

УДК 378.016:517

С. В. Игнатович

**ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ,  
ДОПУСКАЕМЫЕ СТУДЕНТАМИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРЕДЕЛОВ**

*В данной статье рассмотрены результаты эксперимента, проводимого в рамках исследования проблемы предупреждения математических ошибок студентов, а именно: основные ошибки, допускаемые студентами при вычислении пределов в курсе высшей математики, причины этих ошибок, а также приведены те условия, при которых в процессе обучения возможно в некоторой степени предупредить появление этих ошибок в решениях студентов.*

*Методы исследования, использованные при получении указанных результатов – анализ анкетирования, тестирования, самостоятельных и контрольных работ, индивидуальных семестровых заданий, коллоквиумов, проводимых среди студентов физико-математического факультета, факультета технологии, инженерно-педагогического факультета УО МГПУ им. И. П. Шамкина.*

**Введение**

Усвоение математических знаний студентами очень часто сопровождается многочисленными ошибками вследствие действий различных факторов, которые не всегда возможно учесть в процессе обучения. Совершенствование программ и методов обучения, как показывает практика, не искореняет автоматически математические ошибки как в устных ответах студентов, так и в самостоятельно решаемых задачах. Вот почему эта проблема в настоящее время требует пристального внимания ученых, методистов, преподавателей высших учебных заведений, а также учителей школ.

В научных трудах психологов и педагогов достаточно глубоко проанализированы математические ошибки школьников, а также причины их возникновения и способы их предупреждения (Ж. Адамар [1], А. К. Артемов [2], В. П. Беспалько [3], Ю. М. Колягин [4], В. А. Крутецкий [5], О. Н. Пирютко [6], А. Д. Семушин [7], Г. Штейнгауз [8]). Многие диссертационные исследования посвящены этой проблеме (Д. С. Ангелов [9], Р. А. Асанов [10], Г. В. Григорян [11], Л. С. Иванова [12], И. М. Кириллицкий [13], А. Т. Муханов [14], М. Н. Чукотаев [15]). Однако при этом исследования математических ошибок студентов, на наш взгляд, являются недостаточными.

Деятельность преподавателя, направленная на получение прогноза ошибок студентов при изучении той или иной темы и предупреждение этих ошибок в будущем, имеет в настоящее время, когда перед всеми отраслями науки и производства стоят задачи повышения качества, огромное значение. Предвидение преподавателем трудностей усвоения студентами учебного материала, в том числе математических ошибок, допускаемых студентами, дает большие возможности в выборе эффективных методов сообщения новых знаний, в разработке методических приемов, способствующих предупреждению возможных затруднений.

**Результаты исследования и их обсуждение**

В разделе математического анализа «Введение в анализ» у многих студентов возникают трудности при изучении темы «Пределы». В процессе вычисления пределов допускаются масса ошибок, которые обусловлены как слабой школьной математической подготовкой студентов, так и их низким уровнем знаний материала высшей математики. Большая часть ошибок допускается из-за незнания формул и правил (особенно из-за незнания формул сокращенного умножения). Очень многие ошибки допускаются также из-за неумения самостоятельно применять известные формулы и правила на практике, из-за неточного использования алгоритмов решения данной задачи. Зачастую студенты пренебрегают проверкой наличия в данном пределе той или иной неопределенности, формально используют замены эквивалентных бесконечно малых функций между собой. Также большое число ошибок допускается из-за невнимательности и поспешности принятия решения (см. таблица, примеры 9, 10, 15).

Среди наиболее распространенных ошибок, причинами которых является недостаточное знание школьного курса математики, следует отметить ошибки в тождественных преобразованиях. Наиболее типичными из них являются следующие ошибки:

1. Ошибки, допускаемые при действиях с многочленами:
  - ошибки, допускаемые при раскрытии скобок, в случае, если перед скобками стоит знак «минус» (см. таблица, примеры 4, 12);
  - ошибки при разложении многочленов на множители (см. таблица, примеры 1, 2);
  - ошибки в применении формул сокращенного умножения (см. таблица, примеры 5–8, 13).

