Е. М. Овсиюк

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДАФФИНА – КЕММЕРА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ АНТИ ДЕ СИТТЕРА

1. Постановка задачи, разделение переменных. Пространства постоянной кривизны в силу их симметрии являются важными для теоретического анализа основных модельных задач квантовой теории и теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией. В частности, особое место в этом контексте занимают пространства де Ситтера и анти де Ситтера [1], [2]. В работах [3], [4] были построены точные решения уравнения для векторной частицы в пространстве де Ситтера. В данной работе аналогичная задача решена в пространстве анти де Ситтера, 4-мерном пространстве-времени постоянной положительной кривизны.

Воспользовавшись диагональной сферической тетрадой в статических координатах анти де Ситтера $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$:

$$dS^2 = (1+r^2)\,dt^2 - \frac{dr^2}{1+r^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,, \qquad 1+r^2 = \Phi\,, \qquad (1)$$

для уравнения Даффина – Кеммера получим представление [3]

$$[\,i\beta^0\partial_t + i\Phi(\beta^3\partial_r + \frac{1}{r}(\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}) + \frac{\Phi'}{2\Phi}\beta^0 J^{03}) + \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi} - m\sqrt{\Phi}\,]\,\Phi(x) = 0\,,$$

$$\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi} = i\beta^1\partial_\theta + \beta^2\,\frac{i\partial + i\,j^{12}\cos\theta}{\sin\theta}\,. \qquad (2)$$

Отвечающая диагонализации квадрата и третьей проекции полного момента подстановка для волновой функции имеет вид (используем формализм функций Вигнера согласно[3])

$$\Phi_{\varepsilon jm}(x) = e^{-i\varepsilon t}\,[\,f_1(r)\,D_0, f_2(r)\,D_{-1}, f_3(r)\,D_0, f_4(r)\,D_{+1},$$
$$f_5(r)\,D_{-1}, f_6(r)\,D_0, f_7(r)\,D_{+1}, f_8(r)\,D_{-1}, f_9(r)\,D_0, f_{10}(r)\,D_{+1}\,]\,. \qquad (3)$$

Диагонализируя на решениях $\Phi_{\varepsilon jm}$ оператор пространственной инверсии $\hat{P}\,\Phi_{jm} = P\,\Phi_{jm}$, получаем:

$$P = (-1)^{j+1}\,,\; f_1 = f_3 = f_6 = 0\,,\; f_4 = -f_2\,,\; f_7 = -f_5\,,\; f_{10} = +f_8\,;$$
$$P = (-1)^j\,,\; f_9 = 0\,,\; f_4 = +f_2\,,\; f_7 = +f_5\,,\; f_{10} = -f_8\,. \qquad (4)$$

После разделения переменных, учитывая соотношения (4), находим две системы радиальных уравнений ($\nu = \sqrt{j(j+1)/2}$):

$P = (-1)^{j+1}$,

$$i\varepsilon\, f_5 + i\Phi\Big(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\Big)\, f_8 + i\nu\,\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\, f_9 - m\,\sqrt{\Phi}\; f_2 = 0\,, \qquad i\varepsilon\, f_2 - m\sqrt{\Phi}\; f_5 = 0\,,$$

$$-i\Phi\,\Big(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\Big)\, f_2 - m\sqrt{\Phi}\; f_8 = 0\,, \qquad i2\nu\,\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\, f_2 - m\,\sqrt{\Phi}\; f_9 = 0\,; \qquad (5)$$

$P = (-1)^j$,

$$\Phi\,\Big(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\Big)\, F_6 + \frac{2\nu}{r}\, F_5 + m\, F_1 = 0\,,\; i\varepsilon\, F_5 + i\Phi\,\Big(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\Big)\, F_8 - m\,\Phi\, F_2 = 0\,,$$

$$i\varepsilon\, F_6 - i2\nu r\, F_8 - m\, F_3 = 0\,, \qquad -i\varepsilon\, F_2 + \frac{\nu}{r}\, F_1 - m\, F_5 = 0\,,$$

$$i\varepsilon\, F_3 + \Phi\,\frac{d}{dr}F_1 + m\,\Phi\, F_6 = 0\,,\; i\Phi\,\Big(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\Big)\, F_2 + i\frac{\nu}{r}\, F_3 + m\, F_8 = 0\,; \qquad (6)$$

