

ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№3 (28) 2016**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»

*Главный редактор:*  
**А.В. Рогачёв** (Беларусь)

*Заместитель главного редактора:*  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)

*Редакционная коллегия:*

**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

*Ответственный секретарь:*  
**Е.А. Ружичкая** (Беларусь)

*Адрес редакции:*

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)

Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»

*Editor-in-Chief:*  
**A.V. Rogachev** (Belarus)

*Deputy Editor-in-Chief:*  
**O.M. Demidenko** (Belarus)

*Editorial board:*

**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Wenbin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

*Executive Secretary:*  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

*Edition address:*

F. Scorina Gomel State University  
Sovetskaya Str., 104,  
246019, Gomel, Republic of Belarus  
Ph. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
website: <http://pfmt.gsu.by>

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (28) 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА

- Василец В.К., Хмыль А.А., Кузьмар И.И., Дежкунов Н.В.** Влияние параметров электрического тока и ультразвуковых колебаний на микроструктуру и свойства электрохимических покрытий сплавом олово-висмут . . . . . 7
- Овсинок Е.М., Редько А.Н., Кисель В.В., Редьков В.М.** Изотопический дублет дираковских частиц в присутствии неабелева монополя: приближение Паули . . . . . 13
- Хорошко В.В.** Маршрут производства фотопреобразователей на основе тонких пленок халькогенидов . . . . . 23
- Шушкевич Г.Ч.** Рассеяние поля электрического диполя на тонкой незамкнутой сферической оболочке и биизотропном шаре. Аналитический подход . . . . . 27

### МАТЕМАТИКА

- Бородич Т.В.** О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам выделенных подгрупп . . . . . 35
- Монахов В.С., Чирик И.К.** Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами . . . . . 40
- Мусафиров Э.В.** Допустимые возмущения системы Лэнгфорда . . . . . 47
- Проневич А.Ф.** Теорема Пуассона построения стационарных интегралов автономных систем уравнений в полных дифференциалах . . . . . 52
- Семенчук В.Н.** Конечные группы с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами . . . . . 58
- Синица Д.А., Рыжик В.Н.** Об одном обобщении конечных  $\sigma$ -нильпотентных групп . . . . . 61
- Шпак Д.С., Трифонова И.В.** Метод применения нелинейных эволюционных операторов для решения динамических систем . . . . . 66
- Шукур Али А., Архипенко О.А.** Резольвента краевой задачи для разностного уравнения . . . . . 70

### ИНФОРМАТИКА

- Демиденко О.М., Диваков Н.Н., Чечет П.Л.** Настройка DNS для одновременного использования на узлах IPv4 и IPv6 . . . . . 76
- Миняйлов В.С.** Обнаружение эллиптических предложений средствами алгоритмов классификации . . . . . 82
- Осипенко А.Н., Осипенко Н.Б., Слепенко Ю.А.** Автоматизация диагностики потенциальных качеств человека при выборе профессии . . . . . 88

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

**Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):**  
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**  
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 09.09.16. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ № 509.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013  
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2016  
© Проблемы физики, математики и техники, 2016  
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2016

УДК 539.12

## ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ДУБЛЕТ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПРИСУТСТВИИ НЕАБЕЛЕВА МОНОПОЛЯ: ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАУЛИ

Е.М. Овсиюк<sup>1</sup>, А.Н. Редько<sup>2</sup>, В.В. Кисель<sup>3</sup>, В.М. Редьков<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

<sup>2</sup>Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

<sup>4</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

## ISOTOPIC DOUBLET OF THE DIRAC PARTICLES IN PRESENCE OF THE NON-ABELIAN MONOPOLE: THE PAULI APPROXIMATION

E.M. Ovsyuk<sup>1</sup>, A.N. Red'ko<sup>2</sup>, V.V. Kisel<sup>3</sup>, V.M. Red'kov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University

<sup>2</sup>M. Tank Belarusian State Pedagogical University, Minsk

<sup>3</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

<sup>4</sup>B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Построено нерелятивистское уравнение паулиевского типа для дублета дираковских частиц, учитывающее присутствие внешних неабелевых полей. Оно детализировано в случае монополярных потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда. Выполнен анализ возможности существования связанных состояний в системе. Проведено сопоставление поведения дублета частиц в пространствах постоянной кривизны: Евклида, Лобачевского и Римана, откуда следует, что обычное использование в пространстве Минковского несингулярного монополярного решения является использованием решения, более естественно связанного с геометрией пространства Лобачевского. В такой трактовке во всех трех пространствах связанных состояний для дублета фермионов в полях неабелева монополя не возникает.

**Ключевые слова:** дублет фермионов, неабелев монополярный потенциал, приближение Паули, пространства постоянной кривизны, связанные состояния.

For the doublet of Dirac particles in presence of external non-Abelian fields, a non-relativistic Pauli equation is constructed. It is detailed for the case of the Bogomolny – Prasad – Sommerfeld monopole potentials. The problem of existence of bound states in the system is studied. Comparison of the behavior of the Dirac particles doublet in three spaces of constant curvature: Euclid, Lobachevsky, and Riemann, is performed, from where it follows that the known nonsingular monopole solution usually used for the case of Minkowski space is the application of a mathematical possibility more naturally related to the Lobachevsky space model. Within that treatment, in all three space models, no bound states for the doublet of fermions in the non-Abelian monopole potential exist.

