О. И. Терещенко, М. И. Ефремова

ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Теория неравенств играет в математике огромную роль, а некоторые ее современные области полностью базируются на этой теории. С помощью неравенств формулируются многие задачи, выражаются результаты определённых математических исследований.

С неравенствами, как правило, связаны задачи двух типов:

– нахождение условий, при которых данное неравенство обращается в истинное высказывание (решение неравенств);

– доказательство того, что, исходя из определённых наперёд заданных условий, данное неравенство обращается в истинное высказывание (доказательство неравенств).

Задачи на доказательство неравенств дают возможность закрепить достаточно большой объём теоретических вопросов, по-новому выяснить известные факты.

С помощью неравенств можно показать, какую роль играет аппарат математической логики в дедуктивных рассуждениях, в понимании самого процесса доказательства. Знание основных методов и способов доказательства неравенств, некоторые специфические неравенства дают возможность шире их применять при решении проблем прикладного характера.

Довольно часто встречаются задачи теоретического и прикладного характера, сводящиеся к рассмотрению неравенств, в которых необходимо установить их истинность на заданном множестве A.

В простейших случаях, когда набор значений переменных из множества А невелик, задача решается просто подстановкой. Если при каждом наборе значений переменных из A получаем истинное числовое неравенство, то и данное неравенство будет истинным на множестве А. Этот общий вывод является правомерным, ибо он сделан на основе всех возможных частных случаев. В этом случае говорят, что рассуждения проведены методом полной индукции.

Раскроем содержание понятия «доказать неравенство с переменной в общем виде».

Пусть задано неравенство с одной переменной x. Обозначим его B(x). A(x) – определенное условие, которое накладывается на переменную x.

Определение. Доказать неравенство B(x), если выполняется условие A(x), означает показать, что для каждого значения переменной x, которое обращает A(x) в истинное высказывание, неравенство B(x) также обращается в истинное высказывание.

Условие A(x) однозначно определяет некоторое множество М значений переменной, которое является ее множеством истинности. Если неравенство B(x) при выполнении условия A(x) доказано, то это означает, что неравенство B(x) на множестве М истинное. Исходя из определения, задачи на доказательство неравенств можно сформулировать по-разному.

Например.

1. Доказать, что для всех действительных $x \geq 3$ выполняется неравенство $2x^2 - 5x - 1 > 0$.
2. Доказать, что для всех $x \in [3, +\infty)$ справедливо неравенство $2x^2 - 5x - 1 > 0$.
3. Доказать, что если x – любое число из промежутка $[3, +\infty)$, то $2x^2 - 5x - 1 > 0$.
4. Доказать, что если $x \geq 3$, то $2x^2 - 5x - 1 > 0$
5. Доказать неравенство: $2x^2 - 5x - 1 > 0$, если $x \geq 3$.
6. Доказать неравенство: $2x^2 - 5x - 1 > 0$, при $x \geq 3$

Несмотря на различные формулировки суть доказательства остаётся неизменной: необходимо показать, что для каждого $x \in [3,+\infty)$ (множество М) истинно неравенство $2x^2 - 5x - 1 > 0$ (B(x)).

Введенное положение определяет цель поставленной задачи, но не раскрывает путей достижения поставленной цели в самом общем виде, если элементов множества М много или их бесконечное количество, а также не даёт представлений о процессе доказательства.

Аппарат математической логики используется при построении логических математических рассуждений, в том числе и для доказательства неравенств. Понятия логического следования и равносильности, логические операции и законы логики дают возможность строить логические схемы, которые являются основой многих доказательств. При построении рассуждений для доказательства неравенств необходимо найти то истинное утверждение, которое даст возможность убедиться в истинности доказываемого неравенства. Сделать это можно по-разному.

I. Использование свойств неравенств

Пример 1. Доказать, что для всех значений $m \in R$ выполняется неравенство $\frac{(1+m)^2}{2} \geq 2m$.

Доказательство.

1) Составим разность между левой и правой частями данного неравенства и оценим знак этой разности, выполнив определённые преобразования:

$$\frac{(1+m)^2}{2} - 2m = \frac{1+2m+m^2-4m}{2} = \frac{1-2m+m^2}{2} = \frac{(1-m)^2}{2} \geq 0 .$$

2) $\left(\frac{(1+m)^2}{2} \geq 0\right)$ и $\left(\frac{(1-m)^2}{2} = \frac{(1+m)^2}{2} - 2m\right) \Rightarrow \left(\frac{(1-m)^2}{2} - 2m\right) \geq 0.$

3) $\left(\frac{(1-m)^2}{2} - 2m\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{(1+m)^2}{2} \geq 2m.$

Пример 2. Доказать, что

$(307 + 317 + \ldots + 397 - 8041) < (-407) + (-417) + \ldots + (-497)$.

Доказательство.

1) $(307+317+\ldots+397-8041)-((-407)+(-417)+\ldots+(-497))=$

$$= 307+317+\ldots+397+407+417+\ldots+497-8041 = \frac{307+497}{2}\cdot 20-8041 =$$

$$= 8040-8041=-1;\ -1<0 .$$

2) $(307+\ldots+397-8041)-((-407)+(-417)+\ldots+(-497))<0$

$307+\ldots+397-8041<(-407)+\ldots+(-497)$.

