5x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+3}{5-1}$
Причина ошибки	Низкий уровень умений выполнять действия с дробями, в частности, неумение сокращать дроби
Пример 4	
Найти	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{6}{x-3}\right)$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{6}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}-\dfrac{6(x+3)}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-6x+18}{(x-3)(x+3)}$
Причина ошибки	1. Низкий уровень умений выполнять арифметические действия с дробями, в частности, неверное сложение дробей. 2. Низкий уровень умений выполнять раскрытие скобок в математических выражениях, если перед скобками стоит знак «минус»
Пример 5	
Найти	$\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(x-10)(x^2-10x+100)}{x(x^2-20x+100)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Продолжение таблицы

Пример 6	
Найти	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)^2}{x(x-3)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Пример 7	
Найти	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}-2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Пример 8	
Найти	$\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}=\lim\limits_{x\to5}\frac{(x-5)^2}{x(x-5)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Пример 9	
Найти	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}$
Причина ошибки	Неверно выбран метод избавления от неопределенности вида $\frac{0}{0}$
Пример 10	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^8-12}-3}{4+5x^4}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^8-12}-3}{4+5x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^8-12}-3\right)\left(\sqrt{x^8-12}+3\right)}{\left(4+5x^4\right)\left(\sqrt{x^8-12}+3\right)}$
Причина ошибки	Неверно выбран метод избавления от неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Продолжение таблицы

Пример 11	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right)^{x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3+x-2}{x+3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x}$
Причина ошибки	Использование второго замечательного предела без проверки наличия неопределенности вида 1^{∞}
Пример 12	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{9x+2}\right)^{x^2}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{9x+2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+2-6x-3}{9x+2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6x-3}{9x+2}\right)^{x^2}$
Причина ошибки	1. Использование второго замечательного предела без предварительной проверки наличия неопределенности вида 1^{∞} 2. Низкий уровень умений выполнять действия с дробями
Пример 13	
Найти	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+4-4}=\lim\limits_{x\to 0}x$
Причина ошибки	1. Возведение числителя и знаменателя в квадрат 2. Неверное применение формулы сокращенного умножения $(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$
Пример 14	
Найти	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x-\cos x}{\pi-4x}$
Причина ошибки	1. Отсутствие предварительной проверки того факта, являются ли функции x и $\sin x$ бесконечно малыми при $x\to\dfrac{\pi}{4}$ 2. Неправильное использование замены эквивалентных бесконечно малых функций

Окончание таблицы

Пример 15	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)=\infty+\infty=\infty$
Причина ошибки	Невнимательность при проверке наличия неопределенности

Накопленный педагогический опыт и результаты вышеуказанного эксперимента показывают, что преодоление многих методических трудностей усвоения математических знаний студентами основывается на систематическом учете преподавателем следующих условий в процессе обучения.

1. Глубокое и прочное усвоение математической теории.

Знание и точное понимание определений, понятий, аксиом, теорем, алгоритмов решений задач и доказательств – непременное условие высокого качества профессиональной подготовки будущих специалистов, так как без этого невозможно полноценное формирование умения студентов математически исследовать те или иные объекты, процессы и явления, подлежащие изучению.

Следует отметить, что, к сожалению, многие студенты заучивают определения как предела числовой последовательности, так и пределов функции на бесконечности и в точке формально. Чаще всего это происходит в силу того, что эти понятия изучаются на первом курсе и большинству студентов в силу их возрастных особенностей, а также, зачастую, недостаточной математической культуры это просто не по силам. Подлинное понимание студентами этих понятий приходит обычно на старших курсах. Ведь даже, как известно, в истории математики формирование понятия предела шло с большим трудом. Пределами пользовались на наглядно-интуитивном уровне за много веков до введения определения, предложенного Огюстом Коши в начале XIX века, и это не является случайностью. Ведь в привычном «ε – δ-определении» предела того, что число b является пределом функции y = f(x) при x → a, уже заложено внутренне противоречие: на статическом языке (на языке неравенств) описана динамическая ситуация (процесс приближения к предельному значению).

2. Наличие четкой методики контроля и учета знаний.

Качество обучения в значительной степени зависит от того, насколько активно студенты участвуют в приобретении знаний, в процессе формирования умений и навыков. Многое в этом плане зависит от методики учета и контроля знаний, используемой преподавателем. Это обусловленно тем, что хорошо поставленный контроль мобилизует студентов на систематическую работу, как самостоятельную, так и под руководством преподавателя, направленную на приобретение знаний, умений и навыков.