2. Ошибки, допускаемые в действиях с алгебраическими дробями:

– ошибки при сокращении дробей, самая распространенная среди которых – это сокращение на слагаемое (см. таблица, пример 3);

– ошибки при сложении алгебраических дробей (см. таблица, примеры 4, 12).

К типичным ошибкам, которые допускаются по причине слабых знаний высшей математики, относятся следующие:

1) неверный выбор метода избавления от неопределенности (см. таблица, примеры 9, 10, 13);

2) неправильное использование замечательных пределов (см. таблица, примеры 11, 12);

3) неграмотное использование замен эквивалентных бесконечно малых функций, т. е. использование этих замен без предварительной проверки того, являются ли функции бесконечно малыми в данном примере и возможно ли вообще осуществление такой замены (см. таблица, пример 14);

4) нарушение алгоритма вычисления пределов (см. таблица, пример 11, 12).

Приведем примеры наиболее часто встречающихся ошибок, которые допускают студенты при самостоятельном решении пределов, а также отметим причины этих ошибок (см. таблица).

Таблица

Пример 1	
1	2
Найти	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x^2)(x-1)}{(x^3 + x^2)(x-1)}$
Причина ошибки	Низкий уровень умений разлагать на множители многочлены способом группировки
Пример 2	
Найти	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{(x+1)}$
Причина ошибки	Неверное разложение квадратного трехчлена на множители, т. е. неправильно использована формула $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Пример 3	
Найти	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{5x - 1}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{5x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 3}{5 - 1}$
Причина ошибки	Низкий уровень умений выполнять действия с дробями, в частности, неумение сокращать дроби
Пример 4	
Найти	$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{6}{x - 3} \right)$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{6}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{6(x+3)}{(x-3)(x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - 6x + 18}{(x-3)(x+3)}$
Причина ошибки	1. Низкий уровень умений выполнять арифметические действия с дробями, в частности, неверное сложение дробей. 2. Низкий уровень умений выполнять раскрытие скобок в математических выражениях, если перед скобками стоит знак «минус»

Продолжение таблицы

Пример 5	
1	2
Найти	$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2 - 10x + 100)}{x(x^2 - 20x + 100)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Пример 6	
Найти	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x(x-3)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Пример 7	
Найти	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Пример 8	
Найти	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{x(x-5)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Пример 9	
Найти	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}$
Причина ошибки	Неверно выбран метод избавления от неопределенности вида $\frac{0}{0}$
Пример 10	
Найти	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8 - 12} - 3}{4 + 5x^4}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8 - 12} - 3}{4 + 5x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^8 - 12} - 3)(\sqrt{x^8 - 12} + 3)}{(4 + 5x^4)(\sqrt{x^8 - 12} + 3)}$
Причина ошибки	Неверно выбран метод избавления от неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Продолжение таблицы

Пример 11	
1	2
Найти	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x+3} \right)^x$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3+x-2}{x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x-2}{x+3} \right)^x$
Причина ошибки	Использование второго замечательного предела без предварительной проверки наличия неопределенности вида $1^\infty$
Пример 12	
Найти	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{9x+2} \right)^{x^2}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{9x+2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9x+2-6x-3}{9x+2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{6x-3}{9x+2} \right)^{x^2}$
Причина ошибки	1. Использование второго замечательного предела без предварительной проверки наличия неопределенности вида $1^\infty$ 2. Низкий уровень умений выполнять действия с дробями
Пример 13	
Найти	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 4 - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} x$
Причина ошибки	1. Возведение числителя и знаменателя в квадрат. 2. Неверное применение формулы сокращенного умножения $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Пример 14	
Найти	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \cos x}{\pi - 4x}$
Причина ошибки	1. Отсутствие предварительной проверки того факта, являются ли функций $x$ и $\sin x$ бесконечно малыми при $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 2. Неправильное использование замены эквивалентных бесконечно малых функций
Пример 15	
Найти	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \sqrt[3]{1-x^3} \right)$
Ошибки	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \sqrt[3]{1-x^3} \right) = \infty + \infty = \infty$
Причина ошибки	Невнимательность при проверке наличия неопределенности