**Keywords:** doublet of fermions, non-Abelian monopole, Pauli approximation, spaces of constant curvature, bound states.

### Введение

Как только неабелев монополярный потенциал был введен (Хуфтом [1], Поляковым [2], Жулиа, Зи [3], Бэйс–Расел [4]) в научный обиход, его основные свойства были детально изучены. Есть два основных способа исследования монополярных проблем: основанный на геометрических и топологических методах и другой подход, базирующийся на исследовании физических проявлений монополей, когда они рассматриваются как внешние потенциалы [5]–[10]. В работе исследуется поведение изотопического дублета дираковских фермионов во внешнем неабелевом монополярном потенциале. Специальное внимание уделено проблеме нерелятивистского приближения в теории изотопических мультиплетов в неабелевых полях. В этом приближении анализ упрощается из-за уменьшения вдвое числа функций, связываемых дифференциальными уравнениями. Выведено уравнение паулиевского типа, учитывающее присутствие внешних неабелевых

полей. Оно детализировано для монополярных потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда [11], [12].

### 1 Уравнение Паули для дублета фермионов, общий анализ

Рассмотрим изотопический дублет дираковских фермионов во внешнем неабелевом поле Янга – Миллса [10]

$$\left[ i\gamma^\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Gamma_\alpha(x) - iet^a W_\alpha^a(x) \right) - M \right] \Psi(x) = 0. \quad (1.1)$$

В классе пространств, допускающих нерелятивистское приближение [10], [13]

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

уравнение (1.1) имеет вид

$$\left\{ \gamma^0 \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_0^a \right] + \right.$$

$$+\gamma^j(x) \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] - M \} \Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

где обобщенные матрицы Дирака и связность задаются равенствами

$$\gamma^0(x) = \gamma^0, \quad \gamma^j(x) = \gamma^k e_{(k)}^j(x),$$

$$\Gamma_t(x) = \Gamma_0(x) = \frac{1}{4} \gamma^k(x) \gamma_{k;0}(x),$$

$$\Gamma_j(x) = \frac{1}{4} \gamma^0 \gamma_{0;j}(x) + \frac{1}{4} \gamma^k(x) \gamma_{k;j}(x).$$

Нерелятивистское приближение может быть выполнено в любом базисе матриц Дирака. Большая и малая составляющие задаются с помощью двух проекционных операторов:

$$\Psi_+ = \frac{1+\gamma^0}{2} \Psi, \quad \Psi_- = \frac{1-\gamma^0}{2} \Psi. \quad (1.3)$$

Действуя этими операторами (1.3) слева на уравнение (1.2), находим

$$\begin{aligned} & \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Psi_+ + \\ & + \gamma^j(x) \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Psi_- - M \Psi_+(x) = 0, \\ & - \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Psi_- + \\ & + \gamma^j(x) \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Psi_+ - M \Psi_-(x) = 0. \end{aligned}$$

Выделяя энергию покоя подстановкой

$$\Psi_{\pm}(x) = \exp(-iMt) \Phi_{\pm}(x),$$

получим

$$\begin{aligned} & \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Phi_+ + \\ & + \gamma^j(x) \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Phi_- = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} & - \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Phi_- + \\ & + \gamma^j(x) \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Phi_+ - \\ & - 2M \Phi_-(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Заменяя уравнение (1.5) на его приближение (при этом предполагаем  $W_t^a = 0$ )

$$\Phi_-(x) = \frac{1}{2M} \gamma^j(x) \left[ i \hbar \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Phi_+,$$

после исключения малой компоненты из (1.4) получаем

$$\begin{aligned} & \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_0^a \right] \Phi_+ = \\ & = - \frac{1}{2M} \gamma^j(x) \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \gamma^l(x) \left[ i \left( \frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma_l \right) - et^a W_l^a \right] \Phi_+. \quad (1.6)$$

Это общековариантное уравнение Паули для дублета дираковских фермионов во внешнем поле Янга – Миллса.

Волновая функция дублета подчиняется дополнительному условию  $\gamma^0 \Phi_+ = \Phi_+$ . Существование этого условия связано с тем, что паулиевская волновая функция для дираковской частицы содержит только две независимые компоненты (это в явном виде устанавливается при выборе матриц Дирака в стандартном базисе). Соответственно, волновая функция дублета в нерелятивистском приближении содержит только 4 независимые компоненты, а не 8.

## 2 Неабелев монополю в калибровке Швингера

В работе [13] известная подстановка для монополюльного решения Хуфта – Полякова [1], [2], а также Жулия, Зи [3] (для полноты включаем и взаимодействие с триплетом скалярных полей Хиггса) приводится в специальном базисе изотопического пространства к виду

$$\begin{aligned} W_{\phi}^{S,(a)} &= \begin{vmatrix} 0 & \\ (r^2 K + 1/e) & \\ 0 & \end{vmatrix}, \quad W_{\phi}^{S,(a)} = \begin{vmatrix} -(r^2 K + 1/e) & \\ 0 & \\ & \frac{1}{e} \cos \theta \end{vmatrix}, \\ W_r^{S,(a)} &= \begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{vmatrix}, \quad W_t^{S,(a)} = \begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ rF(r) & \end{vmatrix}, \quad \Phi^{S,(a)} = \begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ r\Phi(r) & \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что абелев потенциал в калибровке Швингера после преобразования к сферическим координатам принимает очень простой вид:

$$A_{\phi}^S = g \cos \theta. \quad (2.2)$$

Примечательно, что в [4] было получено явное представление для вложенного в неабелеву модель абелева монополюльного решения (2.2), и оно следует из (2.1) при специальном выборе функции  $K$ :  $(r^2 K + 1/e) = 0$ .

