УДК 539.12

Е. М. Овсиюк, А. Д. Коральков, А. В. Ивашкевич, Е. А. Бабак

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Релятивистская частица со спином 1 исследуется во внешнем кулоновском поле. Есть три независимых подкласса состояний. Один класс легко исследуется и дает известный спектр энергий. Две другие серии состояний описываются системой связанных уравнений для 6 функций. В каждом таком случае есть основная функция и цепочка соотношений, позволяющая выразить остальные 5 функций через основную. В работе проведен асимптотический анализ одного из радиальных уравнений, описывающих класс связанных состояний для частицы со спином 1 в кулоновском поле.

Ключевые слова: частица со спином 1, кулоновское поле, особые точки дифференциального уравнения, независимые решения.

Введение. До настоящего времени нерешенной является задача об описании квантово-механической частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле. Задача была поставлена впервые И. Е. Таммом [1]. В недавней работе [2] был заново исследован вопрос о разных способах выделения независимых решений в радиальных уравнениях для частицы со спином 1 в поле Кулона.

Результаты исследования и их обсуждение. *Анализ радиального уравнения.* Ниже исследуется одно из полученных в [2] уравнений, оно описывает класс состояний для частицы со спином 1 в кулоновском поле:

$$\frac{d^2H}{dr^2}+\left[\frac{2}{r}+\frac{2M^2r}{M^2r^2+2\nu^2}+\frac{\left(2M^2-2\varepsilon^2\right)r-2\alpha\varepsilon}{\left(-M^2+\varepsilon^2\right)r^2+2\alpha\varepsilon r-2\nu^2+\alpha^2}\right]\frac{dH}{dr}+$$

$$+\left[-M^2+\varepsilon^2+\frac{2\alpha\varepsilon\ \ \alpha^2-2\nu^2-1}{\left(\alpha^2-2\nu^2\right)r}+\frac{2M^2}{M^2r^2+2\nu^2}+\frac{\alpha^2-2\nu^2}{r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2M^2\alpha\varepsilon r-2\alpha\varepsilon^3r-2M^2\alpha^2+4M^2\nu^2-2\alpha^2\varepsilon^2-4\varepsilon^2\nu^2}{\left(M^2r^2-\varepsilon^2r^2-2\alpha\varepsilon r-\alpha^2+2\nu^2\right)\left(\alpha^2-2\nu^2\right)}\right]H=0, \qquad (1)$$

где использованы обозначения (ε и M имеют размерность обратной длины):

$$\varepsilon=\frac{E}{c\hbar},\quad m=\frac{Mc}{\hbar},\quad \alpha=e^2/(c\hbar)=\frac{1}{137},\quad 2\nu^2=j(j+1),\quad j=1,2,3,... \qquad (2)$$

С использованием специальных обозначений:

$$\gamma=\frac{\alpha\varepsilon}{M^2-\varepsilon^2}>0,\quad \Gamma^2=\frac{2\nu^2-\alpha^2}{M^2-\varepsilon^2}>0,$$
$$R=\sqrt{2\nu^2/M^2},\quad r_{1,2}=\gamma\pm i\sqrt{\Gamma^2-\gamma^2} \qquad (3)$$

уравнение можно представить в более коротком виде

$$H_1+\left(\frac{2}{r}+\frac{2r}{(r-iR)(r+iR)}-\frac{2(r-\gamma)}{(r-r_1)(r-r_2)}\right)H'_1+$$
$$\left[-(M^2-\varepsilon^2)+\frac{2\gamma}{r}(M^2-\varepsilon^2+\frac{1}{\Gamma^2})-\frac{2\nu^2-\alpha^2}{r^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{(r-iR)(r+iR)}-\frac{1}{\Gamma^2}\frac{2\gamma r+2\Gamma^2-4\gamma^2}{(r-r_1)(r-r_2)}\right]H_1=0. \qquad (4)$$

Найдем поведение решений около двух физических особых точек. Пусть $r\to 0$:

$$\frac{d^2}{dr^2}H_1+\frac{2}{r}\frac{dH_1}{dr}-\frac{2\nu^2-\alpha^2}{r^2}H_1=0\quad H_1=r^A,\ A^2+A=2\nu^2-\alpha^2,$$

$$A = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (2\nu^2 - \alpha^2)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (j(j+1) - \alpha^2)},$$

связанным состояниям отвечают решения, стремящиеся к нулю в начале координат, т. е. следует использовать решения со следующим поведением:

$$r \to 0, \quad H_1 = r^A, \quad A = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (j(j+1) - \alpha^2)}\,. \qquad (5)$$

Пусть $r \to \infty$, уравнение упрощается, асимптотика решений имеет вид:

$$H'' + \frac{2}{r}H' - (M^2 - \varepsilon^2)H = 0, \quad H = e^{\pm\sqrt{M^2-\varepsilon^2}\, r}\,; \qquad (6)$$

чтобы обеспечить затухание решений на бесконечности, нужно использовать нижний знак.