3. Тесная связь теории с практикой.

В деле предупреждения многих методических трудностей изучения математики связь полученных теоретических знаний с практикой невозможно переоценить. Так, например, грамотное применение законов арифметических действий, тождественных преобразований, действий с дробями к решению задач позволяет рационализировать вычисления и проверять правильность их выполнения, что в свою очередь дает возможность предупредить появление ошибок. Ведь, как отмечено выше, многие неверные решения студентов обусловлены, например, неумением применить на практике правила раскрытия скобок, разложения многочленов на множители, формул сокращенного умножения и выполнения действий с дробями.

4. Периодическое повторение и закрепление ранее пройденного учебного материала при изучении новых тем.

Любое повторение ранее пройденного учебного материала имеет своей целью, прежде всего, привести в систему имеющиеся знания, приобретенные умения и навыки студентов. При этом оказывается возможным сделать некоторые обобщения, определенные факты рассмотреть как частные случаи других, более общих. Также бывает целесообразно более глубоко подчеркнуть ту или иную идею, либо тот или другой метод решения задачи или доказательства; еще раз указать на узловые вопросы изученной темы, подлежащие запоминанию, и на вопросы, которые можно не запоминать, так как они достаточно просто могут быть получены из узловых.

Например, после изучения пределов полезно повторить со студентами основные виды неопределенностей и методы избавления от них, как теоретически (на практическом занятии), так и практически (в виде обобщающего домашнего задания). После проведения такой работы, как показывают результаты самостоятельных и контрольных работ студентов по данной теме, число неудовлетворительных оценок значительно снижается.

5. Владение математической речью.

Умение логически мыслить, правильно рассуждать находится в тесной связи с умением полно и ясно излагать свои мысли, правильно строить предложения, употреблять только нужные слова в процессе подачи той или иной информации. Это положение обязывает преподавателей всех дисциплин, изучаемых в вузе, обратить самое серьезное внимание на усвоение студентами правильной устной и письменной речи. В решении этой задачи особенно полезны устные ответы в течение семестра на практических, семинарских и лабораторных занятиях, а также на зачетах и экзаменах, написание курсовых работ, выступление с докладами.

6. Аккуратность в записях.

Небрежные записи студентов служат источником многих математических ошибок. Например, часто неряшливо написанные буквы «б», «в» в своих же дальнейших записях студенты воспринимает как 8 или 6; букву «а» – как 0. Довольно распространенными являются ошибки из-за того, что у одного и того же студента некоторые цифры имеют одинаковые начертания: 5 и 6, 1, 4 и 7, 6 и 8, и др. Очень часто не соблюдаются студентами требования того, что черта, разделяющая числитель и знаменатель дроби, должна быть написана против знака равенства или знака арифметического действия. Из-за этого в дальнейшем своем решении студенты автоматически оперируют не теми числителем и знаменателем, что были изначально и это неизбежно ведет к грубейшим ошибкам.

7. Уверенность в знаниях.

Легко «сбить с толку» студента, если у него нет уверенности в своих знаниях и умениях. Зачастую мы сталкиваемся в процессе работы с такой ситуацией, когда кто-либо из студентов с места выразит сомнение в правильности написанного на доске, или же преподаватель задаст вопрос с целью уточнения ответа. При этом отвечающий тут же стирает все свои записи с доски и начинает нагромождать одну ошибку на другую. Это говорит о том, что у студента, работающего у доски нет, должной уверенности в своих силах. Причин этому может быть масса, но самой, пожалуй, неприятной причиной этому может служить неправильное поведение преподавателя во время ответов его студентов.

Встречаются преподаватели, имеющие вредную привычку слишком часто подбадривать своих студентов во время их ответов. Одобряющие слова преподавателя (например, такие как «так-так», «верно», «продолжаете», «хорошо» и др.), превращаются для студента в своего рода сигналы, подтверждающие правильность его ответа для него самого. Если прекращается подача этих «сигналов», то студент тут же начинает паниковать и в результате теряется. Он начинает сомневаться в правильности выбранного метода решения поставленной задачи. Студент теряет уверенность в себе, если, конечно же, до этого она была в какой-то мере сформирована. Это ведет к увеличению числа ошибок в его как устных, так и письменных ответах, к возникновению новых трудностей в приобретении знаний, умений и навыков в дальнейшем.

8. Предупреждение студентов о наиболее часто встречающихся ошибках.

