А. Э. Шмигирев, Э. Ф. Шмигирев

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ С. Н. ЧЕРНИКОВА

Введение

В этой статье мы будем рассматривать только конечные группы. Пусть Σ – некоторое множество подгрупп группы G. Следуя С. Н. Черникову, будем говорить, что Σ плотно в G, если выполняется следующее условие: если A и B – такие подгруппы из G, что $A \subset B$ и A не максимальна в B, то $A \subseteq X \subseteq B$ для некоторой $X \in \Sigma$. В 1974 году С. Н. Черников поставил следующий вопрос: каково строение группы G, в которой множество всех ее субнормальных подгрупп плотно? Ответ на этот вопрос был получен в работе [1]. Заметим, что в теории формаций понятие субнормальности обобщается следующим образом. Говорят, что подгруппа H является F-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_t = H$$

такая, что G_i является F-нормальной максимальной подгруппой в G_{i-1} для любого $i > 1$. Если F совпадает с классом всех нильпотентных групп (который является, конечно, S-замкнутой насыщенной формацией), то F-субнормальная подгруппа оказывается субнормальной. Ясно, что вопрос С. Н. Черникова можно сформулировать в следующей общей форме:

Если F – S-замкнутая насыщенная формация, то каково строение группы, в которой множество всех ее F-субнормальных подгрупп плотно?

В таком виде вопрос С. Н. Черникова был исследован в работе [2] для случая, когда F – класс всех p-нильпотентных групп. В настоящей статье мы исследуем данный вопрос в случае, когда F – *произвольная* S-замкнутая насыщенная формация p-нильпотентных групп. Основной вывод, который вытекает из доказанных ниже теорем 2.1 и 2.2, состоит в том, что *за исключением нескольких вполне обозримых случаев в любой не p-нильпотентной группе G существуют не F-субнормальные подгруппы A и B такие, что $A \subset B$, A не максимальна в B, и из $A \subset X \subset B$ всегда следует, что X не F-субнормальна в G.*

1. Предварительные сведения

Мы используем обозначения из [3], [4]. Класс групп F называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Если F – непустая формация, то F-корадикал G – это наименьшая нормальная подгруппа из G, факторгруппа по которой принадлежит F. Формация F называется:

1) насыщенной, если $G/\Phi(G) \in F$ всегда влечет $G \in F$;

2) S-замкнутой, если F замкнута относительно взятия подгрупп.

Максимальная подгруппа M из G называется F-нормальной, если M содержит G^F, и F-абнормальной в противном случае. Группа G называется p-нильпотентной (p – простое число), если она представима в виде полупрямого произведения $G = HP$, где $H \lhd G$, $H \cap P = 1$ и P – силовская p-подгруппа из G. Скажем, что формация F p-нильпотентна, если каждая группа из F p-нильпотентна. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых чисел, делящих $|G|$; $\pi(F) = \bigcup_{G\in F} \pi(G)$. Если H – подгруппа из G, то $\pi(G:H)$ – множество всех простых чисел, делящих $|G:H|$. Группа Шмидта – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группа Миллера-Морено – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы.

Следующая теорема принадлежит Т. Хоуксу.

ТЕОРЕМА 1.1 ([5]; см. также [6], теорема 15.10). *Пусть F – насыщенная формация, G – группа, у которой F-корадикал G^F нильпотентен. Пусть H и M – такие подгруппы из G, что $H \in F$, $H \subseteq M$ и $HF(G) = G$. Если H F-субнормальна в M, то $M \in F$.*

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [3], [7]). (1) *Пусть F – непустая насыщенная формация, G – группа с разрешимым F-корадикалом G^F. Если каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из G принадлежит F, то G^F – p-группа для некоторого простого p. Если же каждая F-абнормальная максимальная подгруппа любой F-абнормальной максимальной подгруппы группы G принадлежит F, то $|\pi(G^F)| \le 2$.*

(2) *Если G – группа Шмидта с нормальной абелевой силовской p-подгруппой $P \ne 1$, то P элементарна.*

ТЕОРЕМА 1.3 (см. [10], теорема IV.7.4). *Группа G разрешима, если она имеет нильпотентную максимальную подгруппу, силовская 2-подгруппа которой имеет класс не более 2.*

ТЕОРЕМА 1.4 (см. [8], [9]). *При заданных p, α, q существует единственная группа Шмидта G_0 максимального порядка $p^\alpha q^{\beta_0}$, где $\beta_0 = b$ при $b \equiv 1 \pmod 2$, $\beta_0 = \frac{3}{2}b$ при $b \equiv 0 \pmod 2$, b – порядок q по модулю p. Все остальные группы Шмидта порядка вида $p^\alpha q^\beta$ изоморфны факторгруппам группы G_0 по ее центральным нормальным подгруппам.*

ТЕОРЕМА 1.5 (см. [10], с. 350) *Пусть* G *– группа операторов абелевой группы* V*, причем* $(|V|,|G|)=1$. *Тогда* $V=[V,G]\times C_V(G)$.

ЛЕММА 1.1 *Пусть* F *– непустая* S*-замкнутая насыщенная формация,* H *– подгруппа группы* G. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $H^F \subseteq G^F$*;*

2) если H F*-субнормальна в* G*, то* $H\cap N$ F*-субнормальна в* N*, где* N *– произвольная подгруппа из* G*;*

3) если H F*-субнормальна в* G *и* $K \triangleleft G$*, то* HK F*-субнормальна в* G*;*

4) если H F*-субнормальна в* G *и* F *является подформацией формации* H*, то* H H*-субнормальна в* G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Следующая лемма отмечалась в работе [2], ее доказательство осуществляется прямой проверкой.

ЛЕММА 1.2 *Пусть* F *– непустая* S*-замкнутая насыщенная формация. Если множество всех* F*-субнормальных подгрупп плотно в группе* G*, то справедливы следующие утверждения:*

1) если $K \triangleleft G$*, то в* G/K *множество всех* F*-субнормальных подгрупп плотно;*

2) если M *– подгруппа из* G*, то множество всех* F*-субнормальных подгрупп из* M *является плотным в* M.

ЛЕММА 1.3 *Если* H *–* F*-субнормальная подгруппа группы* G*, то* $\pi(G:H)\subseteq \pi(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению, существует цепь $G=G_0\supset G_1\supset \ldots \supset G_t = H$ такая, что G_i является F-нормальной максимальной подгруппой в G_{i-1} при любом $i>1$. Таким образом, $G_i \supseteq G_{i-1}^F$, и потому

$$\pi(G_{i-1}:G_i)\subseteq \pi(G_{i-1}:G_{i-1}^F)\subseteq \pi(F)$$

для каждого $i>1$. Следовательно, $\pi(G:H)\subseteq \pi(F)$.