Чтобы установить математический характер особенности на бесконечности (это позволит описать поведение на бесконечности более точно), вводим обратную переменную $z = \frac{1}{r}$, уравнение примет вид:

$$\frac{d^2}{dz^2}H_1 + \frac{2}{z}\frac{d}{dz}H_1 + \left(2 + \frac{2}{(1-iRz)(1+iRz)} - \frac{2(1-\gamma z)}{(1-r_1 z)(1-r_2 z)}\right)\frac{1}{z}\frac{d}{dz}H_1 +$$

$$\left[-\frac{(M^2-\varepsilon^2)}{z^4} + \frac{2\gamma}{z^3}\left(M^2-\varepsilon^2+\frac{1}{\Gamma^2}\right) - \frac{(2\nu^2-\alpha^2)}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(1-iRz)(1+iRz)}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{\Gamma^2}\frac{2\gamma+(2\Gamma^2-4\gamma^2)z}{(1-r_1 z)(1-r_2 z)}\frac{1}{z^3}\right]H_1 = 0. \qquad (7)$$

Около точки $z = 0$ уравнение упрощается до следующего

$$\frac{d^2}{dz^2}H_1 + \frac{4}{z}\frac{d}{dz}H_1 - \frac{(M^2-\varepsilon^2)}{z^4}H_1 = 0\,; \qquad (8)$$

т. е. точка $z = 0$ $(r = \infty)$ является нерегулярной особенностью ранга 2.

Таким образом, имеем уравнение второго порядка с 5 регулярными сингулярными точками и одной нерегулярной; отмечаем, что особые точки $-iR, +iR, r_1, r_2$ лежат вне физической области изменения переменной $r \in (0, +\infty)$.

Чтобы найти поведение решений около точки $z = 0$, можно пользоваться упрощенной формой уравнения (7) – сохраняем сингулярности вида z^{-3}, z^{-4}:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{4}{z}\frac{d}{dz} - \frac{(M^2-\varepsilon^2)}{z^4} + \frac{2\gamma(M^2-\varepsilon^2)}{z^3}\right]H_1 = 0, \quad H_1 \approx z^B e^{C/z}.$$

После простых вычислений получаем уравнения для параметров B, C:

$$C^2 - M^2 + \varepsilon^2 = 0, \quad \gamma(M^2-\varepsilon^2) - BC - C = 0 \approx 0\,;$$

откуда следует (используем знак при C, отвечающий связанным состояниям)

$$C=-\sqrt{M^2-\varepsilon^2}, \quad B=\gamma C-1=-1-\frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{M^2-\varepsilon^2}}\,. \tag{9}$$

Следовательно, решения на бесконечности затухают по закону

$$H_1 \approx r^{-B}\, e^{-\sqrt{M^2-\varepsilon^2}r}\,. \tag{10}$$

Проведенный анализ асимптотик указывает на возможность описания уравнением (1) связанных состояний в системе. Для дальнейшего уравнение для H_1 будем использовать в такой форме:

$$H_1+\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{r-iR}+\frac{1}{r+iR}-\frac{1}{r-r_1}-\frac{1}{r-r_2}\right)H'_1+$$

$$\Bigg[-(M^2-\varepsilon^2)+\frac{2\gamma}{r}(M^2-\varepsilon^2+\Gamma^{-2})-\frac{2\nu^2-\alpha^2}{r^2}+\frac{1}{iR}\frac{1}{r-iR}-\frac{1}{iR}\frac{1}{r+iR}-$$

$$-\frac{1}{\Gamma^2}\frac{2\gamma r_1+2\Gamma^2-4\gamma^2}{r_1-r_2}\frac{1}{r-r_1}-\frac{1}{\Gamma^2}\frac{2\gamma r_2+2\Gamma^2-4\gamma^2}{r_2-r_1}\frac{1}{r-r_2}\Bigg]H_1=0\,. \tag{11}$$