## 3 Разделение переменных в релятивистском уравнении

В базисе сферической тетрады и в швингеровской унитарной калибровке монополюльного потенциала уравнение для дублета (1.1) примет вид [13]

$$\begin{aligned} & \left[ \gamma^0 (i\partial_t + erF(r)t^3) + i\gamma^3 \left( \partial_r + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \Sigma_{0,\phi}^S + \right. \\ & \left. + \frac{er^2 K(r) + 1}{r} (\gamma^1 \otimes t^2 - \gamma^2 \otimes t^1) - \right. \\ & \left. - (M + \kappa r \Phi(r) t^3) \right] \Psi^S = 0, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{0,\phi}^S = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + (i\sigma^{12} + t^3) \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (3.1)$$

где  $t^j = (1/2)\sigma^j$ . Специальный выбор базиса автоматически привел к необходимой перегруппировке слагаемых волнового уравнения. В частности, только пропорциональный  $(er^2K(r)+1)$  член смешивает компоненты дублета, и он исчезает при использовании потенциала с  $(r^2K+1/e) = 0$ .

В представлении (3.1) компоненты общего сохраняющегося момента определяются согласно  $J_1^S = l_1 + \frac{(i\sigma^{12} + t^3) \cos \phi}{\sin \theta}$ ,  $J_2^S = l_2 + \frac{(i\sigma^{12} + t^3) \sin \phi}{\sin \theta}$ ,

$$J_3^S = l_3,$$

в соответствии с этим подстановка для волновой функции  $\Psi_{ejm}(x)$  такая [13]:

$$\Psi_{ejm}(x) = \frac{e^{-iet}}{r} [T_{+1/2} \otimes F(r, \theta, \phi) + T_{-1/2} \otimes G(r, \theta, \phi)],$$

$$T_{+1/2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} f_1(r)D_{-1} \\ f_2(r)D_0 \\ f_3(r)D_{-1} \\ f_4(r)D_0 \end{vmatrix},$$

$$T_{-1/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} g_1(r)D_0 \\ g_2(r)D_{+1} \\ g_3(r)D_0 \\ g_4(r)D_{+1} \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

$D_\sigma \equiv D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$ . Квантовое число  $j$  может принимать значения  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

Важным в исследовании электронмонопольной проблемы является случай  $j = 0$ , при этом волновая функция  $\Psi_{\varepsilon 0}(x)$  строится так:

$$\Psi_{\varepsilon 0} = T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ f_2(r) \\ 0 \\ f_4(r) \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} g_1(r) \\ 0 \\ g_3(r) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь и ниже множитель  $e^{-iet}/r$  опускаем. Используя рекуррентные соотношения для вignerских функций [14], находим

$$\Sigma_{0,\phi}^S \Psi_{jm}^S = i\nu \left[ T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} -f_4 D_{-1} \\ +f_3 D_0 \\ +f_2 D_{-1} \\ -f_1 D_0 \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} -g_4 D_0 \\ +g_3 D_{+1} \\ +g_2 D_0 \\ -g_1 D_{+1} \end{vmatrix} \right].$$

Приведем выражение для члена, перемешивающего изотопические компоненты:

$$\frac{er^2K(r)+1}{r} (\gamma^1 \otimes t^2 - \gamma^2 \otimes t^1) \Psi_{jm} = i \frac{er^2K(r)+1}{r} \times$$

$$\times \left[ T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ +g_3 D_0 \\ 0 \\ -g_1 D_0 \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} -f_4 D_0 \\ 0 \\ +f_2 D_0 \\ 0 \end{vmatrix} \right].$$

Для краткости дальше используем обозначения

$$W \equiv er^2K(r)+1, \quad \tilde{F} \equiv \frac{erF(r)}{2}, \quad \tilde{\Phi} \equiv \frac{\kappa r\Phi(r)}{2}.$$

