

СЕЛЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОБЪЕМНОЙ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ГОЛОГРАММЫ, СФОРМИРОВАННОЙ В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ КЛАССА СИММЕТРИИ 23

В.Н. Навыко

В работе представлена математическая модель для расчета угловой и спектральной селективности объемной отражательной голограммы, сформированной в фоторефрактивном кристалле класса симметрии 23, с учетом линейного электрооптического, фотоупругого, обратного пьезоэлектрического эффектов и оптической активности. Найдено аналитическое решение уравнений связанных волн в приближении неистощимости опорной волны для кубического оптически активного кристалла произвольного среза.

Ключевые слова: фоторефрактивный кристалл, отражательная голограмма, селективность, пьезоэлектрический эффект, дифракционная эффективность.

Введение. Кубические фоторефрактивные кристаллы со структурой силленита ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$) обладают естественной оптической активностью. Поэтому для моделирования распространения и дифракции световых волн на отражательной голографической решетке в этих кристаллах воспользуемся волновым уравнением для гиротропных сред [1]:

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - 2 \frac{\omega}{c} \gamma \text{rot } \vec{E} = 0 \quad (1)$$

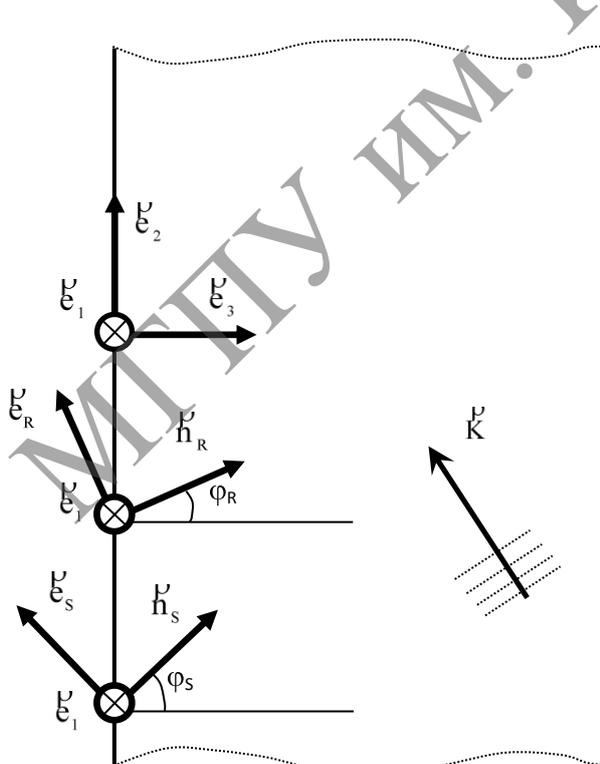


Рисунок 1 – Схема записи объемной голограммы

где \vec{E} – вектор напряженности электрического поля световой волны; $\hat{\varepsilon}$ – тензор диэлектрической проницаемости среды; ω – циклическая частота; c – скорость света в вакууме; γ – параметр гирации; t – время.

На рисунке 1 представлена схема записи объемной голограммы. Сплошные вертикальные линии обозначают границы фоторефрактивного кристалла, в объеме которого формируется отражательная голограмма с волновым вектором \vec{K} . Ортогональный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ определяет рабочую систему координат. Системы единичных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_R, \vec{h}_R)$ и $(\vec{e}_1, \vec{e}_S, \vec{h}_S)$ (рисунок 1) предназначены для задания азимута линейной поляризации опорной (R) и предметной (S) волн, соответственно.

Модуляция отражательной голографической решетки может быть выражена следующим соотношением:

$$\Psi_R = -\Psi_S + \rho d, \quad (2)$$

где Ψ_R, Ψ_S – азимуты поляризации опорной и предметной волн; ρ – удельное вращение кристалла; d – толщина кристалла.

Равенство (2) удовлетворяется при каждой толщине кристалла d , и именно при выполнении такого соотношения азимуты линейной поляризации опорной и предметной световых волн дифракционная эффективность и коэффициент усиления отражательной голографической решетки достигают максимальных значений.

Эффективное считывание объемной голограммы достигается при выполнении условия фазового синхронизма (условие Брэгга):

$$\vec{k}_{SB} = \vec{k} + \vec{k}_{RB} \quad (3)$$

где $\vec{k}_{SB}, \vec{k}_{RB}$ – волновые векторы предметной и опорной световых волн на стадии формирования голограммы.