Его удобно представлять в обобщенной форме так:

$$H_1+\left(\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r-iR}+\frac{a_3}{r+iR}+\frac{a_4}{r-r_1}+\frac{a_5}{r-r_2}\right)H'_1+$$

$$+\left(D+\frac{b}{r^2}+\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r-iR}+\frac{b_3}{r+iR}+\frac{b_4}{r-r_1}+\frac{b_5}{r-r_2}\right)H_1=0\,. \tag{12}$$

Будем искать решения последнего уравнения в окрестности точки $r=0$ в виде

$$H_1(r)=r^A e^{Cr}H(r)\,;$$

$$H''+\left(2C+\frac{a_1+2A}{r}+\frac{a_2}{r-iR}+\frac{a_3}{r+iR}+\frac{a_4}{r-r_1}+\frac{a_5}{r-r_2}\right)H'+$$

$$+\Bigg((D+C^2)+\frac{a_1A+b+A(A-1)}{r^2}+$$

$$+\frac{a_1C-a_2A/iR+a_3A/iR-a_4A/r_1-a_5A/r_2+b_1+2AC}{r}+\frac{a_2A/iR+a_2C+b_2}{r-iR}+$$

$$+\frac{-a_3A/iR+a_3C+b_3}{r+iR}+\frac{a_4A/r_1+a_4C+b_4}{r-r_1}+\frac{a_5A/r_2+a_5C+b_5}{r-r_2}\Bigg)H=0.$$

Требуем выполнения равенств

$$D+C^2=0, \quad a_1A+b+A(A-1)=0\,;$$

отсюда находим уже известные выражения для C и A. Уравнение для функции H упрощается

$$H''+\left(2C+\frac{a_1+2A}{r}+\frac{a_2}{r-iR}+\frac{a_3}{r+iR}+\frac{a_4}{r-r_1}+\frac{a_5}{r-r_2}\right)H'+$$

$$+\left(\frac{a_1C - a_2A/iR + a_3A/iR - a_4A/r_1 - a_5A/r_2 + b_1 + 2AC}{r} +\right.$$
$$+\frac{a_2A/iR + a_2C + b_2}{r - iR} + \frac{-a_3A/iR + a_3C + b_3}{r + iR} +$$
$$\left.+\frac{a_4A/r_1 + a_4C + b_4}{r - r_1} + \frac{a_5A/r_2 + a_5C + b_5}{r - r_2}\right)H = 0.$$

Его можно символически записать так:

$$H'' + \left(2C + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r - iR} + \frac{C_3}{r + iR} + \frac{C_4}{r - r_1} + \frac{C_5}{r - r_2}\right)H' +$$
$$+\left(\frac{D_1}{r} + \frac{D_2}{r - iR} + \frac{D_3}{r + iR} + \frac{D_4}{r - r_1} + \frac{D_5}{r - r_2}\right)H = 0. \qquad (13)$$

Строим решения в виде степенного ряда

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} d_n r^n, \quad H' = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n r^{n-1}, \quad H'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n r^{n-2}.$$

Для этого умножим уравнение на выражение

$$r(r - iR)(r + iR)(r - r_1)(r - r_2) = r(r^2 + R^2)(r^2 - 2\gamma r^2 + \Gamma^2);$$