После простых вычислений находим систему радиальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left( -i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F} \right) f_3 - i \frac{\nu}{r} f_4 - (M + \tilde{\Phi}) f_1 = 0, \\ & \left( +i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F} \right) f_4 + i \frac{\nu}{r} f_3 + i \frac{W}{r} g_3 - (M + \tilde{\Phi}) f_2 = 0, \\ & \left( +i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F} \right) f_1 + i \frac{\nu}{r} f_2 - (M + \tilde{\Phi}) f_3 = 0, \\ & \left( -i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F} \right) f_2 - i \frac{\nu}{r} f_1 - i \frac{W}{r} g_1 - (M + \tilde{\Phi}) f_4 = 0, \\ & \left( -i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F} \right) g_3 - i \frac{\nu}{r} g_4 - i \frac{W}{r} f_1 - (M - \tilde{\Phi}) g_1 = 0, \\ & \left( +i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F} \right) g_4 + i \frac{\nu}{r} g_3 - (M - \tilde{\Phi}) g_2 = 0, \\ & \left( +i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F} \right) g_1 + i \frac{\nu}{r} g_2 + i \frac{W}{r} f_2 - (M - \tilde{\Phi}) g_3 = 0, \\ & \left( -i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F} \right) g_2 - i \frac{\nu}{r} g_1 - (M - \tilde{\Phi}) g_4 = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для случая  $j = 0$  (при этом  $\Sigma_{0,\phi} \Psi_{\varepsilon 0} \equiv 0$ ) радиальные уравнения упрощаются:

$$\begin{aligned} & \left( +i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F} \right) f_4 + i \frac{W}{r} g_3 - (M + \tilde{\Phi}) f_2 = 0, \\ & \left( -i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F} \right) f_2 - i \frac{W}{r} g_1 - (M + \tilde{\Phi}) f_4 = 0, \\ & \left( -i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F} \right) g_3 - i \frac{W}{r} f_4 - (M - \tilde{\Phi}) g_1 = 0, \\ & \left( +i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F} \right) g_1 + i \frac{W}{r} f_2 - (M - \tilde{\Phi}) g_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем дополнительный диагонализующийся оператор. Обычный оператор  $P$ -инверсии для биспинорного поля не может быть полностью пригоден для такой цели, а требуемый оператор может быть построен как комбинация из биспинорного  $P$ -отражения и некоторого дискретного преобразования в изотопическом пространстве. Действительно, учтем, что биспинорное  $P$ -отражение в базе декартовой тетрады

$$\hat{P}_{bisp}^{Cart} \otimes \hat{P} = i\gamma^0 \otimes \hat{P},$$

где  $P$ -отражение пространственных координат будет определяться в сферическом базисе как

$$\hat{P}_{bisp}^{sph} \otimes \hat{P} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P} = -(\gamma^5 \gamma^1) \otimes \hat{P}.$$

Этот оператор действует на волновую функцию  $\Psi_{jm}(x)$  следующим образом:

$$(\hat{P}_{bisp}^{sph} \otimes \hat{P}) \Psi_{ejm}(x) =$$

$$= (-1)^{j+1} \left[ T_{+1/2} \otimes \begin{pmatrix} f_4 D_0 \\ f_3 D_{+1} \\ f_2 D_0 \\ f_1 D_{+1} \end{pmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{pmatrix} g_4 D_{-1} \\ g_3 D_0 \\ g_2 D_{-1} \\ g_1 D_0 \end{pmatrix} \right].$$

Т. е., оператор с требуемыми свойствами строится так:

$$\begin{aligned} \hat{N}_{sph}^S &\equiv \hat{\pi}^S \otimes \hat{P}_{bisp}^{sph} \otimes \hat{P}, \\ \hat{\pi}^S T_{+1/2} &= (a + ib) T_{-1/2}, \\ \hat{\pi}^S T_{-1/2} &= (a + ib) T_{+1/2}. \end{aligned}$$

Общий множитель при величине  $\hat{\pi}^S$  не существен при разделении переменных, ниже будем полагать  $(\hat{\pi}^S)^2 = a^2 + b^2 = +1$ . Из уравнения

$\hat{N}_{sph}^S \Psi_{jm} = N \Psi_{jm}$  находим два собственных значения  $N = \delta(-1)^{j+1}$ ,  $\delta = \pm 1$  и ограничения на функции:

$$\begin{aligned} g_1 &= \delta(a + ib) f_4, \quad g_2 = \delta(a + ib) f_3, \\ g_3 &= \delta(a + ib) f_2, \quad g_4 = \delta(a + ib) f_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая (3.5), получаем уравнения, которые непротиворечивы только при условии, что  $\tilde{F}(r) = 0$  и  $\tilde{\Phi}(r) = 0$ . Далее ограничиваемся рассмотрением чисто монопольного внешнего потенциала и исключаем дополнительное взаимодействие дублета со скалярными полями Хиггса. При этом система уравнений (3.3) принимает более простой вид (вводим обозначение  $\Delta = a + ib$ )

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 + i \frac{W}{r} \delta \Delta f_2 - M f_2 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - i \frac{W}{r} \delta \Delta f_4 - M f_4 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - i \frac{W}{r} \Delta^{-1} \delta f_4 - M - \tilde{\Phi} f_4 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 + i \frac{W}{r} \Delta^{-1} \delta f_2 - M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В системе (3.6) необходимо различать два случая в зависимости от выражения для  $W(r)$ . Если  $W(r) = 0$ , различие между  $\Delta$  и  $\Delta^{-1}$  в уравнениях (3.6) не является значимым, поскольку соответствующие члены просто исчезают из уравнений. Для этого случая система (3.6) превращается в следующую

$$W(r) = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 - M f_2 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - M f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Анализ радиальных уравнений может быть доведен до полного решения. Действительно, уравнения (3.7) допускают дальнейшие упрощения за счет диагонализации оператора  $\hat{K}_{0,\phi} = -i \hat{\gamma}^0 \hat{\Sigma}_{0,\phi}$ .