в (6) использованы подстановки:

$$F_1 = \sqrt{\Phi}\; f_1\,, F_2 = f_2\,, F_3 = \sqrt{\Phi}\; f_3\,, F_5 = \sqrt{\Phi}\; f_5\,, F_6 = f_6\,, F_8 = \sqrt{\Phi}\; f_8\,.$$

Специально отметим, что состояния с минимальным значением $j = 0$ следует рассмотреть отдельно – исходная подстановка для волновой функции здесь имеет вид

$$\Phi_{\varepsilon jm}(x) = e^{-i\varepsilon t}\,[\, f_1, 0, f_3, 0, 0, f_6, 0, 0, f_9, 0\,]\,; \qquad (7)$$

т. е. в выбранном тетрадном базисе волновая функция не зависит от угловых координат θ, ϕ. Угловая часть волнового оператора $\Sigma_{\theta,\phi}$ действует на такие волновые функции, как нулевой оператор, и уравнение (2) принимает вид

$$[\, i\,\beta^0\partial_t + i\,\Phi\,(\beta^3\partial_r + \frac{1}{r}(\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}) + \frac{\Phi'}{2\Phi}\,\beta^0 J^{03}) - m\,\sqrt{\Phi}\,]\,\Phi(x) = 0\,, (8)$$

что приводит к простой системе радиальных уравнений:

$$-\Phi\,\Big(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\Big)\, f_6 - m\sqrt{\Phi}\; f_1 = 0\,, \qquad i\varepsilon f_6 - m\sqrt{\Phi}\; f_3 = 0\,,$$

$$-\,i\varepsilon f_3 - \Phi\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\Big)\, f_1 - m\sqrt{\Phi}\; f_6 = 0\,, \qquad f_9 = 0\,. \qquad (9)$$

Система (9) описывает состояния с четностью $P = (-1)^j$; состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ при $j = 0$ не существует. Система (9) сводится к уравнению для f_6:

$$\frac{d^2}{dr^2} f_6 + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\,\frac{d}{dr} f_6 + \left[\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2} - \frac{m^2-2}{1+r^2} - \frac{2}{r^2(1+r^2)}\right] f_6 = 0\,, \; (10)$$

решение которого выражается через гипергеометрические функции:

$$f_6(r) = r\,(1+r^2)^{-\varepsilon/2}\; F(\alpha,\beta,\gamma,-r^2)\,, \quad = \gamma \quad 1+3/2\,,$$

$$\alpha = \frac{3/2+1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,, \qquad \beta \quad \frac{3/2+1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,. \qquad (11)$$

Гипергеометрический ряд оборвем до полинома, наложив условие $\alpha = -n\,, = n \quad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; в результате приходим к следующему правилу квантования энергии:

$$\varepsilon = N + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}\,, \qquad N = 2n+1 \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}\,. \qquad (12)$$

2. Решение радиальных уравнений при $j>0$. Рассмотрим теперь уравнения (5). Выражая f_5, f_8, f_9 через f_2:

$$f_5 = \frac{i}{m\sqrt{\Phi}}\,\varepsilon\, f_2\,, \qquad f_8 = \frac{-i}{m\sqrt{\Phi}}\,\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\, f_2\,, \qquad f_9 = \frac{i}{m}\,\frac{2\nu}{r}\, f_2\,. \quad (13)$$

