Н. В. Сергиевич

О СТРУКТУРЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В данной работе рассматривается возможность представления безгранично делимого распределения любой конечной размерности без предположения существования его дисперсии в виде свёртки нормального распределения (возможно вырожденного) и конечного или счётного числа распределений Пуассона [1].

Характеристическая функция (х. ф.) $\varphi(t)$, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_d)$ распределения случайного вектора (с. век.) ξ в R^d называется *безгранично делимой*, если для любого n существует х. ф. $f_n(t)$ такая, что

$$\varphi(t)=\left(f_n(t)\right)^n . \tag{1}$$

И с. век. ξ, и его распределение, х. ф. которого обладает свойством (1), также называются *безгранично делимыми* [2].

Из (1) следует, что если с. век. ξ безгранично делим, то при любом n ξ представляется в виде суммы n независимых одинаково распределённых векторов с х. ф. $f_n(t)$.

В случае, когда безгранично делимое распределение имеет конечную дисперсию и $d=2$, в [1] показано, что это распределение является свёрткой нормального распределения и конечного или счётного числа распределений Пуассона. Для безгранично делимых случайных величин (с. в.), $d=1$, доказательство данного факта есть в [3].

Покажем, что и в общем случае, т. е. когда безгранично делимое распределение может не иметь конечной дисперсии и R^d имеет любую конечную размерность, оно представляется в виде свёртки нормального распределения (которое может быть вырожденным) и конечного или счётного числа распределений Пуассона.

Известно, что каждая безгранично делимая х. ф. $\varphi(t)$, определяющая распределение размерности $d \ge 1$ с конечной или бесконечной дисперсией, представима в форме $\varphi(t)=e^{\psi(t)}$, где

$$\psi(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Pi(dx)+i(t,a)-\frac{(t,Bt^*)}{2}. \qquad (2)$$

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_d)\in R^d$, $x^2=(x,x)=|x|^2$, a – постоянный вектор в R^d, B – неотрицательно определённая матрица размерности $d\times d$, $\Pi(B)$ – ограниченная мера, определённая на множествах B борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(R^d)$, из области интегрирования исключен нуль-вектор, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_d)\in R^d$, t^* – вектор-столбец [4].

Представление (2) состоит из двух частей [1]:

1. $\psi_1(t)=i(t,a)-\frac{(t,Bt^*)}{2}$. Это логарифм х. ф. нормального распределения с ковариационной матрицей B и математическим ожиданием (ось симметрии), равным вектору a. Плотность вероятности этого распределения

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d\det B}}e^{-\frac{1}{2}\left(x-a,B^{-1}(x-a)^*\right)},$$

где B^{-1} – матрица, обратная матрице B, $\left(x-a,B^{-1}(x-a)^*\right)$ – скалярное произведение, $(x-a)^*$ – вектор-столбец.

2. $\psi_2(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Pi(dx)$. Эту часть в литературе часто называют пуассоновской (см., например, [5]). Покажем, что $\psi_2(t)$ – логарифм х. ф. свёртки конечного или счётного числа распределений Пуассона.

Теорема. *Каждое безгранично делимое распределение представимо в виде свёртки нормального распределения (возможно, вырожденного) и конечного или счётного числа распределений Пуассона.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\varphi_\xi(t) = \exp\lambda\left(e^{i(t,x_0)} - 1\right),$$

где ξ – с. век. в R^d, x_0 – фиксированный вектор в R^d, $\lambda > 0$ – постоянное число, есть х. ф. распределения Пуассона на полупрямой (одномерное подпространство в R^d) $x = cx_0$, $c \geq 0$ – переменное число, т. е. распределения

$$P\{\xi = mx_0\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m = \overline{0,\infty}. \tag{3}$$

Действительно, по определению х. ф., для распределения (3) х. ф.

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(t,mx_0)}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(e^{i(t,x_0)}\lambda\right)^m}{m!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{i(t,x_0)}} = \exp\lambda\left(e^{i(t,x_0)} - 1\right).$$

Кроме того, если с. век. $\eta = \alpha\xi + b$, где α – число, b – вектор, то по свойству х. ф.

$$\varphi_\eta(t) = e^{\lambda\left(e^{i(t,\alpha x_0)} - 1\right)}e^{i(t,b)}. \tag{4}$$

Здесь $\varphi_\eta(t)$ – х. ф. распределения Пуассона, у которого, в отличие от (3), изменен масштаб и которое идет вдоль полупрямой $x = c_1x_0 + b$, c_1 – переменное число. Причем $c_1 \geq 0$, если $\alpha > 0$, и $c_1 \leq 0$, если $\alpha < 0$.