Из уравнения  $\hat{K}_{0,\phi} \Psi_{jm} = \lambda \Psi_{jm}$  следует

$$\lambda = -\mu \sqrt{j(j+1)}, \quad (\mu = \pm 1),$$

$$f_4 = \mu f_1, \quad f_3 = \mu f_2, \quad g_4 = \mu g_1, \quad g_3 = \mu g_2.$$

Соответственно система (3.7) приводит к

$$\begin{aligned} \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - \mu M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - i \frac{v}{r} f_1 - \mu M f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения решаются в функциях Бесселя. Волновая функция дублета с квантовыми числами  $(\varepsilon, j, m, \delta, \mu)$  имеет вид

$$\Psi_{\varepsilon j m \delta \mu}^\Delta(x) = T_{+1/2} \otimes \begin{pmatrix} f_1 D_{-1} \\ f_2 D_0 \\ \mu f_3 D_{-1} \\ \mu f_4 D_0 \end{pmatrix} + \mu \delta \Delta T_{-1/2} \otimes \begin{pmatrix} f_4 D_0 \\ f_3 D_{+1} \\ \mu f_2 D_0 \\ \mu f_1 D_{+1} \end{pmatrix}.$$

Данная ситуация реализуется при  $W \neq 0$ . Здесь уравнения (3.6) совместимы, только если  $\Delta = \Delta^{-1}$ , следовательно,  $\Delta = (a + ib) = \pm 1$ . Комбинируя это соотношение с нормировочным условием  $(a + ib)(a - ib) = 1$ , можно получить  $a = \pm 1$  и  $b = 0$  (для определенности выберем параметр  $a$  равным +1). Соответствующий набор радиальных уравнений, полученный из (3.6), следующий:

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 + i \frac{W}{r} \delta f_2 - M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - i \frac{W}{r} \delta f_4 - M f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай  $j = 0$ , собственные значения и ограничения на волновую функцию:

$$N = -\delta, \quad \delta = \pm 1,$$

$$g_1(r) = \delta \Delta f_4(r), \quad g_3(r) = \delta \Delta f_2(r).$$



Величины  $\tilde{F}$  и  $\tilde{\Phi}$  должны быть приравнены нулю. Возникают две возможности:

$$\begin{aligned} W(r) &= 0, \\ \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - M f_4 &= 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} W(r) &\neq 0, \\ \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - i \frac{\delta W}{r}\right) f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + i \frac{\delta W}{r}\right) f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

#### 4 Нерелятивистское приближение: случай $j = 0$

В системе уравнений (3.10) при  $\delta = +1$ :

$$\begin{aligned} \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - i \frac{W}{r}\right) f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + i \frac{W}{r}\right) f_4 &= 0 \end{aligned}$$

сложим и вычтем уравнения друг из друга. В результате получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{W}{r}\right) f + (\varepsilon + M)g &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{W}{r}\right) g - (\varepsilon - M)f &= 0, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$f_2(r) + f_4(r) = f(r), \quad i[f_2(r) - f_4(r)] = g(r).$$

Выделим энергию покоя следующей формальной заменой  $\varepsilon = M + E$ ; в результате получаем (в первом уравнении пренебрегаем нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{W}{r}\right) f + 2Mg &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{W}{r}\right) g - Ef &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Исключаем из (4.1) функцию  $g(r)$ , получаем одномерное уравнение Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \left(\frac{W}{r}\right) - \frac{W^2}{r^2}\right] f(r) = 0. \quad (4.2)$$

Воспользуемся известным в литературе монополярным решением Богомольного – Прасада – Зоммерфельда [11], [12]. В декартовой изотопической калибровке оно выглядит так:

$$\begin{aligned} W_i^a(x) &= \varepsilon_{iab} x^b K(r), \\ W &= er^2 K(r) + 1, \end{aligned}$$

где функция  $W(r)$  задается шестью способами [13]:

$$W = \pm 1, \quad W = \pm \frac{Ar}{\text{sh} Ar}, \quad W = \pm \frac{Ar}{\sin Ar}, \quad (4.3)$$

$A$  – произвольная постоянная.

Рассмотрим сначала первые два случая из (4.3). Первый вариант:

$$W(r) = +1, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad (4.4)$$

приводит к задаче Шредингера с эффективным центробежным полем отталкивания от центра. В переменной  $x = 2\sqrt{-2ME} r$  решение уравнения (4.4) строятся в функциях Бесселя. Второй случай:

$$\begin{aligned} W(r) &= -1, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME\right) f(r) = 0, \\ f &= e^{\pm i\sqrt{2ME} r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решение в (4.5) описывает бегущие сферические волны.