Селективные свойства объемной отражательной голограммы проявляются в случае, если волновой вектор \vec{k}_R считывающей волны удовлетворяет следующему условию:

$$\vec{k}_R = \vec{k}_{RB} + \Delta\vec{k} \quad (4)$$

где $\Delta\vec{k}$ – вектор отстройки волнового вектора считывающей волны от волнового вектора опорной волны \vec{k}_{RB} , удовлетворяющего условию фазового синхронизма (3).

Из волнового уравнения для гиротропных сред (1) с учетом соотношений (2–4) в приближении медленно меняющихся амплитуд получена система уравнений, которая в общем случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dR_{\perp}}{dz} &= i\tau_{11}R_{\perp} + i\tau_{12}R_{\parallel} + ie^{-i\delta}(\kappa_{11}S_{\perp} + \kappa_{12}S_{\parallel}) + \rho_R R_{\parallel}, \\ \frac{dR_{\parallel}}{dz} &= i\tau_{21}R_{\perp} + i\tau_{22}R_{\parallel} + ie^{-i\delta}(\kappa_{21}S_{\perp} + \kappa_{22}S_{\parallel}) - \rho_R R_{\perp}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{dS_{\perp}}{dz} = i\tau_{31}S_{\perp} + i\tau_{32}S_{\parallel} + \Gamma_S S_{\perp} + ie^{i\delta}(\kappa_{31}R_{\perp} + \kappa_{32}R_{\parallel}) + \rho_S R_{\parallel},$$

$$\frac{dS_{\parallel}}{dz} = i\tau_{41}S_{\perp} + i\tau_{42}S_{\parallel} + \Gamma_S S_{\parallel} + ie^{i\delta}(\kappa_{41}R_{\perp} + \kappa_{42}R_{\parallel}) - \rho_S R_{\parallel},$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_1}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \quad \tau_{12} = \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_R}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \quad \tau_{21} = \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_1}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \\ \tau_{22} &= \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_R}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \quad \tau_{31} = \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_1}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \quad \tau_{32} = \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_S}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \\ \tau_{41} &= \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_1}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \quad \tau_{42} = \frac{\pi \langle \Delta\hat{\epsilon}_{e_S}^{0\rho} \rangle}{\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{\pi \langle \mathbf{1} \Delta \hat{\epsilon}_1^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \quad \kappa_{12} = \frac{\pi \langle \mathbf{1} \Delta \hat{\epsilon}_S^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \quad \kappa_{21} = \frac{\pi \langle \mathbf{R} \Delta \hat{\epsilon}_1^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \quad \kappa_{22} = \frac{\pi \langle \mathbf{R} \Delta \hat{\epsilon}_S^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_R)}, \\ \kappa_{31} &= \frac{\pi \langle \mathbf{1} \Delta \hat{\epsilon}_1^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \quad \kappa_{32} = \frac{\pi \langle \mathbf{1} \Delta \hat{\epsilon}_R^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \quad \kappa_{41} = \frac{\pi \langle \mathbf{S} \Delta \hat{\epsilon}_1^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \quad \kappa_{42} = \frac{\pi \langle \mathbf{S} \Delta \hat{\epsilon}_R^p \rangle}{2\lambda n_0 \cos(\varphi_S)}, \\ \Gamma_S &\approx \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \sin \varphi_{RB} \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi_{RB} - \Delta \varphi \right), \quad \rho_R = \frac{\rho}{\cos(\varphi_R)}, \quad \rho_S = \frac{\rho}{\cos(\varphi_S)} \end{aligned}$$

где R_{\perp} , R_{\parallel} , S_{\perp} , S_{\parallel} – комплексные составляющие векторных амплитуд распространяющихся внутри кристалла опорной R и предметной S волн; δ – фазовый сдвиг между голографической решеткой и интерференционной картиной; $\Delta \hat{\epsilon}^0$ – фотоиндуцированное изменение тензора диэлектрической проницаемости кристалла, обусловленное приложением внешнего постоянного электрического поля при наличии голографической решетки;

$\Delta \hat{\epsilon}$ – фотоиндуцированное изменение тензора диэлектрической проницаемости кристалла, обусловленное формированием внутри фоторефрактивного кристалла фазовой отражательной голографической решетки; n_0 – показатель преломления невозмущенного фоторефрактивного кристалла; φ_R и φ_S – углы Брэгга для опорной и предметной волн; λ – длина волны в вакууме. Спектральная отстройка от условия фазового синхронизма (3) учтена в параметре $\Delta \lambda$, а угловая отстройка – в параметре $\Delta \varphi$ [2].