Поскольку интеграл в (2) существует, то он равен пределу своих интегральных сумм при неограниченном размельчении разбиения области в R^d с её расширением на все пространство R^d.

Разобьём начальный d-мерный параллелепипед на n элементарных частей Δ_{nk}, $k = \overline{1,n}$. В каждой элементарной части произвольно выбираем по одной d-мерной точке x_{nk}. Составим интегральную сумму интеграла из (2):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i(t,x_{nk})} - 1 - \frac{i(t,x_{nk})}{1 + x_{nk}^2}\right)\frac{1 + x_{nk}^2}{x_{nk}^2}\Pi(\Delta_{nk}). \tag{5}$$

Введём обозначения: $\lambda_{nk} = \dfrac{1 + x_{nk}^2}{x_{nk}^2}\Pi(\Delta_{nk})$, $b_{nk} = \dfrac{x_{nk}\lambda_{nk}}{1 + x_{nk}^2}$. После этого сумма (5) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_{nk}\left(e^{i(t,x_{nk})}-1\right)+i(t,b_{nk})\right). \qquad (6)$$

В (6) каждое слагаемое есть логарифм х. ф. вида (4) распределения Пуассона. Вся сумма (6) – логарифм х. ф. свёртки n распределений Пуассона. Разумеется, некоторые из этих распределений могут оказаться вырожденными. А именно, вырожденными будут те распределения, для которых мера Π элементарных частей Δ_{nk} равна нулю: $\Pi(\Delta_{nk})=0$.

Если теперь неограниченно размельчать разбиение и неограниченно расширять по всем направлениям исходный параллелепипед, то в пределе суммы (6) дадут интеграл

$$\psi_2(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Pi(dx).$$

Следовательно, $\psi_2(t)$ – предел конечных сумм логарифмов х. ф. распределений Пуассона. Поэтому $e^{\psi_2(t)}$ – х. ф. свёртки конечного или счётного числа распределений Пуассона.

Поскольку

$$\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t),$$

то теорема доказана. □

<u>Пример</u>. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – так называемые точечные носители пуассоновских вероятностей в R^d, $x_k \neq 0$, $k=\overline{1,n}$. Это значит, что для τ-окрестностей $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1+x_k^2}{x_k^2}\Pi(\delta_k)=\lambda_k,\ k=\overline{1,n},$$

$$\lim_{\tau\to 0}\Pi\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n}\delta_k}\right)=0.$$

Кроме того, пусть

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k\lambda_k}{1+x_k^2}=a.$$

Тогда

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(e^{i(t,x_k)}-1\right)-\frac{(t,Bt^*)}{2}. \qquad (7)$$

Это логарифм х. ф. свёртки n распределений Пуассона, с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, и нормального распределения с ковариационной матрицей B.

Нетрудно составить плотность вероятности свёртки, определяемой равенством (7). По правилу нахождения распределений сумм с. век. получаем

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det B}} \sum_{m_k=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{m_k}}{m_k!} \right) e^{-\frac{\left(z, B^{-1} z^*\right)}{2}},$$

где B^{-1} – матрица, обратная матрице B, $z = x - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$.

Данная теорема позволяет судить о структуре распределения стохастически непрерывного d-мерного случайного процесса $S(t)$ в момент времени t. Поскольку $S(t)$ представимо в виде суммы равномерно бесконечно малых приращений, то применимы, вообще говоря, фундаментальные теоремы о сходимости распределений сумм с. век., полученные при решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм с. век. без предположения их независимости М.Д. Юдиным. Они показывают, что в момент $t > 0$ случайный процесс $S(t)$ будет иметь безгранично делимое распределение. Кроме того, данная теорема указывает возможное направление моделирований стохастически непрерывных процессов любой конечной размерности [1].

Установлено, что *зависимость между случайными векторами оказывает существенное влияние на вид поверхности плотности вероятности предельного распределения их сумм через нормальный компонент, порождённый ковариацией слагаемых сумм*.

В частности, одними из ключевых параметров рассмотренных моделей являются элементы ковариационной матрицы B, соответствующие нормальному компоненту предельного распределения. С увеличением дисперсионных параметров нормального распределения (уменьшением элементов обратной матрицы B^{-1}), как следствие, увеличивается влияние нормального компонента на предельное распределение, приближая график теоретической плотности вероятности распределения к графику нормальной плотности. При уменьшении же дисперсионных параметров нормального компонента влияние его падает, отдавая всю «инициативу» дисперсионным параметрам λ_{ij} распределений Пуассона, вследствие чего график приближается к дискретному распределению, а именно – распределению или композиции нескольких распределений Пуассона.