ЛЕММА 1.4 *Пусть* F *– непустая* S*-замкнутая насыщенная формация,* G *– группа, у которой множество всех ее* F*-субнормальных подгрупп плотно. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H *–* F*-абнормальная максимальная подгруппа группы* G*, то либо* $H\in F$*, либо каждая* F*-абнормальная максимальная подгруппа из* H *принадлежит* F*;*

2) если $M\subset H\subseteq G$ *и* $H\in F$*, то* M *либо максимальна в* H*, либо* F*-субнормальна в* G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала утверждение 1). Пусть H – F-абнормальная максимальная подгруппа, не принадлежащая F. Допустим, что H обладает F-абнормальной максимальной подгруппой

H_1, не принадлежащей F. Тогда в H_1 имеется F-абнормальная максимальная подгруппа H_2. По условию, в G найдется такая F-субнормальная подгруппа N, что $H_2 \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \neq H$. По лемме 1.1, $H_1^F \subseteq H^F \subseteq G^F$. Так как N F-субнормальна, то она содержится в F-нормальной максимальной подгруппе, и поэтому $NG^F \neq G$. Значит, $H_2G^F \neq G$. Последнее противоречит следующему:

$$H_2G^F = H_2H_1^F G^F = H_1G^F \quad H_1H^F G^F \quad HG^F \quad G.$$

Докажем 2). Пусть $M \subset H \subset G$ и $H \in F$. Допустим, что M не максимальна в H. По условию, в G найдется такая F-субнормальная подгруппа N, что $M \subseteq N \subseteq H$. Так как F S-замкнута, то $N \in F$. Поэтому M F-субнормальна в N. Теперь ясно, что M F-субнормальна в G. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. *Пусть F – насыщенная S-замкнутая формация, G – группа с нормальной силовской p-подгруппой G_p, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $G \notin F$;

2) холлова p'-подгруппа $G_{p'}$-группы G является максимальной в G и принадлежит F;

3) любая собственная подгруппа из $G_{p'}$ F-субнормальна в G. Тогда G является минимальной не F-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия прямо следует, что G_p совпадает с G^F и является минимальной нормальной подгруппой в G. Понятно, что каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из G сопряжена с $G_{p'}$ и поэтому принадлежит F. Пусть L – произвольная F-нормальная максимальная подгруппа из G. Тогда $L = G^F(L \cap G_{p'})$. Так как F S-замкнута, то $L \cap G_{p'} \in F$. Подгруппа $L \cap G_{p'}$ является собственной в $G_{p'}$ и по условию F-субнормальна в G. По теореме 1.1, $L = G^F(L \cap G_{p'}) \in F$. Итак, каждая максимальная подгруппа из G принадлежит F. Лемма доказана.

2. Основные результаты

В настоящем разделе мы изучим вопрос С. Н. Черникова для произвольной S-замкнутой насыщенной формации p-нильпотентных групп. В леммах, которые мы сейчас докажем, F обозначает некоторую произвольным образом выбранную непустую насыщенную S-замкнутую p-нильпотентную формацию, G – группу, которая не принадлежит F и в которой множество всех ее F-субнормальных подгрупп плотно.

ЛЕММА 2.1 *G либо разрешима, либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Так как G неразрешима, то она имеет подгруппу H порядка q^2, где q – простое число. По условию, G имеет F-субнормальную подгруппу R такую, что $|R|$ делит q^2. Поэтому в G существует максимальная подгруппа, содержащая G^F. Таким образом, $G^F \neq G$.

По лемме 1.2, множество всех F-субнормальных подгрупп плотно в любой факторгруппе группы G. Поэтому лемма верна для любой нетривиальной факторгруппы группы G. Так как класс всех разрешимых групп и класс всех p-нильпотентных групп – насыщенные формации, то мы получаем, что $\Phi(G)=1$. Очевидно, G имеет минимальную нормальную подгруппу L, содержащуюся в G^F.

1. Рассмотрим случай $p \notin \pi(F)$. Допустим, что G/G^F неразрешима. Тогда G содержит подгруппу Q порядка q^2, где $q \in \pi(G) \cap \pi(F)$. Так как 1 не максимальна в Q, то в G существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $1 \subseteq N \subseteq Q$. По лемме 1.3, $|G:N|$ есть $\pi(F)$-число. Мы получаем, что $\pi(G) \subseteq \pi(F)$ и $p \notin \pi(G)$, т. е. G оказывается p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. Противоречие. Следовательно, G/G^F разрешима. Ввиду леммы 1.2, лемма верна для G^F. Значит, G^F либо разрешима, либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. Так как $p \notin \pi(F)$, то мы видим, что лемма верна и для G.

2. Теперь рассмотрим случай $p \in \pi(F)$. Из леммы 1.2 и индуктивного предположения вытекает, что лемма верна для любой собственной подгруппы группы G. Следовательно, каждая собственная подгруппа группы G либо разрешима, либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой.

2.1. Предположим, что G содержит разрешимую F-нормальную максимальную подгруппу. Тогда G^F разрешима, а G/G^F – неразрешимая p-нильпотентная $\pi(F)$-группа. Из $L \subseteq G^F$ следует, что L является r-группой для некоторого простого r.

Предположим, что $r \neq p$ и $r \notin \pi(F)$. Так как G/L неразрешима, то G имеет подгруппу Q порядка q^2, где $q \in \pi(F)$. По условию, в G существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $1 \subseteq N \subseteq Q$. Так как N – $\pi(F)$-группа, а по лемме 1.3, индекс $|G:N|$ является $\pi(F)$-числом, то мы получаем, что G – p-нильпотентная $\pi(F)$-группа. Противоречие.

Случай $r \neq p$ и $r \in \pi(F)$ невозможен, так как G/L – неразрешимая p-нильпотентная $\pi(F)$-группа. Поэтому остается рассмотреть случай $r = p$. Но тогда G является p-разрешимой $\pi(F)$-группой. Так как G

неразрешима, то в холловой p'-подгруппе $G_{p'}$ из G найдется нециклическая силовская подгруппа S. Пусть S_1 – произвольная максимальная подгруппа из S. Тогда S_1 не максимальна в $G_{p'}$. По условию, в G существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $S_1 \subseteq N \subseteq G_{p'}$. Обозначим через H формацию всех p-нильпотентных групп. По лемме 1.1, N H-субнормальна в LN. Теперь по теореме 1.1, мы имеем $LN \in H$. Следовательно, $LN = L \times N$, а значит, S_1 централизует L. Получается, что любая нециклическая силовская подгруппа из $G_{p'}$ централизует L. Так как G не принадлежит F, то $G_{p'}$ не централизует L. Итак, в $G_{p'}$ имеется циклическая силовская подгруппа Q, которая не централизует L. Ввиду теоремы 1.3 Q не максимальна в $G_{p'}$. Теперь, применяя к Q те же рассуждения, что и для S_1, получаем, что Q централизует L. Пришли к противоречию.

2.2. Итак, пусть теперь каждая F-нормальная максимальная подгруппа группы G является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. Тогда G оказывается $\pi(F)$-группой, а ее F-корадикал G^F p-нильпотентен. Так как группы Шмидта разрешимы, то отсюда следует, что G имеет F-абнормальную максимальную подгруппу H, которая не является p-нильпотентной. По предположению, H разрешима. По лемме 1.4, каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из H принадлежит F. По теореме 1.2, H^F является q-группой для некоторого простого числа q. Если $q \neq p$, то H p-нильпотентна, противоречие. Таким образом, $q = p$, т. е. H^F есть p-группа. Выберем в H подгруппу Q, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $|Q|$ – степень простого числа; 2) Q не является p-группой; 3) Q не максимальна в H. По условию, в G найдется F-субнормальная подгруппа N такая, что $Q \subseteq N \subseteq H$. По теореме 1.1, $NH^F \in F$, а потому мы имеем $[Q, H^F] = 1$. Так как H не p-нильпотентна, то мы получаем, что $H/C_H(H^F)$ не является p-группой. Мы видим, что в H существует силовская q-подгруппа H_q такая, что H_q максимальна в H, $p \neq q$ и $H_q \not\subseteq C_H(H^F)$. Если H_2 нециклическая, то она имеет две различные максимальные подгруппы Q_1 и Q_2, которые, как мы доказали, централизуют H^F. Отсюда следует, что и $H_q = Q_1 Q_2$ централизует H^F, что невозможно. Следовательно, Q – циклическая максимальная подгруппа в H. Группа G у нас p-разрешима. Будем считать, что H_q содержится в холловой p'-подгруппе $G_{p'}$ группы G. Если Q максимальна в $G_{p'}$, то учитывая, что Q циклическая, мы получаем, что, по теореме 1.3, подгруппа $G_{p'}$ разрешима. Но тогда и G разрешима. Получаем противоречие. Таким образом, H_q не максимальна в $G_{p'}$. По условию, в G найдется такая F-субнормальная подгруппа N, что $H_q \subseteq N \subseteq G_{p'}$. Так как $N \in F$, мы получаем, что H_q F-субнормальна в H. По теореме 1.1, $H \in F$. Снова получили противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2 *Предположим, что* $p \in \pi(F)$, G^F *–* p*-группа,* G *не* p*-нильпотентна, а все ее* F*-абнормальные максимальные подгруппы* p*-нильпотентны. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) G *– группа Шмидта, и* $|\Phi(G_p)| = p$*;*

