РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ **ПРИ** ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ **ПЕРЕМЕННОЙ**

*О.В. **Веко**, **О.**В. Старовойтова (УО МГПУ им. И.П. Шамякина)*
Научный руководитель – О.В. Старовойтова, ассистент

Интегрирование функций одной переменной – один из самых важных и основных разделов в математическом анализе. Основная задача при нахождении интеграла функции одной переменной – это правильно выбрать метод интегрирования. Существует достаточно много методов интегрирования: непосредственное интегрирование функций, метод введения новой переменной, метод занесения функции под знак дифференциала, интегрирование по частям и т. д. Однако есть функции, нахождение интегралов от которых можно вычислять различными способами. В этом случае важно не только найти значение интеграла, но и использовать при этом наиболее рациональный метод.

Рассмотрим на примере нахождения интеграла вида $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$.

1. С помощью метода интегрирования по частям:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\begin{vmatrix} u=\sqrt{4-x^2} & du=\dfrac{-x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} \\ dv=dx & v=x\end{vmatrix}=x\sqrt{4-x^2}+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{4-x^2}-\int\frac{(-x^2+4-4)dx}{\sqrt{4-x^2}}=x\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}\,dx+\int\frac{4\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=x\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}\,dx+4\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

Перенеся $-\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ в левую часть, получим: $2\int\sqrt{4-x^2}\,dx=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin - +$, откуда получаем:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

Видим, что вычисление интеграла свелось к решению уравнения.

2. Как интеграл от дифференциального бинома:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\begin{vmatrix} 4-x^2=t^2x^2; & x=\sqrt{\dfrac{4}{1+t^2}}; \\ dx=-\dfrac{2t\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^2}dt & \end{vmatrix}=\int\sqrt{t^2x^2}\left(-\frac{2t\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^2}\right)dt=\int t\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{2t\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^2}\right)dt=-4\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

С помощью данной замены мы осуществили переход подынтегральной функции от иррациональной функции к дробно-рациональной. Для того чтобы решить $\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$, рассмотрим табличный интеграл $\int\frac{dt}{(1+t^2)}$ и для его решения воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int\frac{dt}{1+t^2}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+t^2}=u & dt=dv \\ -\dfrac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}=du & t=v\end{vmatrix}=\frac{t}{1+t^2}+\int\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,t\,dt=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Получили: $\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt \qquad arctgt=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$.

Получили: $\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{1}{2}(arctgt-\frac{t}{1+t^2})$.

Тогда искомый интеграл: $\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\ 4\cdot\frac{1}{2}(arctgt-\frac{t}{1+t^2})+C=-2(arctgt-\frac{t}{1+t^2})+C$, где $t=\sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}}$.

Видим, при вычислении интеграла сочетали различные подходы: метод замены, метод интегрирования по частям и т.д.

3. С помощью тригонометрической замены переменной:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\begin{vmatrix} x=2\sin t \\ dx=2\cos t\,dt \\ \cos t=\sqrt{4-x^2}\end{vmatrix}=\int 2\sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\,dt=\int 4\cos^2 t\,dt==4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2\int dt+2\int\cos 2t\,dt=2t+\sin 2t+C=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+\sin(2\arcsin\frac{x}{2})+C.$$

Данный метод является более компактным. Однако он требует знания тригонометрических формул.

Анализируя все три подхода при вычислении интеграла, можно сделать вывод, что первые два подхода являются громоздкими, а наиболее рациональным методом интегрирования в данном случае является метод интегрирования с помощью тригонометрической замены переменной.