Система уравнений (5) получена в следующем приближении – фазовая структура отражательной голограммы является статической и не возмущается дифракционными процессами (приближение заданной решетки). Приложение внешнего электрического поля имеет место только на стадии считывания голограммы, что приводит к возникновению анизотропии оптических свойств кубических кристаллов, что учтено в слагаемых τ_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2$). Постоянные связи κ_{ij} определяют свойства отражательной голограммы, сформированной в фоторефрактивном кристалле. Предполагается, что рабочие грани кристалла покрыты антиотражающими покрытиями.

Полученная математическая модель обладает большой общностью и пригодна для расчета одновременной дифракции двух электромагнитных волн на голографической решетке, сформированной в фоторефрактивном кристалле. На основании системы уравнений (5) возможен расчет энергетических и поляризационных характеристик восстановленной волны в зависимости от вектора отстройки $\Delta \mathbf{k}^p$ считывающей волны.

Для анализа селективных свойств отражательных голографических решеток, сформированных в кубических оптически активных фоторефрактивных кристаллах, использована следующая система уравнений связанных волн:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} R_{\perp} &= \kappa_1 S_{\perp} - \kappa_2 S_{\parallel} + \rho R_{\parallel}, \\
\frac{d}{dz} R_{\parallel} &= \kappa_2 S_{\perp} - \kappa_3 S_{\parallel} - \rho R_{\perp}, \\
\frac{d}{dz} S_{\perp} &= \kappa_1 R_{\perp} + \kappa_2 R_{\parallel} - i\Gamma S_{\perp} - \rho S_{\parallel}, \\
\frac{d}{dz} S_{\parallel} &= -\kappa_2 R_{\perp} - \kappa_3 R_{\parallel} - i\Gamma S_{\parallel} + \rho S_{\perp},
\end{aligned}
\tag{6}$$

где $\kappa_1 = (\hat{e}_1 \hat{\kappa} \hat{e}_1)$, $\kappa_2 = (\hat{e}_1 \hat{\kappa} \hat{e}_2)$, $\kappa_3 = (\hat{e}_2 \hat{\kappa} \hat{e}_2)$ – постоянные связи, определяющие характер дифракции световых волн на голографической решетке; $\hat{\kappa} = -\frac{\pi n_0^3 E_{SC}}{2\lambda} \hat{b}$.

Схема взаимного расположения ортогонального базиса $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ относительно кристалла и векторов напряженности электрического поля опорной и предметной световых волн приведена на рисунке 2 [3].

Аналитическое решение системы уравнений (6), пригодное для нахождения интенсивности восстановленного предметного светового пучка при угловой и спектральной отстройке от условия фазового синхронизма, было получено в приближении неустойчивости опорной волны и может быть представлено в следующем виде:

$$S_{\perp}^0 = \frac{\frac{iT_1(\rho - \Gamma^2)}{2h_1 e^{-idh_1}} + \frac{iT_2(1 - \Gamma^2)}{-2h_2 e^{-idh_2}} + \rho(\kappa_2 R_{\perp}^0 + \kappa_3 R_{\parallel}^0) + i\Gamma(\kappa_1 R_{\perp}^0 + \kappa_2 R_{\parallel}^0)}{h_1 h_2}, \tag{8}$$

$$S_{\parallel}^0 = \frac{-T_1}{2h_1 e^{-idh_1}} + \frac{T_2}{-2h_2 e^{-idh_2}} + \frac{\rho(\kappa_1 R_{\perp}^0 + \kappa_2 R_{\parallel}^0) - i\Gamma(\kappa_2 R_{\perp}^0 + \kappa_3 R_{\parallel}^0)}{h_1 h_2}, \tag{9}$$

где:

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\Phi + \Gamma \left[S_{\parallel}^d + iS_{\perp}^d \right] + R_{\parallel}^0 \left[\kappa_2 + i\kappa_3 \right] R_{\perp}^0 \left[\kappa_1 + i\kappa_2 \right], \\
T_2 &= \Phi - \Gamma \left[S_{\parallel}^d - iS_{\perp}^d \right] - R_{\parallel}^0 \left[\kappa_2 - i\kappa_3 \right] R_{\perp}^0 \left[\kappa_1 - i\kappa_2 \right], \\
h_1 &= \Gamma + \rho, \quad h_2 = \Gamma - \rho.
\end{aligned}$$