2) $\pi(G) \leq 3$*, силовская* p*-подгруппа* G_p *из* G *совпадает с* G^F *и является ее минимальной нормальной подгруппой;*

3) $\pi(G) = \{p, q\}$*,* G^F *– дополняемая минимальная нормальная подгруппа в* G*, имеющая индекс* p *в* G*, а подгруппа* G_q *является циклической, причем* $\Phi(G_q)G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1, G разрешима. Пусть H – некоторая F-абнормальная максимальная подгруппа из G. Тогда, по условию, некоторая холлова p'-подгруппа $G_{p'}$ входит в H и нормализует ее силовскую p-подгруппу H_p. Так как G^F – p-группа, то $G_{p'} \in F$. А так как $p \in \pi(F)$ и H p-нильпотентна, то из $H/H \cap G^F \in F$ вытекает, что $H \in F$. Рассмотрим два случая: $H_p \neq 1$ и $H_p = 1$.

Случай 1: $H_p \neq 1$. По лемме 1.4, $G_{p'}$ либо максимальна в H, либо F-субнормальна в G. Пусть вначале $G_{p'}$ F-субнормальна в G. Тогда по теореме 1.1, $G^F G_{p'} \in F$. Так как $HG^F = G$, то получается, что $H_p G^F$ – силовская p-подгруппа из G, нормализующая $G_{p'}$. Это противоречит тому, что G не p-нильпотентна. Пусть теперь $G_{p'}$ максимальна в H. Тогда $|H_p| = p$. Значит, G^F либо совпадает с силовской p-подгруппой G_p, либо $|G_p : G^F| = p$.

Случай 1.1: $G^F = G_p$. Допустим, что в G имеется ненильпотентная F-нормальная максимальная подгруппа M. Будем считать, что ее холлова p'-подгруппа $M_{p'}$ содержится в $G_{p'}$. Так как $M_{p'}$ не максимальна в H и $H \in F$, то по лемме 1.4, $M_{p'}$ F-субнормальна в G, а значит, и в M. По теореме 1.1, $M \in F$, а значит, M нильпотентна. Итак, G – группа Шмидта. Но тогда H_p нормальна в G, а значит, ввиду теоремы 1.2,

G_p не может быть абелевой. Таким образом, $1 \neq \Phi(G_p) \subseteq H$. Так как $|H_p| = p$, то $\Phi(G_p) = H_p$. Итак, G – группа типа 1).

Случай 1.2: G^F не является силовской p-подгруппой в G. Тогда $G^F H_p = G_p$ и $G^F \cap H_p = 1$. Таким образом, G^F является минимальной нормальной подгруппой в G. Рассмотрим подгруппу $M = G^F G_{p'}$. Подгруппа M нормальна в G и не p-нильпотентна. Подгруппа M^F содержится в G^F и характеристична в M. Так как G^F – минимальная нормальная подгруппа, то $G^F = M^F = M_p$ – силовская p-подгруппа из M. Пусть M_1 – такая строго содержащая $G_{p'}$ подгруппа из M, что $G_{p'}$ максимальна в M_1. Из равенства $N_G(G_{p'}) = H$ следует, что M_1 не является p-нильпотентной группой. Каждая собственная подгруппа из $G_{p'}$ не максимальна в H и по лемме 1.4 является F-субнормальной в G, а значит, и в M_1. Теперь, по лемме 1.5, M_1 – минимальная не F-группа, т. е. M_1 – группа Шмидта. Таким образом, $G_{p'}$ – циклическая q-группа, $q \neq p$. Так как $N_G(\Phi(G_q)) \supseteq \langle M_1, H \rangle = G$, то $\Phi(G_q)G$. Лемма в этом случае доказана.

Случай 2: $H_p = 1$. Таким образом, $H = G_{p'}$ – дополнение к подгруппе G^F, которая является в этом случае силовской подгруппой в G и к тому же минимальной нормальной подгруппой. Если каждая собственная подгруппа из $G_{p'}$ F-субнормальна в G, то, по лемме 1.5, G является группой Шмидта, т. е. G – группа типа 3).

Предположим, что G не является группой Шмидта. Тогда в G имеется не p-нильпотентная F-нормальная максимальная подгруппа M, холлова p'-подгруппа $M_{p'}$ которой входит в $G_{p'}$, принадлежит F и, ввиду теоремы 1.1, не является F-субнормальной в G (в противном случае по теореме 1.1, подгруппа $G^F M_{p'} = M$ была бы p-нильпотентной). Выберем в M такую подгруппу M_1, что $M \supseteq M_1 \supset M_{p'}$ и $M_{p'}$ максимальна в M_1. Допустим, что в $G_{p'}$ имеется F-субнормальная в G подгруппа K, не содержащаяся в $M_{p'}$. Тогда, по теореме 1.1, $G^F K \in F$, т. е. $G^F K = G^F \times K$. Тогда $N_G(M_p)$ содержит $G^F K$ и M, т. е. $M_p G$. Так как G^F – минимальная нормальная подгруппа, то $M_p = G^F$. Любая собственная подгруппа из $M_{p'}$ не максимальна в $G_{p'}$ и по лемме 1.4, является F-субнормальной в G. По лемме 1.5, примененной к M, получаем, что M – минимальная не F-группа. Таким образом, M – группа Шмидта. Значит, $M_{p'}$ – примарная циклическая группа. Так как G разрешима и G^F – минимальная нормальная подгруппа, то мы видим, что G – группа типа 2).

Итак, каждая подгруппа из $G_{p'}$, F-субнормальная в G, содержится в $M_{p'}$. Пусть q – простой делитель индекса $|G_{p'} : M_{p'}|$. Силовская q-подгруппа G_q из $G_{p'}$ не входит в $M_{p'}$ и потому не является F-субнормальной в G. Поэтому по лемме 1.4, G_q максимальна в $G_{p'}$. Отсюда следует, что $|\pi(G_{p'})| \leq 2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3 *Пусть $p \in \pi(F)$ и каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из G p-нильпотентна. Тогда G либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой, либо группой одного из типов:*

1) G – группа Шмидта и $\Phi(G_p) = p$;

2) $|\pi(G)| \leq 3$, силовская p-подгруппа G_p является минимальной нормальной подгруппой в G;

3) $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = P_1(G_q P_2)$, где P_1 – минимальная нормальная подгруппа в G, $|P_2| = p$, G_q циклическая, $\Phi(G_q)G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G не является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. По лемме 2.1, G разрешима. Пусть H – формация всех p-нильпотентных групп. Так как $G^H \subseteq G^F$, то каждая H-абнормальная максимальная подгруппа является F-абнормальной, а значит, ввиду условия, и p-нильпотентной. По тереме 1.2, G^H – p-группа, и теперь мы применяем лемму 2.2 в случае $F = H$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4 *Пусть G не p-нильпотентна и $p \in \pi(G) \subseteq \pi(F)$. Тогда любая F-абнормальная максимальная подгруппа из G либо p-нильпотентна, либо является бипримарной группой Миллера–Морено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2, G разрешима. Пусть H – не p-нильпотентная F-абнормальная максимальная подгруппа группы G. По лемме 1.2, множество всех F-субнормальных подгрупп в H плотно. По лемме 1.4, каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из H принадлежит F. По теореме 1.2, H^F – p-группа. Значит, H – группа типа 1), 2) или 3) леммы 2.2. В дальнейшем H обозначает формацию всех p-нильпотентных групп. Пусть H – группа типа 1), т. е. H – группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой H_p и $|\Phi(H_p)| = p$. Тогда $H_{p'}$ не максимальна в H. По условию, в G имеется F-субнормальная подгруппа N такая, что $H_{p'} \subseteq N \subset H$. Кроме того, $N \in F$. Получается, что

$H_{p'}$ F-субнормальна в G, а значит, и в H. По теореме 1.1, $H \in F$, что невозможно. Итак, H либо типа 2), либо типа 3) из леммы 2.2.