Теперь рассмотрим две возможности, наиболее часто исследуемые в литературе, как представляющие несингулярный монополь. Первая возможность:

$$W = + \frac{Ar}{\text{sh} Ar}, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{A^2}{\text{ch} Ar - 1}\right) f = 0, \quad (4.6)$$

это уравнение Шредингера в эффективном поле отталкивания. Здесь не может быть связанных состояний. Рассмотрим уравнение (4.6) детально. Сделаем замену переменной:

$$x = \frac{\cosh Ar + 1}{2}, \quad (4.7)$$

$$r \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1), \quad r \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$\left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{d}{dx} - \frac{2ME}{A^2} - \frac{1}{2(1-x)}\right] f(x) = 0$$

и введем подстановку  $f(x) = x^a(1-x)^b F(x)$  при  $a = 0, 1/2, b = -1/2, 1$  уравнение (4.7) для  $F(x)$  является уравнением гипергеометрического типа

$$\begin{aligned} \left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \left(2a + \frac{1}{2} - (2a + 2b + 1)x\right) \frac{d}{dx} - \right. \\ \left. - (a+b)^2 - \frac{2ME}{A^2}\right] F(x) = 0 \end{aligned}$$

с параметрами

$$\begin{aligned} \alpha = a + b + \frac{\sqrt{-2ME}}{A}, \quad \beta = a + b - \frac{\sqrt{-2mE}}{A}, \\ \gamma = 2a + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Чтобы иметь требуемое для связанных состояний поведение, нужно выбирать  $a = 0, b = +1/2$ ; при этом  $a + b$  не может быть отрицательным, следовательно  $\alpha > 0$ . Это означает, что связанных состояний в системе не существует.

Вторая возможность:

$$W = - \frac{Ar}{\text{sh} Ar}, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{A^2}{\text{ch} Ar + 1}\right) f = 0, \quad (4.8)$$

это уравнение Шредингера в эффективном поле притяжения (рисунок 4.1)

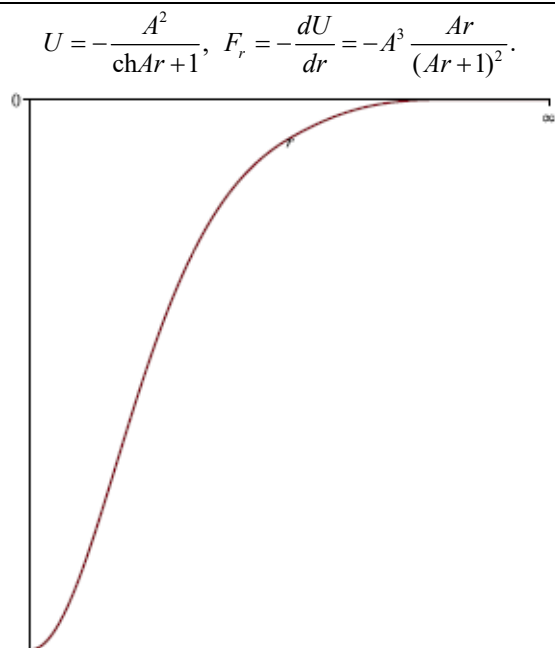


Рисунок 4.1 – Эффективное поле притяжения  $U(r)$

Здесь, вообще говоря, могут существовать связанные состояния. В уравнении (4.8) сделаем замену переменной:

$$x = \frac{\cosh Ar + 1}{2}, \quad r \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1), \quad r \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

и введем подстановку  $f(x) = x^a (1-x)^b F(x)$ ,  $a = -\frac{1}{2}, b = 0, \frac{1}{2}$ ; уравнение для  $F(x)$  является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\alpha = a + b + \frac{\sqrt{-2ME}}{A}, \quad \beta = a + b - \frac{\sqrt{-2ME}}{A},$$

$$\gamma = 2a + \frac{1}{2}.$$

Имея в виду связанные состояния, будем строить решение, стремящееся к нулю на бесконечности. Для этих целей подходят два решения гипергеометрического уравнения:

$$U_3(x) = (-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta; \frac{1}{x}\right),$$

$$U_3(\infty) \sim (-x)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0;$$

$$U_4(x) = (-x)^{-\beta} F\left(\beta + 1 - \gamma, \beta, \beta + 1 - \alpha; \frac{1}{x}\right),$$

$$U_4(\infty) \sim (-x)^{-\beta}, \quad \beta > 0.$$

С учетом тождеств

$$-\alpha = -a - b - \frac{\sqrt{-2ME}}{A}, \quad -\beta = -a - b + \frac{\sqrt{-2ME}}{A}$$

заключаем, что пригодно только решение  $U_3$ , при этом полная функция  $f(x)$  на бесконечности обращается в ноль:

$$f(x \rightarrow +\infty) \sim x^a (-x)^b U_3(x \rightarrow +\infty) \sim x^{-\frac{\sqrt{-2ME}}{A}}. \quad (4.10)$$

Найдем, как ведет себя это решение около точки  $x = 1$  ( $r = 0$ ). Для этого воспользуемся соотношением Куммера [15] (явный вид коэффициентов  $K, L$  разложения не требуется)

$$U_3(x) = KU_2(x) + LU_6(x),$$

$$U_2(x) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x),$$

$$U_6(x) = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - x),$$

$$U_3(x \rightarrow 1) = K + L(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta}, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{1}{2} - 2b.$$

Таким образом,

$$f(x \rightarrow 1) \sim (1 - x)^b [K + L(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta}] \sim (1 - x)^b K + (1 - x)^{1/2 - b} L. \quad (4.11)$$

Из (4.11) следуют две возможности (обе они приводят к конечным значениям функции  $f(r \rightarrow 0)$ ):

$$b = 0, \quad f(x \rightarrow 1) \sim K; \quad b = \frac{1}{2}, \quad f(x \rightarrow 1) \sim L.$$