учли, что $r_1 + r_2 = 2\gamma,\ r_1r_2 = \Gamma^2$. Уравнение примет вид

$$\left[r^5 - (r_1 + r_2)r^4 + (r_1r_2 + R^2)r^3 - (r_1 + r_2)R^2r^2 + R^2r_1r_2r\right]H'' +$$
$$+\left[2Cr^5 - 2C(r_1 + r_2)r^4 + 2C(r_1r_2 + R^2)r^3 - 2C(r_1 + r_2)R^2r^2 + 2CR^2r_1r_2r +\right.$$
$$+C_1r^4 - C_1(r_1 + r_2)r^3 + C_1(r_1r_2 + R^2)r^2 - C_1(r_1 + r_2)R^2r + C_1R^2r_1r_2 +$$
$$+C_2r^4 - C_2(r_1 + r_2 - iR)r^3 - C_2(r_1iR + r_2iR - r_1r_2)r^2 + C_2iRr_1r_2r +$$
$$+C_3r^4 - C_3(r_1 + r_2 + iR)r^3 + C_3(r_1iR + r_2iR + r_1r_2)r^2 - C_3iRr_1r_2r +$$
$$+C_4r^4 - C_4r_2r^3 + C_4R^2r^2 - C_4R^2r_2r +$$
$$\left.+C_5r^4 - C_5r_1r^3 + C_5R^2r^2 - C_5R^2r_1r\right]H' +$$
$$\left[D_1r^4 - D_1(r_1 + r_2)r^3 + D_1(r_1r_2 + R^2)r^2 - D_1(r_1 + r_2)R^2r + D_1R^2r_1r_2 +\right.$$
$$+D_2r^4 - D_2(r_1 + r_2 - iR)r^3 - D_2(r_1iR + r_2iR - r_1r_2)r^2 + D_2iRr_1r_2r +$$
$$+D_3r^4 - D_3(r_1 + r_2 + iR)r^3 + D_3(r_1iR + r_2iR + r_1r_2)r^2 - D_3iRr_1r_2r +$$
$$\left.+D_4r^4 - D_4r_2r^3 + D_4R^2r^2 - D_4R^2r_2r + D_5r^4 - D_5r_1r^3 + D_5R^2r^2 - D_5R^2r_1r\right]H = 0.$$

Дальше выводим 6-членные рекуррентные соотношения:

$$\left[2C(n-4) + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5\right]d_{n-4} +$$
$$+[(n-3)(n-4) - 2C(r_1 + r_2)(n-3) +$$
$$+C_1(n-3) + C_2(n-3) + C_3(n-3) + C_4(n-3) + C_5(n-3) +$$
$$-D_1(r_1 + r_2) - D_2(r_1 + r_2 - iR) - D_3(r_1 + r_2 + iR) - D_4r_2 - D_5r_1]\,d_{n-3} +$$

$$+[-(r_1+r_2)(n-2)(n-3)+2C(r_1r_2+R^2)(n-2)-$$
$$-C_1(r_1+r_2)(n-2)-C_2(r_1+r_2-iR)(n-2)-$$
$$-C_3(r_1+r_2+iR)(n-2)-C_4r_2(n-2)-C_5r_1(n-2)+$$
$$+D_1(r_1r_2+R^2)-D_2(r_1iR+r_2iR-r_1r_2)+D_3(r_1iR+r_2iR+r_1r_2)+D_4R^2+D_5R^2]\,d_{n-2}+$$
$$+[(r_1r_2+R^2)(n-1)(n-2)-2C(r_1+r_2)R^2(n-1)+C_1(r_1r_2+R^2)(n-1)-$$
$$-C_2(r_1iR+r_2iR-r_1r_2)(n-1)+C_3(r_1iR+r_2iR+r_1r_2)(n-1)+C_4R^2(n-1)+$$
$$+C_5R^2(n-1)-D_1(r_1+r_2)R^2+D_2iRr_1r_2-D_3iRr_1r_2-D_4R^2r_2-D_5R^2r_1]\,d_{n-1}+$$
$$+[-(r_1+r_2)R^2n(n-1)+2CR^2r_1r_2n-C_1(r_1+r_2)R^2n+$$
$$+C_2iRr_1r_2n-C_3iRr_1r_2n-C_4R^2r_2n-C_5R^2r_1n+D_1R^2r_1r_2]\,d_n+$$
$$+[R^2r_1r_2n(n+1)d_{n+1}+C_1R^2r_1r_2(n+1)]\,d_{n+1}=0. \qquad (14)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре–Перрона. Разделим последнее соотношение на d_{n-4}:

$$[2C(n-4)+D_1+D_2+D_3+D_4+D_5]+$$
$$+[(n-3)(n-4)-2C(r_1+r_2)(n-3)+$$
$$+C_1(n-3)+C_2(n-3)+C_3(n-3)+C_4(n-3)+C_5(n-3)+$$
$$-D_1(r_1+r_2)-D_2(r_1+r_2-iR)-D_3(r_1+r_2+iR)-D_4r_2-D_5r_1]\,\frac{d_{n-3}}{d_{n-4}}+$$
$$[-(r_1+r_2)(n-2)(n-3)+2C(r_1r_2+R^2)(n-2)-$$
$$-C_1(r_1+r_2)(n-2)-C_2(r_1+r_2-iR)(n-2)-$$
$$-C_3(r_1+r_2+iR)(n-2)-C_4r_2(n-2)-C_5r_1(n-2)+D_1(r_1r_2+R^2)-$$
$$-D_2(r_1iR+r_2iR-r_1r_2)+D_3(r_1iR+r_2iR+r_1r_2)+D_4R^2+D_5R^2]\,\frac{d_{n-2}}{d_{n-3}}\frac{d_{n-3}}{d_{n-4}}+$$
$$[(r_1r_2+R^2)(n-1)(n-2)-2C(r_1+r_2)R^2(n-1)+C_1(r_1r_2+R^2)(n-1)-$$
$$-C_2(r_1iR+r_2iR-r_1r_2)(n-1)+C_3(r_1iR+r_2iR+r_1r_2)(n-1)+$$
$$+C_4R^2(n-1)+C_5R^2(n-1)-D_1(r_1+r_2)R^2+$$
$$+D_2iRr_1r_2-D_3iRr_1r_2-D_4R^2r_2-D_5R^2r_1]\,\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\frac{d_{n-2}}{d_{n-3}}\frac{d_{n-3}}{d_{n-4}}+$$
$$[-(r_1+r_2)R^2n(n-1)+2CR^2r_1r_2n-C_1(r_1+r_2)R^2n+$$
$$+C_2iRr_1r_2n-C_3iRr_1r_2n-C_4R^2r_2n-C_5R^2r_1n+D_1R^2r_1r_2]\,\frac{d_n}{d_{n-1}}\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\frac{d_{n-2}}{d_{n-3}}\frac{d_{n-3}}{d_{n-4}}+$$
$$[R^2r_1r_2n(n+1)+C_1R^2r_1r_2(n+1)]\frac{d_{n+1}}{d_n}\frac{d_n}{d_{n-1}}\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\frac{d_{n-2}}{d_{n-3}}\frac{d_{n-3}}{d_{n-4}}=0.$$

Делим это соотношение на n^2, устремляем $n\to\infty$, вводим параметр

$$r=\lim_{k\to\infty}\frac{d_{k-3}}{d_{k-4}},$$

модуль которого определяет возможные радиуса сходимости. Получаем алгебраическое уравнение для величины r:

$$r\left(r^2+\frac{1}{R^2}\right)\left(r-\frac{1}{r_1}\right)\left(r-\frac{1}{r_2}\right)=0\,.$$

Возможны следующие решения:

$$r=0,\quad r=+\frac{i}{R},\quad r=-\frac{i}{R},\quad r=\frac{1}{r_1},\quad r=\frac{1}{r_2}\,.$$

Таким образом, имеем возможные радиусы сходимости

$$R_{conv}=\infty,\quad |R|,\quad |r_1|,\quad |r_2|\,. \tag{15}$$

Поскольку поведение решений около точек R, r_1, r_2 вполне регулярно, можно ожидать, что реальный радиус сходимости – это $R_{conv}=\infty$.

Выводы. В работе проведен асимптотический анализ одного из радиальных уравнений, описывающих класс состояний для релятивистской частицы со спином 1 в кулоновском поле. Проведенный анализ асимптотик указывает на возможность описания уравнением (1) связанных состояний в системе. Решения этого уравнения построены в виде степенных рядов, сходимость которых исследована методом Пуанкаре–Перрона.

Список основных источников

1. Тамм, И. Е. Движение мезонов в электромагнитных полях / И. Е. Тамм // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 29. – С. 551.

2. Овсиюк, Е. М. О выделении независимых решений в радиальных уравнениях для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле / Е. М. Овсиюк, В. В. Кисель, В. М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2017. – Т. 61.

Helena Ovsiyuk, Artem Koralkov, Alina Ivashkevich, Helena Babak

ANALYSIS OF THE EQUATION FOR PARTICLES WITH SPIN 1 IN COULOMB FIELD

Summary. *Relativistic spin 1 particle is studied in presence of external Coulomb field. It should be expected three independent subclasses of states. One subclass is readily found and gives the known energy spectrum. Two other subclasses are to be studied within a unique system for six related radial functions. In each case there exist one main function with its own 2-nd order equation and the rules to get other 5 functions. An asymptotic analysis of one of the radial equations describing the class of bound states for a particle with spin 1 in Coulomb field is carried out.*

Keywords: spin 1 particle, coulomb field, singular points of differential equation, independent solutions.