Случай 1: $|G:H| = r^{\alpha}$, $r \neq p$. Тогда холлова p'-подгруппа $G_{p'}$ группы G строго содержит некоторую $H_{p'}$.

Предположим, что H – типа 2). Пусть S – произвольная собственная подгруппа из $H_{p'}$. Так как S не максимальна в $G_{p'}$, то существует F-субнормальная в G подгруппа N такая, что $S \subseteq N \subseteq G_{p'}$. Подгруппа N будет H-субнормальна в G. Поэтому и S будет H-субнормальна в G. По теореме 1.1, $H_p S \in H$, т. е. $H_p S = H_p \times S$. Таким образом, каждая собственная подгруппа из H p-нильпотентна, а значит, H – группа Шмидта, в которой H_p – минимальная нормальная подгруппа. Значит, в этом случае лемма верна.

Итак, H –группа типа 3), т. е. $\pi(H) = \{p, q\}$, H^F – дополняемая минимальная нормальная подгруппа в H, силовская q-подгруппа H_q из H циклическая и $\Phi(H_q) \triangleleft H$. Если H_q F-субнормальна в H, то по теореме 1.1, $H^F H_q$ нильпотентна, следовательно $H_q \triangleleft H$, что невозможно. Значит, H_q не F-субнормальна в G. Если H_q не максимальна в $N_G(H_q)$, то по условия, в G найдется F-субнормальная подгруппа N такая, что $H_q \subseteq N \subseteq N_G(H_q)$. Получается, что H_q – нормальная подгруппа F-субнормальной разрешимой $\pi(F)$-подгруппы N, а потому H_q будет F-субнормальной в G. Итак, H_q максимальна в $N_G(H_q)$, а значит $r \neq q$. Пусть P – силовская p-подгруппа из $N_H(H_q)$, являющейся дополнением к H^F в H. Очевидно, $|P| = p$. Так как H_q не максимальна в H, то $H_q \subseteq N \subseteq H$ для некоторой F-субнормальной подгруппы N из G. Тогда $H_q G^F \subseteq N G^F \neq G$. Так как $G = G^F H \;\; G^F H^F N_H(H_q) \;\; G^F P H_q =$, то мы видим, что P не содержится в G^F. Ввиду леммы 1.4, F-абнормальные максимальные подгруппы F-абнормальных максимальных подгрупп из G принадлежат F, поэтому по теореме 1.2 имеем $|\pi(G^F)| = 2$. Получается, что $G^F = H^F G_r$. Вспоминая, что H^F – минимальная нормальная подгруппа в H, мы получаем, что содержащаяся в G^F минимальная нормальная подгруппа группы G совпадает с H^F либо с G_r. Случай $H^F \triangleleft G$ не возможен, так как $r \neq p$ и G не p-нильпотентна. Значит, $G_r \triangleleft G$. Рассмотрим p-нильпотентную подгруппу $M = P H_q G_r$. По условию, H_q содержится в некоторой подгруппе из M, которая F-субнормальна в G. Так как $M \in H$, то H_q будет

H-абнормальна в G, а значит, и в H. Тогда, по теореме 1.1, $H^F H_q$ p-нильпотентна, что противоречит тому, что H не p-нильпотентна. Случай 1 полностью рассмотрен.

Случай 2: $|G:H|=p^{\alpha}$. Будем доказывать этот случай по индукции, используя доказанный нами факт, что для F-абнормальных максимальных подгрупп, индекс которых не является степенью p, утверждение леммы выполняется. Нам надо рассмотреть две возможности: H – либо типа 2), либо типа 3) из леммы 2.2.

Рассмотрим сначала случай, когда H типа 2), т. е. $|\pi(H)|\leq 3$, силовская p-подгруппа из H совпадает с H^F и является минимальной нормальной подгруппой в H. Ясно, что G^F содержит силовскую p-подгруппу G_p группы G, а H^F нормальна в G; кроме того, холлова p'-подгруппа $H_{p'}$ из H является холловой p'-подгруппой в G. Подгруппа H/H^F является F-абнормальной максимальной подгруппой в G/H^F; кроме того, H/H^F – холлова p'-подгруппа в G/H^F. Если L/H^F – любая F-абнормальная максимальная подгруппа из G/H^F, не сопряженная с H/H^F, то индекс $|G/H^F:L/H^F|$ не делится на p. Но тогда L – F-абнормальная максимальная подгруппа в G с индексом, не делящимся на p. По доказанному, L либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Будем считать, что $G_p\subseteq L$. Заметим, что $H^F L$. Если L – p-замкнутая группа Миллера-Морено, то G_p – минимальная нормальная подгруппа в L и, значит, $H^F=G_p$, что невозможно. Таким образом, в G/H^F все F-абнормальные максимальные подгруппы p-нильпотентны. По теореме 1.2, G^F/H^F – p-группа. Вспоминая, что $G^F\supseteq G_p$, получаем $G^F=G_p$. Допустим, что в $H_{p'}$ имеется максимальная подгруппа K такая, что $H^F K$ не p-нильпотентна. По теореме 1.1, K не F-субнормальна в G. Так как K не максимальна в H, то $K\subseteq N\subseteq H$ для некоторой собственной F-субнормальной подгруппы N из G. Значит, $G^F N\neq G$. Подгруппа $M=G^F K$ максимальна в G и содержится в $G^F N$. Поэтому $M=G^F N=G^F K$. Так как $N\subseteq H$ и $H\neq M$, то N является собственной F-субнормальной подгруппой в M, и поэтому M^F является собственной подгруппой в G^F. Так как $M\cap H=H^F K$ не p-нильпотентна, то $M^F\neq 1$. Подгруппа K содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе T из M. По индукции, T либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Предположим, что T – группа Миллера-Морено. Тогда $T=T^F K$, где K максимальна в T, а T^F – минимальная нормальная подгруппа в T. Так как $TM^F=M=G^F K$ и $T^F\subseteq M^F\subseteq G^F=G_p$, то $M^F=G^F$, что невозможно, так как M^F – собственная подгруппа в G^F. Значит, T

p-нильпотентна и, более того, принадлежит F. Если K не максимальна в T, то, по условию, $K \subseteq N_1 \subseteq T$, где N_1 F-субнормальна в G. Но тогда K F-субнормальна в G, что невозможно. Таким образом, K максимальна в T и, значит, $T = P \times K$, где $|P| = p$. Так как $M = M^F T$, а T максимальна в M и имеет силовскую p-подгруппу P порядка p, то M^F – максимальная нормальная подгруппа в M, а значит, $G_p = G^F = P \times M^F$ – тоже элементарная абелева p-группа.