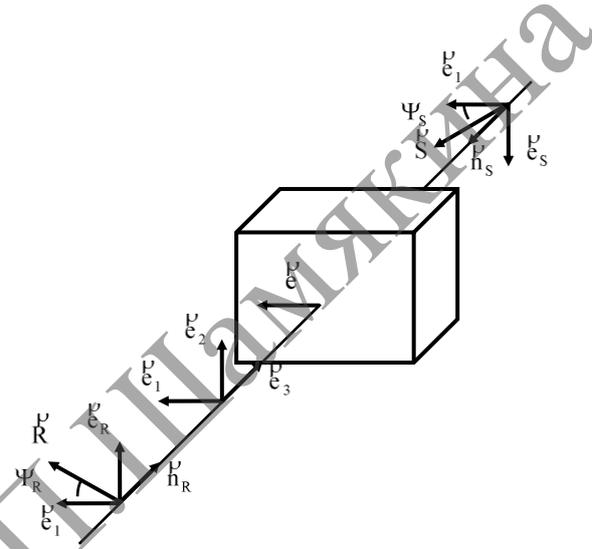


Рисунок 2. – Схема ориентации базиса $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ по отношению к кристаллу

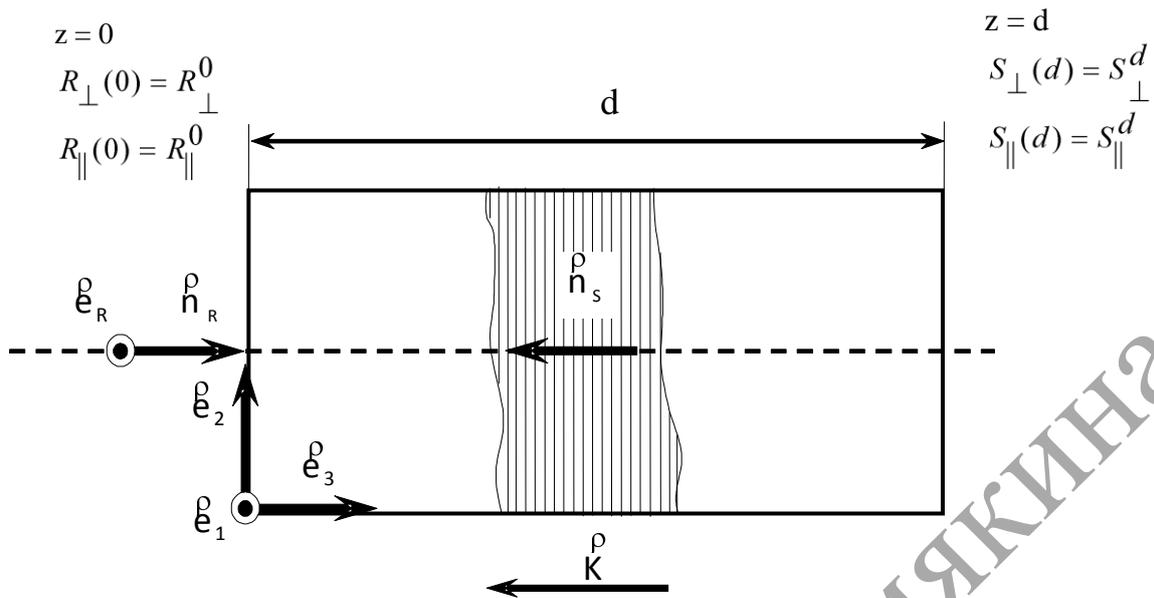


Рисунок 3. – Схема восстановления предметной волны

Здесь приняты следующие обозначения: S_{\parallel}^d , S_{\perp}^d – проекции вектора напряженности электрического поля S^d предметной волны на направления, определяемые единичными векторами e_1 и $-e_2$, на выходе из кристалла ($z = d$) (см. рисунок 3); R_{\parallel}^0 , R_{\perp}^0 – проекции вектора напряженности электрического поля R^0 опорной волны на направления, определяемые единичными векторами e_1 и e_2 , на входе в кристалл ($z = 0$).