Подставляя их в первое уравнение, для функции f_2 получаем

$$\frac{d^2}{dr^2} f_2 + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr} f_2 + \left[\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2} - \frac{m^2-2}{1+r^2} - \frac{j(j+1)}{r^2(1+r^2)}\right] f_2 \quad 0\,. \quad (14)$$

Дальше решение этого вида будем называть j-волной. Решение уравнения (14) выражается через гипергеометрические функции.

$$f_2 = U_{\varepsilon,j} \quad (-z)^{j/2}(1-z)^{-\varepsilon/2}\; F(\alpha,\beta,\gamma;z)\,, \quad = \gamma \quad j+3/2\,,$$

$$\alpha = \frac{3/2+j-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,, \qquad \beta \quad \frac{3/2+j-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,. \qquad (15)$$

Гипергеометрический ряд оборвем до полинома, наложив условие $\alpha = -n\,, = n \quad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; в результате приходим к правилу квантования энергии:

$$\varepsilon = N + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}\,, \qquad = N \quad 2n+j \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}\,. \qquad (16)$$

Можно убедиться, что при $z\to-\infty$ полная радиальная функция $U_{\varepsilon,j}(z)$ стремится к нулю:

$$U_{\varepsilon,j}(z\to-\infty) \sim z^{j/2}\; z^{-\varepsilon/2} z^{n} \sim z^{-3/4-\sqrt{m^2+1/4}\;/2}\,.$$

Обратимся к системе (6). Используя две разные подстановки:

$$I. \qquad F_1 \quad \sqrt{j+1}\, G_1\,, F_2 \quad i\sqrt{j/2}\, G_2\,, F_3 \quad i\sqrt{J+1}\, G_3\,,$$

$$F_5 = \sqrt{j/2}\,G_5\,,\; F_6 = \sqrt{j+1}\,G_6\,,\; F_8 = \sqrt{j/2}\,G_8\,; \qquad (17)$$

$$II. \qquad F_1 = \sqrt{j}\,G_1\,,\; F_2 = i\sqrt{(j+1)/2}\,G_2\,,\; F_3 = i\sqrt{j}\,G_3\,,$$
$$F_5 = \sqrt{(j+1)/2}\,G_5\,,\; F_6 = \sqrt{j}\,G_6\,,\; F_8 = \sqrt{(j+1)/2}\,G_8 \qquad (18)$$

и выражая функции G_5, G_6, G_8 через G_1, G_2, G_3, приходим в каждом случае соответственно к следующим трем уравнениям:

$$I. \qquad \left(\frac{j(j+1)}{r^2} + m^2 - \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{d}{dr}\right) G_1 + \frac{\varepsilon j}{r} G_2 + \varepsilon\,\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{1}{\Phi} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\varepsilon^2 - m^2\,\Phi^2 + \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right) G_2 + \frac{\varepsilon\,(j+1)}{r} G_1 + \Phi\,\frac{j+1}{r}\frac{d}{dr} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\frac{\varepsilon^2}{\Phi} - \left(\frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right)\right) G_3 - \varepsilon\,\frac{d}{dr} G_1 - \frac{j}{r}\,\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) G_2 = 0\,; \qquad (19)$$

$$II. \qquad \left(\frac{j(j+1)}{r^2} + m^2 - \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{d}{dr}\right) G_1 + \frac{\varepsilon(j+1)}{r} G_2 + \varepsilon\,\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{1}{\Phi} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\varepsilon^2 - m^2\Phi^2 + \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right) G_2 + \frac{\varepsilon j}{r} G_1 + \Phi\,\frac{j}{r}\frac{d}{dr} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\frac{\varepsilon^2}{\Phi} - \frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right) G_3 - \varepsilon\,\frac{d}{dr} G_1 - \frac{(j+1)}{r}\,\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) G_2 = 0\,. \qquad (20)$$

