

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ АКУСТООПТИКИ

Хлебович Н.М. (УО МГПУ им. И. П. Шамякина, г. Мозырь)

Научный руководитель – Г.В. Кулак, д-р физ.-мат. наук, профессор

При акустооптическом взаимодействии мощных световых пучков с ультразвуком нелинейные свойства среды могут существенно повлиять на характеристики дифрагированных волн [1]. Рассмотрим условия существования периодических решений задач акустооптики, сводящихся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с малым параметром, т. е. к уравнению [2]:

$$\ddot{\psi} = f(x, \psi, \dot{\psi}, \mu), \quad (1)$$

где функция f удовлетворяет условиям теоремы об аналитической зависимости решения от параметра μ при малых по модулю значениях μ . Предполагается, что функция f явно зависит от x (пространственная нормированная координата) и имеет период 2π . Допускается, что порождающее уравнение (1) (при $\mu=0$) имеет единственное решение $\psi = \varphi_0(x)$ периода 2π . Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям: $\psi(x_0) = \varphi_0(x_0) + \beta_0, \dot{\psi}(x_0) = \dot{\varphi}_0(x_0) + \beta_1$ обозначим как $\psi(x, \mu, \beta_0, \beta_1)$. Тогда β_0, β_1 - отклонения начальных значений решения $\psi(x, \mu, \beta_0, \beta_1)$ и его производной $\dot{\psi}(x, \mu, \beta_0, \beta_1)$ от начальных значений $\varphi_0(x_0), \dot{\varphi}_0(x_0)$ периодического решения порождающего уравнения. Тогда удовлетворяются следующие условия:

$$\Phi_0(\mu, \beta_0, \beta_1) \equiv \psi(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - \psi(0, \mu, \beta_0, \beta_1) = 0,$$

$$\Phi_1(\mu, \beta_0, \beta_1) \equiv \dot{\psi}(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - \dot{\psi}(0, \mu, \beta_0, \beta_1) = 0. \quad (1)$$

В соответствии с теоремой А. Пуанкаре [2] о неявных функциях, 2π -периодическое решение уравнения (1) существует, если следующий якобиан не равен нулю:

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \neq 0, \quad (2)$$

который находится при $\mu = 0, \beta_0 = \beta_1 = 0$. Тогда для каждого малого μ существует единственное периодическое решение уравнения $\ddot{\psi} = f(x, \psi, \dot{\psi}, \mu)$, описывающего большинство нелинейных задач акустооптики.

Литература

1. Кулак, Г.В. Акустооптика гиротропных монокристаллов и оптических волноводов / Г.В. Кулак. – Минск : Издательский Центр БГУ, 2014. – 206 с.

2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1965. – 424 с.

МГТУ им. И.П.Шамякина