На рисунке 3 изображена схема восстановления предметной волны при дифракции опорной волны на отражательной голограмме (заштрихованная область).

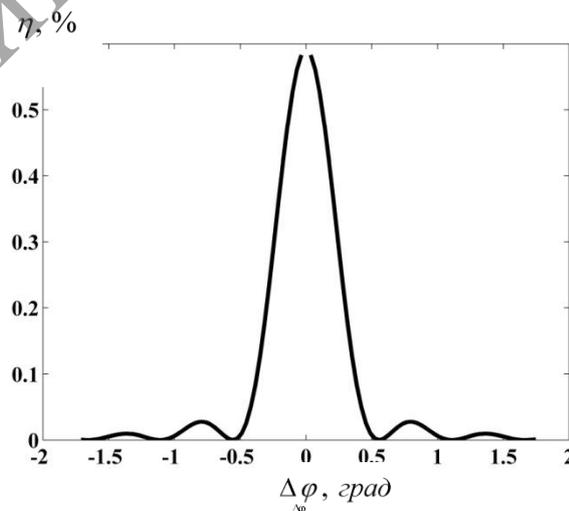


Рисунок 4 – График зависимости дифракционной эффективности η от величины $\Delta\varphi$ угловой отстройки

Для оценки достоверности полученных результатов была численно проанализирована (метод пристрелки, см., напр., [4–6]) зависимость дифракционной эффективности отражательной голограммы, сформированной в кубическом фоторефрактивном кристалле с параметрами BSO среза (001) толщиной 8 мм, от величины угла отклонения вектора волновой нормали опорной волны от его первоначального направления (рисунок 4).

Влиянием оптической активности, а также совместным влиянием фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффектов пренебрегаем.

Считывающая опорная волна принималась линейно поляризованной, причем азимут поляризации волны был такой, что дифракционная эффективность отражательной голограммы в случае выполнения условия фазового синхронизма была наибольшей. Отношение интенсивностей опорной и предметной волн на стадии записи отражательной голограммы в кристалле принималось равным 1/100.

Как следует из анализа рисунка 4, эффективность восстановления предметной волны отражательной голограммой зависит от отклонения значения угла падения опорной волны относительно первоначального угла, определяемого условием Брэгга. Интенсивность восстановленной волны быстро убывает при увеличении угла отстройки $\Delta\varphi$.

При расчете графика на рисунке 4 значение напряженности электрического поля голографической решетки принималось большее, чем типичное значение напряженности, используемое при расчетах параметров отражательной голограммы в кристалле BSO ($E_{sc} = 1,5$ кВ/см). В результате значение дифракционной эффективности в максимуме ($\eta = 0,6\%$) превышает характерное максимальное значение дифракционной эффективности в диффузионном режиме для кристаллов BSO ($\eta = 0,1 \div 0,3\%$).

Правильность выбора этого начального условия проверяется степенью совпадения вычисленного значения зависимой переменной с заданным значением в конечной точке. В нашем случае недостающим начальным условием являются комплексные составляющие ($S_{\parallel}^0, S_{\perp}^0$) векторной амплитуды \vec{S} предметной волны на выходе из кристалла ($z = 0$), а сравнение производится с заданным значением комплексных составляющих ($S_{\parallel}^d, S_{\perp}^d$) векторной амплитуды предметной волны на входе в кристалл ($z = d$).

Результаты численного моделирования хорошо согласуются с данными, полученными на основании аналитического решения уравнений связанных волн (7), чем подтверждается правильность полученных формул.

С целью проверки достоверности разработанного алгоритма и аналитических выражений (8–9), а также выражений (5, 6) была поставлена задача об определении оптимальных азимутов линейной поляризации опорной волны, при которых в случае выполнения условия фазового синхронизма достигается максимальное усиление опорной волны. Для анализа выбирается кристалл BSO произвольного среза с толщиной 4 мм.

В результате решения этой задачи была построена поверхность, состоящая из единичных векторов, направление которых отражает оптимальное направление линейной поляризации опорной волны (рисунок 5). При этом каждый единичный вектор соответствует фиксированному срезу [7].

Как следует из анализа рисунка 5, все отличные друг от друга срезы кристалла BSO делятся на области, в которых максимальное усиление предметной волны достигается при практически одинаковых ориентациях вектора напряженности

электрического поля опорной волны относительно рабочей системы координат (рисунок 2). Исключение составляет кристалл среза (111), для которого усиление предметной волны не зависит от азимута поляризации опорной волны.