Чтобы решить системы уравнений (19), (20), учтем условие Лоренца – в случае массивного векторного поля оно выполняется всегда. Его явный вид легко устанавливается:

$$\frac{-i\varepsilon}{\sqrt{\Phi}}\, f_1 - \sqrt{\Phi}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f_3 - \frac{\nu}{r}\,(f_2 + f_4) = 0\,. \qquad (21)$$

При значении четности $P = (-1)^{j+1}$ условие (21) выполняется тождественно $(0 \equiv 0)$; для подстановок I и II из (17), (18) оно примет соответственно вид:

$$I. \qquad -\varepsilon\,\frac{G_1}{\Phi} = \frac{j}{r} G_2 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) G_3\,,$$
$$II. \qquad -\varepsilon\,\frac{G_1}{\Phi} = \frac{j+1}{r} G_2 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) G_3\,. \qquad (22)$$

Учитывая соотношения (22), выразим G_1 через G_2 и G_3 и подставим во второе и третье уравнения в (19), (20). Получим:

$$I. \qquad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{\Phi}\right)\frac{d}{dr} + \frac{\Phi'}{r\Phi} + \frac{\varepsilon^2}{\Phi^2} - \frac{m^2}{\Phi} - \frac{j(j+1)}{\Phi r^2}\right] G_2 - \frac{2(j+1)}{r^2\Phi} G_3 = 0\,,$$

$$[\frac{d^2}{dr^2}+(\frac{2}{r}+\frac{\Phi'}{\Phi})\frac{d}{dr}+\frac{2\Phi'}{r\Phi}-\frac{2}{r^2}+\frac{\varepsilon^2}{\Phi^2}-\frac{m^2}{\Phi}-\frac{j(j+1)}{\Phi r^2}]\,G_3-\frac{2j}{r^2\Phi}G_2 \quad 0\,;\quad(23)$$

$$II.\qquad [\frac{d^2}{dr^2}+(\frac{2}{r}+\frac{\Phi'}{\Phi})\frac{d}{dr}+\frac{\Phi'}{r\Phi}+\frac{\varepsilon^2}{\Phi^2}-\frac{m^2}{\Phi}-\frac{j(j+1)}{\Phi r^2}]\,G_2-\frac{2j}{r^2\Phi}G_3 \quad 0\,,$$

$$[\frac{d^2}{dr^2}+(\frac{2}{r}+\frac{\Phi'}{\Phi})\frac{d}{dr}+\frac{2\Phi'}{r\Phi}-\frac{2}{r^2}+\frac{\varepsilon^2}{\Phi^2}-\frac{m^2}{\Phi}-\frac{j(j+1)}{\Phi r^2}]\,G_3-\frac{2(j+1)}{r^2\Phi}G_2 \quad 0\,.\quad(24)$$

В случае I, положив $G_3=+G_2$, из двух уравнений в (23) приходим к одному и тому же:

$$I.\qquad G_3 \quad +G_2=U_{\varepsilon,j+1}\,,\quad =[\,\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2}-\frac{M^2-2}{1+r^2}-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2(1+r^2)}\,]\,G_2 \quad 0\,.\qquad(25)$$

Аналогично, полагая в случае *II*, что $G_3=-G_2$, также получим одно уравнение; причем такого же вида, как и (25) с заменой $(j+1)$ на $(j-1)$:

$$II.\qquad G_3 \quad -G_2=U_{\varepsilon,j-1} \quad =[\,\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2}-\frac{M^2-2}{1+r^2}-\frac{(j-1)j)}{r^2(1+r^2)}\,]\,G_2 \quad 0\,.\qquad(26)$$

Таким образом, помимо j-волн, существуют еще два типа решений (детали вычислений с применением свойств гипергеометрических функций опускаем):