Обратимся к условию квантования. Применяя стандартное требование обращения гипергеометрического ряда в  $U_3(x)$  в полином  $\alpha = -n$ , приходим (с учетом  $a = -1/2, b = 0, +1/2$ ) к единственной нетривиальной возможности удовлетворить этому условию

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad \frac{\sqrt{-2ME}}{|A|} = -n + \frac{1}{2}, \quad n = 0,$$

т. е. существует единственное связанное состояние

$$\frac{\sqrt{-2ME}}{|A|} = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{A^2}{8M}. \quad (4.12)$$

Легко убедиться прямой проверкой, что отвечающая уровню энергии (4.12) функция

$$f(x) = x^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\cosh Ar + 1}}$$

является решением уравнения (4.8) при найденном значении энергии (4.12). Эта функция квадратично интегрируема, нормировочный интеграл имеет вид

$$I = \int_0^\infty f^2(r) dr$$

$$= \frac{1}{A} \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{A} \frac{2}{x} \sqrt{x^2 - x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{2}{A}.$$

### 5 Нерелятивистское приближение: случай $j > 0$

Теперь обратимся к системе уравнений при  $j > 0$  (см. (3.8)) при  $\delta = +1$ . В пределах каждой пары в (3.8) сложим и вычтем уравнения. С использованием обозначений

$$f_1 + f_3 = F, \quad i(f_1 - f_3) = f,$$

$$(f_2 + f_4) = G, \quad i(f_2 - f_4) = g \quad (5.1)$$

получаемые уравнения записываются так:

$$\frac{d}{dr} f + \varepsilon F + \frac{\nu}{r} g - MF = 0,$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dr}F + \varepsilon f - \frac{\nu}{r}G + Mf &= 0, \\ -\frac{d}{dr}g + \varepsilon G - \frac{\nu}{r}f + \frac{W}{r}g - MG &= 0, \\ -\frac{d}{dr}G - \varepsilon g - \frac{\nu}{r}F - \frac{W}{r}G - Mg &= 0. \end{aligned}$$

Выделяем энергию покоя заменой  $\varepsilon = E + M$  и затем пренебрегаем нерелятивистской энергией  $E$  в сравнении с удвоенной энергией покоя  $2M$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}f + Ef + \frac{\nu}{r}g &= 0, \quad \frac{d}{dr}F + \frac{\nu}{r}G - 2Mf = 0, \\ -\frac{d}{dr}g + EG - \frac{\nu}{r}f + \frac{W}{r}g &= 0, \\ \frac{d}{dr}G + \frac{\nu}{r}F + \frac{W}{r}G + 2Mg &= 0. \end{aligned}$$

Исключая малые компоненты  $f, g$ , находим два зацепляющихся уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \left( \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu W}{r^2} \right) G, \\ \Delta G &= - \left( \frac{d}{dr} \left( \frac{W}{r} \right) - \frac{W^2}{r^2} \right) G + \left( \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu W}{r^2} \right) F, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $\Delta = \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{\nu^2}{r^2} \right)$ ,  $\nu = \sqrt{j(j+1)}$ .

Рассмотрим первый случай  $W(r) = +1$ ; в матричной форме имеем уравнение

$$\frac{1}{2}r^2\Delta \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix}.$$

Нужно найти преобразование, которое диагонализует матрицу справа:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 1 \end{vmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \\ S^{-1} &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\nu^2}}{2\nu} \\ \frac{1}{2\nu} & \frac{1}{2\nu} \end{vmatrix}, \\ S &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+4\nu^2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\nu^2}} \\ \frac{\nu}{\sqrt{1+4\nu^2}} & -\frac{\nu}{\sqrt{1+4\nu^2}} \end{vmatrix}, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu^2}. \end{aligned}$$

Учитывая  $\sqrt{1+4\nu^2} = 2j+1$ , находим выражения для  $\lambda_1, \lambda_2$ :  $\lambda_1 = -j$ ,  $\lambda_2 = j+1$ . Далее получаем несвязанные уравнения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{j(j+3)}{r^2} \right) F' &= 0, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{(j-2)(j+1)}{r^2} \right) G' &= 0. \end{aligned}$$

Они решаются в функциях Бесселя, приводя к бегущим сферическим волнам.

Во втором случае  $W(r) = -1$  с самого начала из (5.2) получаем несвязанные уравнения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{j(j+1)}{r^2} \right) F &= 0, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{j(j+1)-1}{r^2} \right) G &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения также решаются в функциях Бесселя, и не имеют решений, отвечающих связанным состояниям.

Для случаев

$$W = \pm \frac{Ar}{\sinh Ar}, \quad W = \pm \frac{Ar}{\sin Ar}$$

система зацепляющихся уравнений второго порядка (5.2) оказывается слишком сложной. Здесь метод приведения задачи к несвязанным уравнениям второго порядка реализовать не удастся, и конечная задача сводится к анализу уравнений 4-го порядка. Эти уравнения едва ли можно решить аналитически из-за одновременного присутствия в уравнениях рациональных и трансцендентных функций от переменной  $r$ .