Апробирован *метод выявления степени зависимости приращений процесса*, согласно которому обязательным условием является учёт ковариационных параметров. *Если предел суммы дисперсий равен нулю, то «шум» процесса (нормальный компонент) создается именно за счёт ковариаций случайных слагаемых, и величина этого шума характеризует, следовательно, степень зависимости между случайными векторами*.

При моделировании процессов деформации коэффициенты ковариационной матрицы B отражают степень зависимости между элементарными приращениями продвижения микротрещины.

Так, малые значения дисперсионных параметров нормального компонента предельного распределения характерны для начальной стадии процесса образования дефектов, когда еще только в начале развития микротрещины вероятности сосредоточены в окрестности нуля. Далее дисперсионные параметры увеличиваются, и дефект растет. При уменьшении с течением времени влияния нормального компонента на развитие процесса в пределе мы получаем, что при постоянном λ от теоретической плотности вероятности реализуемой модели остаётся лишь пуассоновское распределение.

Если же вместе с уменьшением дисперсионных параметров нормального компонента уменьшать и дисперсионные параметры пуассоновского компонента, то теоретическая плотность вероятности модели вырождается в $\delta(l_0)$-распределение (функцию Дирака), оставляя от дефекта лишь один точечный след в центре распределения.

При моделировании диффузионных процессов дисперсионные параметры нормального распределения в формуле теоретической плотности вероятности отражают степень «активности» самих элементарных диффундирующих частиц.

Так, в случае малой активности нормального компонента мы получаем уже плотности, в которых превалирует пуассоновский компонент – в точках (на кривых) сосредоточения пуассоновской вероятности значение плотности вероятности значительно больше, чем на остальной части плоскости. Это объясняется тем, что из-за уменьшающейся «активности» нормального компонента его влияние на вид предельного распределения уменьшается. И мы, таким образом, приходим к пуассоновскому распределению с остаточными следами «активности» нормального компонента в окрестностях точек (кривых) пуассоновской вероятности.

Если же «активность» частиц высока, то график поверхности плотности вероятности «расплывается» по плоскости, постепенно сглаживая пуассоновское распределение.

При исследовании процесса сумма ковариаций его приращений не менее важна, чем сумма дисперсий или сумма математических ожиданий. Поэтому без учёта суммы ковариаций адекватного, теоретически обоснованного моделирования реального процесса не получится.

Степень зависимости приращений процесса, так же, как и остальные характеристики этого процесса, во-первых, ключевым образом влияет на его ход, а во-вторых, может быть приближенно оценена при моделировании объекта исследования [6]. Для этого подсчитывается теоретическая сумма дисперсий, после чего требуется адекватно подобрать элементы матрицы B. Далее из полученных при моделировании элементов матрицы B вычитаются подсчитанные ранее суммы дисперсий. Разность их есть предел суммы ковариаций зависимых слагаемых, и её величина отражает искомую степень зависимости.

По достижении необходимой степени адекватности теоретических результатов экспериментальным, можно говорить о том, что полученные параметры отражают содержание моделируемого объекта. А это, в свою очередь, говорит о том, полученные численные значения параметров формулы плотности вероятности предельного распределения – будь то дисперсионные либо ковариационные параметры, отражающие степень зависимости между элементарными приращениями случайного процесса, – дают достаточно важную информацию о данном моделируемом процессе.

Литература

1. Юдин, М.Д. Предельные распределения сумм зависимых случайных векторов и их приложения : моногр. / М.Д. Юдин, Н.В. Сергиевич. – Мозырь : УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2009. – 145 с.
2. Юдин, М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин / М. Д. Юдин. – Минск : Университетское, 1990. – 254 с.
3. Лоэв, М. Теория вероятностей / М. Лоэв. – М. : Изд. ЦЛ, 1962. – 720 с.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк [и др.]. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
5. Круглов, В.М. Дополнительные главы теории вероятностей / В.М. Круглов. – М. : Изд. «Высшая школа», 1984. – 264 с.
6. Гуз, С.Н. О влиянии зависимости случайных слагаемых на предельные распределения их сумм / С.Н. Гуз, Н.В. Сергиевич, М.Д. Юдин // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – Минск, 2002. – № 3. – С. 30–33.