$I.\qquad (j+1)-$тип,

$$G_3=G_2 \quad U_{\varepsilon,j+1}\,,\qquad -\varepsilon\,\frac{G_1}{\Phi}\quad(\frac{d}{dr}+\frac{j+2}{r})\,G_2\,;$$

$$G_1=\sqrt{-z}\;U_{\varepsilon,j+1}-\frac{2j+3}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\;U_{\varepsilon-1,j}\,,$$

$$U_{\varepsilon,j+1}=(-z)^{(j+1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma;z)\,,$$

$$U_{\varepsilon-1,j}=(-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma-1;z)\,,$$

$$\alpha=\frac{3/2+j+1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,,\qquad \beta\quad\frac{3/2+j+1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,,$$

$$\gamma=j+1+3/2\,;\qquad(27)$$

II. $(j-1)$ – тип,

$$-G_3 = G_2 = U_{\varepsilon,j-1}, \qquad \varepsilon \frac{G_1}{\Phi} = \left(-\frac{d}{dr} + \frac{j-1}{r}\right) G_2 ,$$

$$G_1 = -\sqrt{-z}\; U_{\varepsilon,j-1} - \frac{2}{\varepsilon}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sqrt{1-z}\; U_{\varepsilon-1,j} ,$$

$$U_{\varepsilon,j-1} = (-z)^{(j-1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\; F(\alpha,\beta,\gamma;z) ,$$

$$U_{\varepsilon-1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\; F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z) ,$$

$$\alpha = \frac{3/2 + j - 1 - \varepsilon + \sqrt{m^2+1/4}}{2}, \qquad \beta = \frac{3/2 + j - 1 - \varepsilon - \sqrt{m^2+1/4}}{2},$$

$$\gamma = j - 1 + 3/2 . \qquad (28)$$

Подведем итоги решения радиальных уравнений. Получены решения трех типов (приводим выражения только для $f_1,...,f_4$):

$j-$ волна

$$f_1 = f_3 = 0 , \; f_2 = -f_4 = U_{\varepsilon,j} ; \qquad (29)$$

$(j+1)-$ волна,

$$f_1 = \sqrt{j+1}\left[\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}}\, U_{\varepsilon,j+1} - \frac{2j+3}{\varepsilon}\; U_{\varepsilon-1,j}\right],$$

$$f_2 = +f_4 = +i\sqrt{j/2}\; U_{\varepsilon,j+1}, \quad f_3 = +i\sqrt{j+1}\,\frac{1}{\sqrt{1-z}}\; U_{\varepsilon,j+1} ; \qquad (30)$$

$(j-1)-$ волна,

$$f_1 = \sqrt{j}\left[-\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}}\; U_{\varepsilon,j-1} - \frac{2}{\varepsilon}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\; U_{\varepsilon-1,j}\right],$$

$$f_2 = +f_4 = i\sqrt{\frac{j+1}{2}}\, U_{\varepsilon,j-1}, \quad f_3 = -i\sqrt{j}\,\frac{1}{\sqrt{1-z}}\; U_{\varepsilon,j-1} . \qquad (31)$$

Найденные три типа волн соответствуют трем возможным значениям орбитального момента частицы со спином 1 при заданном полном моменте j: $l = j,\; j+1,\; j-1$.

3. Безмассовый предел. Сделаем замечание относительно перехода во всех соотношениях к случаю безмассового векторного поля. Основное уравнение Даффина – Кеммера при этом имеет вид (2) с единственной формальной заменой:

$$m\sqrt{\Phi} \;\to\; P_6\sqrt{\Phi} , \qquad (32)$$

где P_6 – проектор на 6-мерное подпространство 10-компонентной волновой функции:

$$P_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{vmatrix}. \qquad (33)$$

Соответственно, в основной системе радиальных уравнений должны быть выполнены формальные замены:

$$m\sqrt{\phi} f_i \to 0, \quad i = 1,2,3,4; \qquad m\sqrt{\phi} f_i \to \sqrt{\phi} f_i, \quad i = 5,...,10. \qquad (34)$$

Понятно, что никакого существенного влияния на процедуру решения системы радиальных уравнений замена (34) не оказывает. Нужно только заметить, что поскольку в безмассовом случае условие Лоренца не выполняется автоматически, как следствие уравнений, его нужно рассматривать теперь как условие, фиксирующее калибровку волновой функции фотона.

