А.Э. ШМИГИРЕВ
УО МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

КРИТЕРИИ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С УСЛОВИЕМ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать обозначения из [1], [2].

Пусть $\boldsymbol{F}$ – произвольная непустая насыщенная наследственная формация. Напомним, что группа G называется группой с плотной системой $\boldsymbol{F}$-субнормальных подгрупп, если для любых двух различных подгрупп H и K группы G, из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе G

существует такая $\boldsymbol{F}$-субнормальная подгруппа N, что $H \subseteq \mathrm{N} \subseteq \mathrm{K}$. В этом случае также говорят, что множество $\boldsymbol{F}$-субнормальных в G подгрупп плотно.

Группы с плотной системой $\boldsymbol{F}$-субнормальных подгрупп, где $\boldsymbol{F}$ – либо некоторая насыщенная наследственная формация p-нильпотентных групп, либо некоторая насыщенная наследственная формация φ-дисперсивных групп, где φ – некоторое фиксирванное линейное упорядочение множества всех прстых чисел, либо некоторая насыщенная наследственная формация сверхразрешимых групп была описана в работах [3],[4].

В настоящей работе рассматривается критерии разрешимости, когда G – группа с плотной системой $\boldsymbol{F}$-субнормальных подгрупп, где $\boldsymbol{F}$ – произвольная насыщенная формация.

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая S-замкнутая насыщенная формация разрешимых групп, G – группа с плотной системой $\boldsymbol{F}$-субнормальных подгрупп, не принадлежащая формации $\boldsymbol{F}$. Тогда G разрешима.

Доказательство. Пусть G – группа минимального порядка, для которой лемма не верна.

Предположим, что $G^{\boldsymbol{F}} = G$. Тогда каждая максимальная подгруппа группы G будет $\boldsymbol{F}$-абнормальной в G. Пусть H некоторая неединичная силовская подгруппа группы G. Если предположить, что в H существует вторая максимальная подгруппа, то по условию найдется $\boldsymbol{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $H \supseteq N \supseteq 1$. Отсюда следует, что $G^{\boldsymbol{F}} \subset G$. Противоречие. Следовательно, $|H|$ – простое число. Получили, что каждая неединичная силовская подгруппа H из G имеет простой порядок и, значит, G разрешима, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, $G^{\boldsymbol{F}} \subset \mathrm{G}$ и $G^{\boldsymbol{F}} \neq 1$. Если $G^{\boldsymbol{F}} \in \boldsymbol{F}$, то $G^{\boldsymbol{F}}$ – разрешимая группа по условию. Если же $G^{\boldsymbol{F}} \notin \boldsymbol{F}$, то $G^{\boldsymbol{F}}$ разрешима по индукции. Из того, что $G/G^{\boldsymbol{F}} \in \boldsymbol{F}$ следует, что G разрешима. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $\boldsymbol{F}$**–** произвольная непустая насыщенная наследственная формация разрешимых групп. G – группа, не принадлежащая формации $\boldsymbol{F}$**,** такая, что для любых двух различных не инвариантных в G подгрупп H и K группы G, из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе G существует такая $\boldsymbol{F}$-субнормальная подгруппа N, что $H \subseteq N \subseteq K$. Тогда группа G разрешима.

Доказательство. Пусть G – группа минимального порядка, для которой теорема не верна. В случае, если $G^{\boldsymbol{F}} \neq G$, то $G^{\boldsymbol{F}}$-разрешимая группа по индукции. Из разрешимости фактор-группы $G/G^{\boldsymbol{F}}$ следует разрешимость и самой группы G.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп /Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978.– 272 с.

2. Doerk, K. Finite soluble groups / K.Doerk, T.Hawkes. – Berlin-New York. – Walter de Gruyter. – 1992.

3. Шеметков, Л.А. О конечных группах с плотной системой подгрупп / Л.А. Шеметков, А.Э. Шмигирев // Доклады НАН Беларуси. – №6. – 2004. – С. 29–31.

4. Шмигирев, А.Э. О конечных группах с условием плотности для обобщенно субнормальных подгрупп/А.Э. Шмигирев // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2004. –№ 6. – С.130–149.