Решение, полученное аналитическим и численным способами, практически совпадают. Небольшое расхождение обусловлено принятием приближения неистощимости опорной волны при получении аналитического решения и погрешностью численного метода. Для проверки достоверности полученных данных был использован третий метод: для поставленной задачи получено решение уравнения нормалей Френеля. Результаты, полученные на основании формул (8-9) и численного

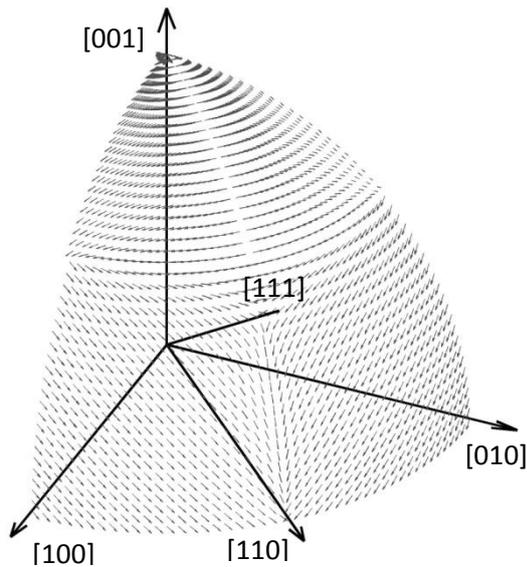


Рисунок 5 – Оптимальная ориентация вектора напряженности электрического поля опорной волны, рассчитанная при произвольной ориентации вектора отражательной голограммы

решения системы уравнений связанных волн (7), а также численное и аналитическое решение уравнения Френеля для кубического кристалла с наведенной анизотропией, хорошо согласуются.

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений, пригодных для расчета поляризационных и энергетических характеристик восстановленной отражательной голограммой световой волны в зависимости от угловой и спектральной отстройки параметров считывающей волны. В математической модели учтены линейный электрооптический эффект, обратный пьезоэлектрический эффект и оптическая активность кубических фоторефрактивных кристаллов класса симметрии 23. Найдено аналитическое решение уравнений связанных волн в приближении неистощимости опорной волны для кубического оптически активного кристалла произвольного среза. Правильность аналитического решения подтверждена в частных случаях путем

численного решения уравнений связанных волн и решением уравнения нормалей Френеля.

Список использованных источников

1. Шепелевич, В.В. Дифракция световых волн на фазовых решетках в гиротропных кристаллах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.05 / В.В. Шепелевич. – Минск, 1994. – 294 с.
2. Егоров, Н.Н. Селективные свойства объемных голограмм в оптически активных средах / Н.Н. Егоров, В.В. Шепелевич // Голография в промышленности и научных исследованиях: Т. докл. науч. семинара. – Гродно, 1986. – С.64–65.
3. Дифракция световых волн на отражательных голограммах в кубических пьезокристаллах / В.В. Шепелевич [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2003. – Т. 29, Вып. 18. – С. 22–28.
4. На, Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На. – М.: Мир, 1982. – 296 с.
5. Волков, В.М. Итерационные методы решения стационарных задач встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах / В.М. Волков // Дифф. уравн. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 935–941.
6. Ja, Y.H. An improved scheme using the shooting method to solve degenerate four-wave mixing equations / Y.H. Ja // Aust. J. Phys. – 1989. – Vol. 42. – P. 197–201.

7. Diffractive properties of volume phase gratings in photorefractive sillenite crystals of arbitrary cut under the influence of an external electric field / N.C. Deliolanis [et al.] // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 68. – P. 056602.

SELECTIVE PROPERTIES OF VOLUME REFLECTION HOLOGRAM, FORMED IN PHOTOREFRACTIVE 23 SYMMETRY CLASS CRYSTAL

Summary: the paper presents a mathematical model for calculating the angular and spectral selectivity of a volume reflective hologram formed in a photorefractive 23 symmetry class crystal, taking into account linear electro-optical, photoelastic, inverse piezoelectric effects and optical activity. An analytic solution of the coupled-wave equations is presented in the approximation of undepletion of the reference wave for a cubic optically active crystal of arbitrary cut.

Keywords Photorefractive crystal, reflection hologram, selectivity, piezoelectric effect, diffraction efficiency.