Случай 2.1: $P \not\subseteq H^F$, $H^F \subseteq M^F$. Так как M^F – минимальная нормальная подгруппа в M, то $H^F = M^F G$. По теореме Машке, $G^F = P_1 \times M^F$, где $P_1 G$. Так как $M/M^F \in F$, то M-главные факторы PM^F/M^F и $P_1 M^F/M^F$ центральны. Но тогда P и P_1 содержатся в $Z(M)$. Если $P \neq P_1$, то из $G^F = PP_1 M^F$ вытекает, что $PP_1 \cap M^F \neq 1$, а это противоречит тому, что M^F – F-эксцентральный главный фактор в M. Значит, $P = P_1 G$. Рассмотрим подгруппу $T_1 = PH_{p'}$. Подгруппа K не максимальна в T_1, поэтому $K \subseteq N_1 \subseteq T_1$, где N_1 – некоторая F-субнормальная подгруппа из G. Так как $G^F T_1 = G$, то T_1 не может быть F-субнормальной в G. Поэтому $N_1 \neq T_1$. Из максимальности K в $H_{p'}$ выводим, что N_1 совпадает либо с $H_{p'}$, либо с $PK = P \times K$. В обоих случаях $N_1 \in F$. Отсюда и из F-субнормальности подгруппы N_1 следует, что K F-субнормальна в G, и мы приходим к противоречию.

Случай 2.2: $P \not\subseteq H^F$, $H^F \not\subseteq M^F$. Так как $H^F \cap M^F = 1$, то главные факторы $H^F M^F/M^F$ и PM^F/M^F изоморфны, откуда выводим, что H^F содержится в $Z(M)$. Но тогда $PH^F \cap M^F$ – неединичная подгруппа из $Z(M)$, что невозможно, так как M^F F-эксцентральна. Получили противоречие.

Случай 2.3: $P \subseteq H^F$. Так как $G^F = PM^F$, то из $P \subset H^F$ следует, что $H^F \cap M^F \neq 1$, а это противоречит минимальности M^F в M. Поэтому остается принять, что $P = H^F$. Это означает, что $T = PK = H^F K$ p-нильпотентна. Но K была выбрана ранее так, что $H^F K$ не p-нильпотентна. Снова получили противоречие.

Таким образом, в $H_{p'}$ нет максимальных подгрупп K таких, что $H^F K$ не p-нильпотентна. Получается, что H – минимальная не p-нильпотентная группа с минимальной нормальной подгруппой H^F, т. е. H – группа Миллера-Морено.

Пусть теперь H – группа типа 3), т. е. $\pi(H) = \{p, q\}$, H^F – дополняемая минимальная нормальная подгруппа в H, не являющаяся силовской в H, а силовская q-подгруппа H_q из H является циклической и $\Phi(H_q)H$. Если H_q F-субнормальна в H, то $H^F H_q$ p-нильпотентна по теореме 1.1 и, кроме того, дополнение к H^F в H тоже p-нильпотентно. А это противоречит тому, что H не p-нильпотентна. Поэтому в дальнейшем мы будем иметь в виду, что H_q не F-субнормальна в H.

Если H_q не максимальна в $N_G(H_q)$, то по условию, $H_q \subseteq N \subseteq N_G(H_q)$, где N F-субнормальна в G. Так как $N_G(H_q) \in F$, то получается, что H_q F-субнормальна в G, что невозможно. Итак, H_q максимальна в $N_G(H_q)$. Пусть PH_q – дополнение к H^F в H, а P – дополнение к H^F в силовской p-подгруппе H_p из H. Тогда $G = G^F PH_q$, $PH_q = N_G(H_q)$. Подгруппа H_q не максимальна в H, но максимальна в $PH_q \in F$, т. е. $|P| \neq p$. Поэтому, по условию, существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $H_q \subseteq N \subseteq H$. Значит, N содержится в максимальной подгруппе группы G, содержащей G^F. Равенство $G = G^F PH_q$ показывает теперь, что P не содержится в G^F. Подгруппа $M = G^F H_q$ максимальна в G, поскольку ее индекс равен $|P| = p$. Так как N –собственная F-субнормальная подгруппа в G, то $G^F N$ не равна G, но содержит $G^F H_q = M$. Значит, $G^F N = G^F H_q = M$. Но N – собственная F-субнормальная подгруппа в M, поэтому $M^F N \neq M$. Получается, что M^F – собственная подгруппа из G^F. Ясно, что H_q содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе L группы M. Для M лемма верна по индукции, поэтому L либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Если L p-нильпотентна, то из $N_M(H_q) = H_q$ выводим, что $L = H_q$ и поэтому $G^F = M$, что невозможно. Таким образом, L – группа Миллера-Морено, у которой L^F – силовская p-подгруппа. Но тогда ввиду того, что $L^F \subseteq M^F$ и $M = M^F L = G^F H_q$, мы получаем $M^F = G^F$. Снова получили противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1 *Пусть F – непустая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, G – группа, в которой множество всех F-субнормальных подгрупп плотно, $\pi(G) \not\subseteq \pi(F)$. Тогда G – группа одного из следующих типов:*

1) $\pi(G) = \{p_1, q\}$, $|G| = p_1 q$, $q \notin \pi(F)$;

2) $\pi(G) = \{p_1, q\}$, $|G| = p_1 q^2$, G_{p_1} *максимальна в* G, $p_1 \in \pi(F)$, $q \notin \pi(F)$;

3) $\pi(G) = \{q\}$, $|G| \leq q^2$, $q \notin \pi(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1, G разрешима. Так как $\pi(G) \notin \pi(F)$, то ясно, что $G^F \neq 1$. Положим $\pi = \pi(F)$ и рассмотрим холлову π-подгруппу G_π группы G. Если единичная подгруппа не является максимальной в G_π, то существует F-субнормальная в G подгруппа N такая, что $1 \subseteq N \subseteq G_\pi$. По лемме 1.3, $\pi(G:N) \subseteq \pi$ и, значит, G – π-группа. Получили противоречие. Таким образом, $|G_\pi|$ равен либо 1, либо является простым числом.

Рассмотрим теперь холлову π'-подгруппу $G_{\pi'}$ группы G. Пусть H – нормальная максимальная подгруппа из $G_{\pi'}$. Пусть $q = |G_{\pi'}:H|$, $q \in \pi'$. Если 1 не максимальна в H, то между 1 и H можно вставить F-субнормальную подгруппу, индекс которой по лемме 1.3 является π-числом. Понятно, что этот индекс делится на $q \in \pi'$. Получаем противоречие. Значит, $|G_{\pi'}|$ равен либо квадрату простого числа, либо простому числу, либо произведению двух различных простых чисел.

Если $|G_\pi| = 1$, то ясно, что G либо типа 1), либо типа 3). Пусть $|G_\pi| = p_1$ – простое число. Если $|G_{\pi'}|$ – простое число, то G – группа типа 1). Пусть $|G_{\pi'}| = qq_1$, где q, q_1 – простые числа. Предположим, что в G существует подгруппа T порядка $p_1 q$. Так как 1 не максимальна в T, то между 1 и T существует, по условию, F-субнормальная подгруппа, индекс которой по лемме 1.3 является π-числом. Но этот индекс делится и на $q_1 \in \pi'$. Остается принять, G_p – максимальная подгруппа группы G. Но тогда $q = q_1$ и G – группа типа 2). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2 *Пусть F – непустая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, G – $\pi(F)$-группа, у которой множество всех F-субнормальных подгрупп плотно. Тогда G либо p-нильпотентна, либо является группой одного из следующих типов:*

1) G – группа Шмидта, $|\Phi(G_p)| \le p$;

2) $G = G_p G_q$, G_q нециклическая, $G_p = G^F$ – минимальная нормальная подгруппа в G, $C_G(G_p)$ является нильпотентной максимальной подгруппой в G, а любая другая максимальная подгруппа из G, содержащая G_p, является группой Миллера-Морено;