Все остальные соотношения останутся в силе, вместо использованных выше параметров гипергеометрических функций нужно брать следующие:

$$U_{\varepsilon,j}, \quad \alpha = \frac{2+j-\varepsilon}{2}, \quad \beta = \frac{1+j-\varepsilon}{2}, \quad \gamma = j+3/2; \qquad (35)$$

правило квантования энергии ε (частоты) следующее:

$$\varepsilon = 2n+j+2 = N+2, \quad N = 2n+j \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}. \qquad (36)$$

Случай нулевого значения $j=0$ должен быть рассмотрен отдельно. Система (9) принимает здесь вид

$$-\Phi\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right) f_6 - 0\sqrt{\Phi}\, f_1 = 0, \qquad i\varepsilon f_6 - 0\sqrt{\Phi}\, f_3 = 0,$$
$$-i\varepsilon f_3 - \Phi\left(\frac{d}{dr}+\frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f_1 - \sqrt{\Phi}\, f_6 = 0, \quad f_9 = 0, \qquad (37)$$

что эквивалентно следующему:

$$g_6 = 0, \quad f_9 = 0, \qquad -i\varepsilon f_3 - \Phi\left(\frac{d}{dr}+\frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f_1 = 0. \qquad (38)$$

У возможного состояния поля при $j=0$ компоненты электрического и магнитного векторов обращаются в ноль ($F_{\alpha\beta}=0$); ненулевые $f_1(r), f_3(r)$ соответствуют решению градиентного типа: $A_\alpha = \nabla_\alpha \Phi$. Чтобы зафиксировать две радиальные функции, связанные уравнением (38), нужно рассмотреть это уравнение, наложив какое-либо калибровочное условие. В частности, наложив условие Лоренца (см. (21)), имеем два уравнения (используем подстановки $f_1=\Phi^{-1/2}F_1,\ f_3=\Phi^{-1/2}F_3$):

$$-\frac{i\varepsilon}{\Phi}F_3-\frac{d}{dr}F_1=0, \qquad -\frac{i\varepsilon}{\Phi}F_1-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)F_3=0. \tag{39}$$

Исключая F_3, получаем уравнение для F_1:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr}+\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2}\right]F_1=0. \tag{40}$$

Это радиальное уравнение, отвечающее $j=0$-решению уравнения $\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\Phi=0,\ \ \Phi=e^{-i\varepsilon t}f(r)$.

Заключение. Поле со спином 1 исследовано в статических координатах в пространстве анти де Ситтера с использованием общековариантного уравнения Даффина – Кеммера. Получены решения в виде сферических волн с квантовыми числами (ε, j, m); угловая зависимость выделяется посредством функций Вигнера $D^{j}_{-m,\sigma}$, $\sigma=-1,\ 0,\ +1$. Система радиальных уравнений решена в гипергеометрических функциях. В качестве линейно независимых решений выделены волны трех типов: $(j-1,\ j,\ j+1)$, что соответствует трем возможным значениям орбитального момента частицы со спином 1 при фиксированном значении полного момента j. Найдено правило квантования энергетических уровней. Указан способ перехода к случаю электромагнитного поля в лоренцевской калибровке.

Автор признательна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

Литература

1. Schrödinger, E. Space-time structure / E. Schrödinger. – Cambridge : University Press, 1950.
2. Хокинг, С. Крупномасштабная структура пространства-времени / С. Хокинг, Дж. Эллис. – М. : Мир, 1977. – 429 с.
3. Богуш, А.А. Векторное поле в пространстве де Ситтера / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1986. – № 1. – С. 58–62.
4. Богуш, А.А. Общековариантный формализм Даффина – Кеммера и сферические волны для векторного поля в пространстве де Ситтера / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков. – Минск, 1986. – 45 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 426).