Е. С. ДУЛУБ, С. Р. БОНДАРЬ
УО МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (метод Фурье)

Метод разделения переменных, или метод Фурье, является типичным для решения многих задач математической физики. Пусть требуется найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,t) = 0, \qquad (2)$$

$$u(l,t) = 0, \qquad (3)$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5}$$

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$, из которых первая зависит только от x, а вторая только от t:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{6}$$

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right). \tag{7}$$

Так как уравнение (1) линейное и однородное, и поэтому функция, представленная рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

или

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{8}$$

будет решением дифференциального уравнения (1), которое будет удовлетворять граничным условиям (2) и (3). Очевидно, ряд (8) будет решением уравнения (1) только в том случае, если коэффициенты C_n и D_n таковы, что этот ряд сходится и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования по x и по t.

Решение (8) должно еще удовлетворять начальным условиям (4) и (5). Этого мы будем добиваться путем подбора постоянных C_n и D_n. Подставляя в равенство (16) $t = 0$, получим:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{9}$$

Если функция $f(x)$ такова, что в интервале $(0, l)$ ее можно разложить в ряд Фурье, то условие (17) будет выполняться, если положить

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \tag{10}$$

Далее, дифференцируем члены равенства (16) по t и подставляем $t = 0$. Из условия (5) получается равенство

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Определяем коэффициенты Фурье этого ряда:

$$D_n\frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

или

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \tag{11}$$

Итак, мы доказали, что ряд (8), где коэффициенты C_n и D_n определены по формулам (10) и (11), если допускает двукратное почленное дифференцирование, представляет функцию $u(x,t)$, которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям и начальным условиям (2) – (5).