3) $\pi(G) = \{p,q\}$, $G = G_p G_q$, $G_p = G^F$, $G_q = N_G(G_q)$ в G имеется нильпотентная F-нормальная максимальная подгруппа, а также F-абнормальная максимальная подгруппа, являющаяся группой Миллера-Морено;

4) $\pi(G) = \{p,q\}$, $G = P_1(G_q P_2)$, где $P_1 P_2 = G_p$, $|P_2| = p$, $\Phi(G_q) \lhd G$, G_q циклическая, P_1 – минимальная нормальная подгруппа в G, имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются $P_1 G_q$, $P_2 G_q$ и $G_p \Phi(G_q)$;

5) $\pi(G)=\{p,q\}$, $G^F=G_p$ – минимальная нормальная подгруппа в G, G_q является циклической максимальной подгруппой в G, $G_p\Phi(G_q)$ – либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), $\Phi(G)$ $\Phi(\Phi(G_q))$ и $G/\Phi(G)$ – группа Фробениуса;

6) $\pi(G)=\{p,q,r\}$ и если G_p, G_q G_r – силовская база группы G, то $G_pG_r \lhd G$, $\Phi(G_q)\lhd G$, одна из подгрупп G_p, G_r нормальна в G, G_q максимальна в G_qG_r, имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп в G, представителями которых являются $G_pG_q=G_pG_q$ – группа Миллера-Морено, G_qG_r и $G_pG_r\Phi(G_q)$;

7) $\pi(G)=\{p,q,r\}$, $G=G_p(G_rG_q)$ – группа порядка $p^\alpha qr$, не являющаяся группой Фробениуса и имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются: G_pG_r – либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), G_pG_q – группа типа 4), G_rG_q;

8) $\pi(G)=\{p,q,r\}$ $G=G_p(G_r\times G_q)$ – группа Фробениуса порядка $p^\alpha qr$, имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются: G_pG_r – либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), G_pG_q – либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), G_rG_q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G не p-нильпотентна. Тогда по лемме 2.1, G разрешима.

1. Допустим, что G обладает не p-нильпотентной F-абнормальной максимальной подгруппой H. По лемме 2.3, H – бипримарная группа Миллера-Морено, а значит, $|\pi(G)|\le 3$. Заметим еще, что $H=H_pH_q$, где $H_p=H^F$ – минимальная нормальная подгруппа в H.

1.1 Рассмотрим вначале случай $\pi(G)=\{p,q\}$. Тогда $|G:H|$ есть степень либо простого p, либо q. Пусть $|G:H|=q^\beta$. Пусть G_q – силовская q-подгруппа из G, содержащая H_q. Если H_q не максимальна в G_q, то $H_q\subseteq N\subseteq G_q$, где N – некоторая F-субнормальная в G подгруппа. Тогда H_q F-субнормальна в G, а значит, и в H (напомним, что из $\pi(G)\subseteq\pi(F)$ следует, что $G_q\in F$). Но тогда по теореме 1.1, $H\in F$, противоречие. Значит, $|G_q:H_q|=q$ и $G^FG_q=G$. Пусть L – максимальная подгруппа из G, содержащая G_q. Так как L F-абнормальна, то, по лемме 2.3, L либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Но H_p – минимальная нормальная подгруппа в H, поэтому ясно, что L не может быть p-замкнутой группой. Таким образом, L p-нильпотентна. Если

$L \neq G_q$, то из $L \supset G_q \supset H_q$ и из условия вытекает, что существует F-субнормальная в G подгруппа N такая, что $L \supseteq N \supseteq H_q$. Так как $L \neq G$, то $NG^F \neq G$, что противоречит равенству $G_q G^F = G$. Итак, мы должны рассмотреть только случай $L = G_q$. Подгруппа H_q является циклической и максимальна в G_q. Поэтому очевидно, что максимальная подгруппа Q из H_q нормальна в G. Пусть S/Q –минимальная нормальная подгруппа в G/Q. Так как $H_p Q/Q$ – минимальная нормальная подгруппа в H/Q, то S/Q – q-группа, не входящая в H/Q, а значит, $|S/Q| = q$. Так как G_q/Q максимальна и не нормальна в G/Q, то $C_{G/Q}(S/Q) = G/Q$. Ясно теперь, что $H_p Q/Q \lhd G/Q$, а значит, $H_p Q$ нормальна в G. Таким образом, получается, что $G^F \subseteq H_p Q$, что противоречит равенству $G = HG^F$. Итак, теперь надо рассмотреть случай $|G:H| = p^\alpha$, т. е. H_q – силовская q-подгруппа в G, а H_p – минимальная нормальная подгруппа в G. Допустим, что силовская p-подгруппа P из $N_G(H_q)$ не равна 1. Так как $P \not\subseteq H_p$, то $H_p N_G(H_q) = G$. Тогда G/H_p p-нильпотентна, а значит, силовская p-подгруппа из G^F содержится в H_p. Но это противоречит равенству $G = HG^F$. Итак, $H_q = G_q = N_G(G_q)$. По теореме Бернсайда, G q-нильпотентна и, значит, G^F – силовская p-подгруппа в G. Максимальная подгруппа Q из H_q не максимальна в H, поэтому $Q \subseteq N \subset H$ для некоторой F-субнормальной в G подгруппы N. Так как N – абелева $\pi(F)$-группа, то $N \in F$. Значит, Q оказывается F-субнормальной в G. По теореме 1.1, $QG_p \in F$. Мы получаем, что G – группа типа 3).

1.2. Рассмотрим теперь случай $\pi(G) = \{p, q, r\}$. Тогда ясно, что H – холлова подгруппа в G; будем полагать, что $|H|$ делится на p и q. Пусть G_p, G_q и G_r – попарно перестановочные силовские подгруппы из G такие, что $H = G_p G_q$. Так как $G_p = H^F \subseteq G^F$ и $HG^F = G$, то $G_p G_r = G^F$. Рассмотрим максимальную подгруппу M из G, содержащую $G_q G_r$. Если G_q не максимальна в M, то ввиду условия $G_q \subseteq N \subseteq M$, где N – F-субнормальная собственная подгруппа группы G, а значит, $NG^F \neq G$, что противоречит равенству $G_q G^F = G$. Значит, G_q максимальна в M и поэтому $M = G_q G_r$, где $G_r M$, так как $G_r = G^F \cap M$. Понятно, что содержащаяся в G^F минимальная нормальная подгруппа группы G совпадает либо с G_p, либо с G_r. Пусть T – максимальная подгруппа из G, содержащая $G_p G_r$. Так как H – группа Миллера-Морено, то холлова

$\{p,q\}$-подгруппа из T нильпотентна. Таким образом, если G_rG, то T p-нильпотентна и $|G:T|=q$. Если G_r не максимальна в G_qG_r, то существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $G_r \subseteq N \subseteq G_qG_r$. Тогда G_r H-субнормальна в G, где H – формация всех p-нильпотентных групп, а G_pG_r p-нильпотентна по теореме 1.1, т. е. $G_r \triangleleft G$. Следовательно, если G_r не нормальна в G, то $|G_p|=q$, $T=G_pG_r$ максимальна в G и G_pG. В любом случае, силовская q-группа T_q из T нормальна в G. Пусть R – еще одна максимальная подгруппа индекса q. Тогда $R_q=T_q$, так как G_q циклическая. Понятно теперь, что T и R сопряжены. Итак G – группа типа 6).