**Выводы**

Результаты анкетирования, тестирования, самостоятельных и контрольных работ, индивидуальных семестровых заданий, коллоквиумов, проводимых нами среди студентов физико-математического факультета, факультета технологии, инженерно-педагогического факультета УО «МГПУ им. И. П. Шамякина», показали, что 10,5% студентов допускают ошибки из-за нарушения

алгоритмов решения пределов; 6,6% – при раскрытии скобок; 5,3% – при разложении многочленов на множители; 9,2% – при сокращении дробей; 5,2% – при сложении (вычитании) дробей; 22,4% – при применении формул сокращенного умножения; 19,7% – неграмотно используют замечательные пределы; 27,6% – неверно выбирают метод избавления от неопределенностей. Педагогический опыт позволяет нам сделать вывод, что число математических ошибок значительно снижается, если в процессе обучения математики систематически учитывать следующие условия:

1. глубокое и прочное усвоение математической теории;
2. методику контроля и учета знаний;
3. тесную связь теории с практикой;
4. периодическое повторение и закрепление ранее пройденного учебного материала при изучении новых тем;
5. владение математической речью;
6. аккуратность в записях;
7. уверенность в знаниях;
8. предупреждение учащихся о наиболее часто встречающихся ошибках.

#### Литература

1. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изображения в области математики / Ж. Адамар. – М. : Советское радио, 1970. – 152 с.
2. Артемов, А. К. Об одной причине ошибок школьников по геометрии / А. К. Артемов // Математика в школе. – 1963. – № 6. – С. 23–25.
3. Беспалько, В. П. Основы теории педагогических систем / В. П. Беспалько. – Воронеж : Изд. ВГУ, 1977. – 198 с.
4. Колягин, Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1975. – 462 с.
5. Крутецкий, В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1969. – 432 с.
6. Пирютко, О. Н. Математика: типичные ошибки на централизованном тестировании и экзамене / О. Н. Пирютко. – 2-е изд. – Минск : Аверсэв, 2006. – 192 с.
7. Семушин, А. Д. Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математики / А. Д. Семушин. – М. : Просвещение, 1978. – 64 с.
8. Штейнгауз, Г. Сто задач / Г. Штейнгауз; пер. с пол. Г. Ф. Боярской, Б. В. Боярского. – 4-е изд. – М. : Наука, 1986. – 144 с.
9. Ангелов, Д. С. Анализ ошибок по алгебре в знаниях учащихся и пути их устранения : автореф. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Д. С. Ангелов. – М., 1980. – 15 с.
10. Асанов, Р. А. Работа над ошибками в курсе математики средней школы как путь повышения качества знаний учащихся : автореф. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Р. А. Асанов. – Ташкент, 1975. – 23 с.
11. Григорян, Г. В. Исследование причин возникновения и методика предупреждения ошибок учащихся: (на геометрическом материале 4–5 классов) : автореф. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Г. В. Григорян. – Баку, 1981. – 20 с.
12. Иванова, Л. С. Методика предупреждения типичных математических ошибок учащихся начальных классов : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Л. С. Иванова. – Киев, 1987. – 172 с.
13. Кирилецкий, И. М. Анализ и предупреждение типичных ошибок учащихся при изучении алгебры и начал анализа : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / И. М. Кирилецкий ; НИИ педагогики УССР. – Киев, 1986. – 19 с.
14. Муханов, А. Т. Пути предупреждения устойчивых ошибок в математической подготовке выпускников средней школы : автореф. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / А. Т. Муханов. – Ташкент, 1975. – 27 с.
15. Чукотаев, М. Н. Устойчивые ошибки учащихся по алгебре и началам анализа и способы их устранения : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / М. Н. Чукотаев ; Мос. пед. гос. ун-т им. В. И. Ленина – М., 1992. – 15 с.

#### Summary

In the given article the main mistakes made by students while calculating limits in a course of higher mathematics, the reasons of these mistakes are considered, and also the conditions at which it is possible, to a certain extent, to prevent the appearance of these mistakes in students' solutions during a study process are given.

Поступила в редакцию 20.11.07.