II. Применение группировки или разложения

Оценить разность между левой и правой частями неравенства можно с помощью группировки слагаемых или разложением их на множители.

Пример 3. Доказать неравенство:

$2y^2x^3+x^2-x-1>x(2y^2-x^2)$, если $x>1, y\in R$.

Доказательство.

$$2y^2x^3+x^2-x-1-x\left(2y^2-x^2\right)=2y^2x^3+x^2-x-1-2y^2x+x^3=$$

$$=\left(2y^2x^3+x^3\right)+x^2-\left(2y^2x+x\right)-1=x^3\left(2y^2+1\right)+x^2-x\left(2y^2+1\right)+\left(x^2-1\right)=$$

$$=\left(2y^2+1\right)x\left(x^2-1\right)+\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)\left(\left(2y^2+1\right)x+1\right)>0,$$

так как $x^2-1>0$ при $x>1$;

$$2y^2x^3+x^2-x-1>x\left(2y^2-x^2\right).$$

III. Применение тождеств

Применение тождеств в ряде случаев даёт возможность довольно легко оценить знак разности между левой и правой частями неравенства.

Пример 4. Доказать неравенство:

$18a^2+4b^2+c^2\ge 6a(2b+c)$, где $a\in R, b\in R, c\in R$.

Доказательство.

$$18a^2+4b^2+c^2-6a(2b+c)=18a^2+4b^2+c^2-12ab-6ac=$$

$$=\left(9a^2-12ab+4b^2\right)+\left(9a^2-6ac+c^2\right)=(3a-2b)^2+(3a-c)^2\ge 0$$

IV. Использование результатов исследования квадратного трехчлена

V. Доказательство некоторых неравенств значительно упрощается, если использовать результаты исследования квадратного трехчлена

Пример 5. Доказать, что для любого $x\ne 0$ справедливо неравенство $\frac{31}{2x^2}>3-\frac{1}{3}x^2$.

Доказательство.

Составим разность и оценим ее знак:

$$\frac{31}{2x^2}-3-\frac{1}{3}x^2=\frac{31}{2x^2}-3+\frac{1}{3}x^2=\frac{2\left(x^2\right)^2-18x^2+93}{6x^2}>0,\ \text{т. к. } 6x^2>0, x\ne 0,$$

$2\left(x^2\right)^2-18x^2+93>0$, т. к. $D=-420<0$.

Имеем: $\frac{31}{2x^2}-3-\frac{1}{3}x^2>0$, а значит,

$\frac{31}{2x^2}>3-\frac{1}{3}x^2$, для всех $x\ne 0$.

VI. Способ, основанный на использовании при доказательстве данного неравенства неравенств, справедливость которых уже доказана

Пример 6. Доказать, что если $a>0, b>0, c>0, d>0$, то $\frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$.

Доказательство.

Для доказательства данного неравенства воспользуемся неравенством $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a>0, b>0$.

Согласно указанному неравенству имеем:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4},$$

Или $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$. В свою очередь, $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$, или $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}$, поэтому по свойству транзитивности $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Пример 7. Доказать, что если $a>0, b>0, c>0$, то $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

В неравенстве $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ положим, что $d=\frac{a+b+c}{3}$, получим

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}, \text{ или } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}.$$

Возведём обе части полученного неравенства в четвертую степень $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\frac{a+b+c}{3}$.

Умножим обе части этого неравенства на $\frac{3}{a+b+c}$, получим $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$.

И, наконец, извлекая кубический корень из обеих частей полученного неравенства, найдем $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Пример 8. Доказать неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d} \geq 3$, где $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Доказательство.

Воспользуемся неравенством $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ и применим к левой части доказываемого неравенства $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}}{3} \geq \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}$, откуда $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d} \geq 3$, что и требовалось доказать.

Пример 9. Доказать, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geq 16abcd$.

Доказательство:

Применим неравенство $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, получим
$a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $b+c \ge 2\sqrt{bc}$, $c+d \ge 2\sqrt{cd}$, $d+a \ge 2\sqrt{da}$.

Почленно перемножив последние неравенства, получим
$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \ge 16abcd$.

Пример 10. Доказать неравенство $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$, $a>0, b>0, c>0$.

Доказательство.

Применим неравенство $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$, или $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$.

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$, или $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$.

Перемножим полученные неравенства, т. е. неравенства $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$, получим, что $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$.

Пример 11. Доказать, что при $a>0, b>0, c>0$
$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \ge 6abc$.

Доказательство.

Левую часть данного неравенства разделим на abc, получим $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$, или $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Воспользуемся тем, что сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, получим $\frac{a}{c}+\frac{c}{d} \ge 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \ge 2$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$; отсюда $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \ge 6$, или $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \ge 6abc$.

Неравенства в математике играют важную роль. Их используют в математическом анализе, в теории функций и в других разделах математики. Поэтому неслучайно, что при изучении элементарной математики необходимо уделить достаточное внимание не только решению различных видов неравенств, но и познакомить будущего учителя математики с основными методами и способами доказательства неравенств.