2. Теперь будем полагать, что каждая F-абнормальная максимальная подгруппа группы G p-нильпотентна. Тогда G – группа одного из типов 1)–3) леммы 2.3. Если G – группа типа 1), то доказывать нечего. Пусть G – группа типа 3), т. е. $\pi(G)=\{p,q\}$, $G=P_1(G_qP_2)$, где $P_1P_2=G_p$, $|P_2|=p$, $\Phi(G_q)G$, G_q циклическая, а P_1 – минимальная нормальная подгруппа в G. Заметим, что G q-сверхразрешима. Пусть M – максимальная подгруппа группы G. Если M содержит G_q^x и не содержит P_1, то $M=N_G(G_q^x)$. Если M содержит G_q^x и P_1, то $M=P_1G_q^x$. А если M содержит G_p^x, то $|G:M|=q$ и $M=G_p^x\Phi(G_q)$. Таким образом, G имеет точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются P_1G_q, P_2G_q и $G_p\Phi(G_q)$. Значит, в этом случае группа G – группа типа 4). Пусть $|\pi(G)|\leq 3$ и G_p – минимальная нормальная подгруппа в G. Рассмотрение этого случая разобьем на две части: $|\pi(G)|=2$ и $|\pi(G)|=3$.

2.1. Пусть вначале $\pi(G)=\{p,q\}$. Пусть $G=G_pG_q$. Очевидно, $G_p=G^F$. Предположим, что G_p имеет максимальную подгруппу Q, являющуюся F-субнормальной в G. По теореме 1.1, $QG_p \in F$. Очевидно, $Q \triangleleft G$. Ясно, что любая максимальная подгруппа из G_p, отличная от Q, не является F-субнормальной в G. Если G_p – циклическая, то G – группа типа 1). Поэтому считаем, что G_p – нециклическая. Пусть Q_1 – максимальная подгруппа из G_q, отличная от Q. Рассмотрим подгруппу $M=G_pQ_1$, являющуюся F-субнормальной в G. Так как Q_1 не F-субнормальна, то $M \notin F$. Пусть M^* – F-абнормальная максимальная подгруппа из M. Так как $M^F \subseteq G_p$, то $|M:M^*|$ – степень p, т. е. Q_1 содержится в подгруппе, сопряженной с M^* в M. Будем считать, что $M^* \supseteq Q_1$. Силовская p-подгруппа M_p^* из M^* нормальна в M^* и в M_p^*Q, т. е. M_p^* нормальна в G. Но G_p –минимальная нормальная подгруппа. Поэтому M^* – q-группа, т. е.

$M^* = Q_1$ максимальна в M. По лемме 1.4, каждая собственная подгруппа из Q_1 будет F-субнормальной в G (мы применяем утверждение 2) леммы 1.4, для случая $H = G_q$). Теперь по лемме 1.5, M является минимальной не F-группой, откуда следует, что M – группа Миллера-Морено, т. е. G – группа типа 2). Предположим теперь. что любая максимальная подгруппа из G_q не является F-субнормальной в G. Пусть $M = G_pQ$ – максимальная подгруппа из G, причем $Q \subset G_q$. Подгруппа M не принадлежит F, иначе Q была бы F-субнормальной. Если Q максимальна в M, то M – группа Миллера-Морено. Если Q не максимальна в M, то Q строго содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. Подгруппа M_1 не p-нильпотентна, так как в противном случае $N_G(Q) \supseteq \langle G_q, M_1 \rangle = G$, что противоречит тому, что Q не F-субнормальна. Итак, $M = G_p\,Q \notin F$, в M существует не p-нильпотентная F-абнормальная максимальная подгруппа, $\pi(M) = \{p,q\} \subseteq \pi(F)$. Но этот случай уже рассмотрен, т. е. M – группа типа 3) нашей теоремы. Таким образом, максимальная подгруппа Q_1 из Q нормальна в G. Рассмотрим группу G/Q_1, ее порядок равен $|G_p| \cdot q^2$. Понятно, что если A_1/Q_1 и A_2/Q_2 – две различные подгруппы из G/Q, то $A_1 \cap A_2 G$, и значит, $A_1 \cap A_2 = Q$, так как каждая максимальная подгруппа из G_q не нормальна в G. Следовательно, G/Q_1 – группа Фробениуса с циклической подгруппой G_q/Q_1 порядка q^2. Так как $Q_1 \subseteq \Phi(G_q)$, то получается, что G_q циклическая. Так как $M = G_pQ$ – единственная максимальная подгруппа, содержащая G_p, то $Q_1 = \Phi(G)$. Итак, G – группа типа 5).

2.2. Пусть теперь $\pi(G) = \{p,q,r\}$. По лемме 2.3, G_p – минимальная нормальная подгруппа группы G. Если собственная подгруппа S из $G_{p'}$ не является максимальной в $G_{p'}$, то по условию, существует F-субнормальная в G p'-группа N, содержащая S. По теореме 1.1, $NG_p \in F$, а значит, $NG_p = N \times G_p$. Итак, каждая собственная немаксимальная подгруппа из $G_{p'}$ поэлементно перестановочна с G_p. Так как G не p-нильпотентна, то ясно, что силовская q-подгруппа G_p и силовская r-подгруппа G_r из $G_{p'}$ не могут одновременно быть не максимальными в $G_{p'}$, т. е. либо обе они максимальны в $G_{p'}$, либо только одна из них максимальна в $G_{p'}$. Эти два случая мы рассмотрим.

2.2.1. Пусть G_p максимальна в $G_{p'}$. Тогда, как отмечалось, G_pG_r нильпотентна, а G_pG_q ненильпотентна. Пусть Q – произвольная максимальная подгруппа из G_q. Тогда Q не максимальна в $G_{p'}$ и, по условию, содержится в некоторой F-субнормальной p'-подгруппе, которая, по теореме 1.1, будет поэлементно перестановочна с G_p. Отсюда следует, что G_pG_q – группа Миллера-Морено. Если G_q нормальна в $G_{p'}$, то $|G_r|=r$. Пусть M – максимальная подгруппа из $G_{p'}$, содержащая G_r. Каждая собственная подгруппа из M, как отмечалось, поэлементно перестановочна с G_p. Значит, каждая собственная подгруппа из G_pM будет p-нильпотентна. Но $G_r \neq M$. Поэтому G_pM не может быть группой Шмидта. Значит, G_pM p-нильпотентна и $C_G(G_p)=G_pM$ $G_p \times G$. Значит, MG. Получается, что каждая максимальная подгруппа из $G_{p'}$ нормальна в $G_{p'}$, т. е. $G_{p'}$ нильпотентна. Итак, если G_q нормальна в $G_{p'}$, то G – группа типа 6).

Пусть теперь G_p не нормальна в $G_{p'}$. По теореме Бернсайда, $G_{p'}$ q-нильпотентна, т. е. $G_rG_{p'}$. Учитывая, что G_pG_r нильпотентна, получаем, что G_r нормальна в G, т. е. G оказывается группой типа 6).

2.2.2. Пусть теперь подгруппы G_q и G_r являются максимальными в G. Тогда одна из них нормальна в $G_{p'}$. Пусть $G_rG_{p'}$. Тогда $|G_q|=q$. В этом случае G_pG_q, G_pG_r и G_qG_r – максимальные подгруппы в G. Если одна G_pG_q, G_pG_r нильпотентна, то G – группа типа 6). Предположим, что G_pG_q и G_pG_r не нильпотентны. Поскольку каждая собственная подгруппа из G_r поэлементно перестановочна с G_p, а подгруппа G_pG_r ненильпотентна, то G_r является циклической. Но тогда $|G_r|=r$, так как G_q максимальна в сверхразрешимой подгруппе G_qG_r. Рассмотрим подгруппу G_pG_r. Так как $N_G(G_r)=G_{p'}$, то $N_{G_pG_r}(G_r)=G_r$. Если G_r максимальна в G_pG_r, то G_pG_r – группа Миллера-Морено. Пусть G_r не максимальна в G_pG_r. Так как $G_pG_pG_r$ и $G_r \in F$, то F-корадикал подгруппы G_pG_r является неединичной p-группой. Ясно, что G_r содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе M из G_pG_r, причем $M \notin F$, так как G_r самонормализуема в G_pG_r. Мы видим, что G_pG_r – группа типа 3).