В научных трудах психологов и педагогов достаточно глубоко проанализированы математические ошибки школьников, а также причины этих ошибок, способы и методы их предупреждения (Ж. Адамар [1], А. К. Артемов [2], В. П. Беспалько [3], Ю. М. Колягин [4], В. А. Крутецкий [5], О. Н. Пирютко [6], А. Д. Семушин [7], О. И. Терещенко [8], Г. Штейнгауз [9] и др.). Многие диссертационные исследования также посвящены этой проблеме (Д. С. Ангелов [10], Р. А. Асанов [11], Г. В. Григорян [12], Л. С. Иванова [13], И. М. Кирилецкий [14], А. Т. Муханов [15], М. Н. Чукотаев [16] и др.). Однако при этом исследования проблемы математических ошибок студентов, причин этих ошибок и способов их предупреждения в дальнейшем, на наш взгляд, являются недостаточными.

Деятельность преподавателя, направленная на получение прогноза методических трудностей при изучении математических дисциплин в вузе и предупреждение этих трудностей в дальнейшем, имеет в настоящее время, когда перед всеми отраслями науки и производства нашего государства стоит задача внедрения инновационной экономической модели, огромное значение. Это обусловлено, в первую очередь, тем, что перед национальной системой образования в современных условиях стоит задача подготовить специалистов, способных к точной разработке, своевременному внедрению и качественному применению на практике инновационных идей. Предвидение преподавателем затруднений усвоения студентами учебного материала, в том числе математических ошибок, допускаемых студентами, дает большие возможности в выборе эффективных методов сообщения новых знаний, в разработке приемов и форм подачи информации, способствующих полноценному формированию умений и навыков, необходимых будущим специалистам для их качественной профессиональной деятельности, отвечающей запросам стремительно развивающегося государства.

Литература

1. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изображения в области математики / Ж. Адамар. – М. : Советское радио, 1970. – 152 с.

2. Артемов, А.К. Об одной причине ошибок школьников по геометрии / А.К. Артемов // Математика в школе. – 1963. – № 6. – С. 23–25.

3. Беспалько, В.П. Основы теории педагогических систем / В.П. Беспалько. – Воронеж : Изд. ВГУ, 1977. – 198 с.

4. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Ю.М. Колягин. – М. : Просвещение, 1975. – 462 с.

5. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1969. – 432 с.

6. Пирютко, О.Н. Математика: типичные ошибки на централизованном тестировании и экзамене / О.Н. Пирютко. – 2-е изд. – Минск : Аверсэв, 2006. – 192 с.

7. Семушин, А.Д. Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математики / А.Д. Семушин. – М. : Просвещение, 1978. – 64 с.

8. Терещенко, О.И. Об ошибках абитуриентов при решении иррациональных уравнений / О.И. Терещенко, С.В. Игнатович, В.И. Богданович // Сборник научных трудов преподавателей физико-математического факультета : сб. науч. тр. / Моз. гос. пед. инст. ; под ред. И.Н. Кралевич. – Мозырь, 2001. – С. 134–142.

9. Штейнгауз, Г. Сто задач / Г. Штейнгауз ; пер. с пол. Г.Ф. Боярской, Б.В. Боярского. – 4-е изд. – М. : Наука, 1986. – 144 с.

10. Ангелов, Д.С. Анализ ошибок по алгебре в знаниях учащихся и пути их устранения : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Д.С. Ангелов. – М., 1980. – 15 с.

11. Асанов, Р.А. Работа над ошибками в курсе математики средней школы как путь повышения качества знаний учащихся : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Р.А. Асанов. – Ташкент, 1975. – 23 с.

12. Григорян, Г.В. Исследование причин возникновения и методика предупреждения ошибок учащихся (на геометрическом материале 4–5 классов) : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Г.В. Григорян. – Баку, 1981. – 20 с.

13. Иванова, Л.С. Методика предупреждения типичных математических ошибок учащихся начальных классов : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Л.С. Иванова. – Киев, 1987. – 172 л.

14. Кирилецкий, И.М. Анализ и предупреждение типичных ошибок учащихся при изучении алгебры и начал анализа : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / И.М. Кирилецкий ; НИИ педагогики УССР. – Киев, 1986. – 19 с.

15. Муханов, А.Т. Пути предупреждения устойчивых ошибок в математической подготовке выпускников средней школы : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / А.Т. Муханов. – Ташкент, 1975. – 27 с.

16. Чукотаев, М. Н. Устойчивые ошибки учащихся по алгебре и началам анализа и способы их устранения : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / М.Н. Чукотаев ; Мос. пед. гос. ун-т им. В.И. Ленина – М., 1992. – 15 с.