Возможны два случая: G_q нормальна в $G_{p'}$ и G_q ненормальна в $G_{p'}$.

Пусть G_q не нормальна в $G_{p'}$. Если $G_q=N_G(G_q)$, то G – группа Фробениуса с нильпотентной нормальной подгруппой G_pG_r, что противоречит нашему допущению. Пусть $N_G(G_q)=P_1 \times Q$, где $P_1 \neq 1$, $P_1N_G(G_q)$. Так как G_p элементарная абелева, то существует такая p-подгруппа P, что

$G_pG_q = PN_G(G_q)$. Мы видим, что G_pG_q – группа типа 4), а сама G – группа типа 7).

Предположим теперь, что G_q нормальна в $G_{p'}$, т. е. G_qG_r нильпотентна и имеет порядок qr. Очевидно, что в этом случае G является группой Фробениуса с ядром G_p, а G_pG_r – группа типа 3), либо группа Миллера-Морено. Рассмотрим G_pG_q. Если G_q максимальна в G_pG_q, то G_pG_q – группа Миллера-Морено. Пусть G_q не максимальна в G_pG_q. Так как $(G_pG_q)^F \subseteq G_p$, то G_q содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе H из G_pG_q, причем $H \notin F$, так как G_q самонормализуема в G_pG_q. Получается, что G_pG_q – группа типа 3). В этом случае G оказывается группой типа 8).

Примеры

Приведем примеры, показывающие, что классы групп, перечисленные в теоремах 2.1 и 2.2, не пусты.

ПРИМЕР 3.1. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная формация p-нильпотентных групп, что $\pi(F)$ не совпадает с множеством всех простых чисел. Пусть q – любое простое число, не входящее в $\pi(F)$. Тогда всякая группа порядка p_1q, где p_1 – любое простое число, является группой типа 1), а всякая группа порядка q или q^2 является группой типа 3) теоремы 2.1. Предположим, что $F \neq$ и существует такое простое число $p_1 \in \pi(F)$, что $q^2 \equiv 1 \pmod{p_1}$ и $q \not\equiv 1 \pmod{p_1}$ (в частности, можно взять $q = 5$ и $p_1 = 3$). В сплетении $Q \wr P_1$ группы Q порядка q с группой P_1 порядка p_1 возьмем подгруппу Шмидта G. Тогда G имеет порядок p_1q^2 и является группой типа 2) теоремы 2.1.

ПРИМЕР 3.2. Пусть $\{p,q\} \subseteq \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Будем считать, что p и q таковы, что $p^2 \equiv 1q$, но $p \not\equiv 1q$. Так же, как и в примере 3.1, строим группу Шмидта H порядка p^2q. По теореме 1.4, существует группа Шмидта G порядка p^3q. Очевидно, $|\Phi(G)| = p$. Таким образом, группы G и H – группы типа 1) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.3. Пусть $\{p,q\} \subseteq \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Будем считать, что $q \equiv 1p$. Пусть H – неабелева группа порядка pq. Тогда $H = PQ$, где PH, $|P| = p$, $|Q| = q$. Рассмотрим группу $G = H \times Q_1$, где $|Q_1| = q$. Ясно, что $G^F = P$, $C_G(P) = P \times Q_1$. Таким образом, G – группа типа 2) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.4. Пусть $p \in \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Пусть P – циклическая группа порядка p^2, Q – такая подгруппа из $\mathrm{Aut}(P)$, что $|Q| = q$ – простое число, делящее $p-1$ и входящее в $\pi(F)$. Пусть $G = PQ$. Так как P циклическая, то из теоремы 1.5 вытекает, что $Q = C_G(Q)$ и $P = [P,Q]$. Отсюда следует, что $P = G^F$ – F-нормальная нильпотентная максимальная подгруппа, а любая подгруппа порядка pq является группой Миллера-Морено. Значит, G – группа типа 3) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.5. Пусть P_1 – нециклическая группа порядка p^2, A – неабелева неприводимая группа автоморфизмов порядка pq группы P_1, где p и q – простые числа из $\pi(F)$, F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Тогда $G = P_1P_2G_q$, где $P_2G_q = A$ – группа типа 4) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.6. Пусть P – группа порядка $p > 2$ такая, что $\mathrm{Aut}(P)$ имеет силовскую q-подгруппу Q порядка q^2. Пусть $\{q,p\} \subseteq \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Тогда $G = PQ$ – группа типа 5) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.7. Пусть p и r – нечетные простые числа, G_p – группа простого порядка p, G_r – группа порядка r. В $\mathrm{Aut}(G_p \times G_r)$ существует элемент α порядка 2, который действует нетривиально на G_p и G_r. Циклическую группу G_2 порядка 4 превратим в группу операторов группы $G_p \times G_r$ с помощью гомоморфизма $G_2 \to \langle \alpha \rangle$ с ядром порядка 2. Пусть $G = (G_p \times G_r)G_2$. Очевидно, что G_pG_2 и G_rG_2 – группы Миллера-Морено, а $G_pG_r\Phi(G_2)$ – нильпотентная максимальная подгруппа. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, что $\{2,p,r\} \subseteq \pi(F)$. Тогда группа G – группа типа 6) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.8. Пусть p, q, r – различные простые числа и порядок p по модулю r равен 3. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, что $\{p,q,r\} \subseteq \pi(F)$. Пусть $G = P_1P_2G_q$ – группа из примера 3.5. Допустим, что существует неабелева группа автоморфизмов G_rG_q порядка rq группы G_p. Тогда G_pG_r – группа Миллера-Морено. Ясно, что группа $G_pG_rG_q$ – группа типа 7) теоремы 2.2. Эта ситуация реализуется, например, в случае $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$.

ПРИМЕР 3.9. Пусть G_p – группа простого порядка p. Тогда $\mathrm{Aut}(G_p)$ имеет порядок $p-1$, и можно подобрать p так, что в ней найдется подгруппа $G_q \times G_r$ порядка qr, где q и r – различные простые числа. Рассмотрим группу $G = G_p(G_q \times G_r)$. Подгруппа G_qG_r будет максимальной самонормализуемой подгруппой, а подгруппы G_pG_q и G_pG_r – максимальными подгруппами Миллера-Морено. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, что $\{p,q,r\} \subseteq \pi(F)$. Тогда группа G – группа типа 8) теоремы 2.2.

Литература

1. Пылаев, В. В. Конечные группы с плотной системой субнормальных подгрупп/ В. В. Пылаев // Исследования по теории групп, Институт мат-ки АН УССР, Киев. – 1975. – С.197–217.

2. Закревская, Л. Н. Конечные группы с плотной системой F-субнормальных подгрупп / Л. Н. Закревская // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп, Наука и техника. – Минск, 1984. – С. 71–88.

3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 901 с.

4. Шеметков, Л. А. Формации алгебрачеких систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 256 с.

5. Hawkes, T. O. On formation subgroups of a finite soluble group / T. O. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1968. – № 2. – С. 243–250.

6. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

7. Семенчук, В. Н. Минимальные не F-группы / В. Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – № 3.– С. 348–382.

8. Гольфанд, Ю. А. О группах, все подгруппы которых специальные / Ю. А. Гольфанд // Докл. АНСССР. – 1948. – № 8. – С. 1313–1315.

9. Rédei, L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen / L. Rédei // Publ. Math. Debrecen. – 1965. – № 4. – С. 303–324.

10. Huppert, B. EndlicheGruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer-Verlag, 1967. – 808 с.