## 6 Дублет дираковских частиц в пространствах постоянной кривизны

Обобщим приведенный выше анализ, сопоставив поведение дублета частиц в трех пространствах постоянной кривизны: Евклида  $E_3$ , Лобачевского  $H_3$  и Римана  $S_3$ . Это даст возможность сформулировать дополнительные аргументы относительно того, какие решения уравнений Янга – Миллса представляют физический и теоретический интерес. Для определенности будем приводить формулы для случая сферического пространства  $S_3$ , переход к пространству Лобачевского достигается посредством формальных замен.

В сферической системе координат метрика пространства  $S_3$  определяется так:

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.1)$$

Уравнение Дирака для дублета частиц принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \left[ \gamma^0 (i\partial_t + eF(r)t^3) + i\gamma^3 \left( \partial_r + \frac{1}{\operatorname{tgr} r} \right) + \frac{1}{\sin r} \Sigma_{\theta, \phi}^S + \right. \\ \left. + \frac{e r^2 K + 1}{\sin r} (\gamma^1 \otimes t^2 - \gamma^2 \otimes t^1) - \right. \\ \left. - (M + \kappa r \Phi(r)t^3) \right] \Psi^S = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

После необходимых вычислений (они существенно отличаются от сделанных при анализе случая плоского пространства) получаем систему радиальных уравнений, которую можно значительно упростить, если потребовать диагонализации

дискретного оператора, действующего одновременно в биспинорном и изотопическом пространствах. Приводим конечный результат при нетривиальном неабелевом потенциале:

$$W(r) \neq 0, j = 0, \\ \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - i\delta \frac{W}{\sin r}\right) f_2 = 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + i\delta \frac{W}{\sin r}\right) f_4 = 0; \quad (6.3)$$

при  $W(r) \neq 0, j \neq 0,$

$$\left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{\sin r} f_4 - Mf_1 = 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{\sin r} f_3 + i \frac{W}{\sin r} \delta f_2 - Mf_2 = 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{\sin r} f_2 - Mf_3 = 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{\sin r} f_1 - i \frac{W}{\sin r} \delta f_4 - Mf_4 = 0. \quad (6.4)$$

Имея системы радиальных уравнений для случая сферического пространства  $S_3$  (6.3) и (6.4), легко написать аналогичные системы радиальных уравнений в пространствах  $E_3$  и  $H_3$ ; для этого достаточно формально заменить  $\sin r \Rightarrow r, \sin r \Rightarrow \sinh r$  соответственно.

Напомним явный вид радиальной функции  $W(r)/\sin r$ , найденной во всех трех моделях пространства [13]:

$$S_3, \frac{W}{\sin r} = \varphi(r), \quad r \in [0, \pi], \\ H_3, \frac{W}{\sinh r} = \varphi(r), \quad r \in [0, +\infty), \\ E_3, \frac{W}{r} = \varphi(r), \quad r \in [0, +\infty). \quad (6.5)$$

Имеем шесть возможностей для выбора явного вида функции  $\varphi(r)$ :

$$\varphi(r) = \pm \frac{a}{\sin ar}, \quad \pm \frac{a}{\sinh ar}, \quad \pm \frac{a}{ar};$$

различающиеся знаком решения будем различать с помощью множителя  $\mu = \pm 1$ .

Если обратиться к явному виду уравнений при  $j \neq 0$ , то легко заметить, что среди трех пар решений, возникающих при анализе уравнений Янга-Миллса в пространствах постоянной кривизны  $E_3, H_3, S_3$  для монополюной подстановки, для каждого пространства имеется только одна пара решений, которая выделена своей очевидной связью с выбранной геометрией пространства. Ситуация может быть охарактеризована следующим образом

	$E_3$	$H_3$	$S_3$
$ar$	*	-	-
$\sinh ar$	-	*	-
$\sin ar$	-	-	*

В этой связи следует специально отметить, что известное несингулярное монополюное решение в пределе Богомольного – Прасада – Зоммерфельда в пространстве Минковского является в определенном смысле искусственной комбинацией геометрии плоского пространства с возможностью, ассоциированной с геометрией пространства Лобачевского.

В трех моделях геометрии для нулевого значения квантового числа  $j$  имеем уравнения:

$$E_3, \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu \frac{i}{r}\right) f_2 = 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu \frac{i}{r}\right) f_4 = 0; \quad (6.6)$$

$$S_3, \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu \frac{i}{\sin r}\right) f_2 = 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu \frac{i}{\sin r}\right) f_4 = 0; \quad (6.7)$$

$$H_3, \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu \frac{i}{\sinh r}\right) f_2 = 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu \frac{i}{\sinh r}\right) f_4 = 0. \quad (6.8)$$

Для простоты ограничимся подробным изложением только случая  $j = 0$ .

В системах (6.6)–(6.8) сложим и вычтем уравнения друг из друга. В результате соответственно получим:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{r}\right) f + (\varepsilon + M)g = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{r}\right) g - (\varepsilon - M)f = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) f + (\varepsilon + M)g = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) g - (\varepsilon - M)f = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right) f + (\varepsilon + M)g = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right) g - (\varepsilon - M)f = 0,$$

где использованы обозначения

$$f_2(r) + f_4(r) = f(r), \\ i[f_2(r) - f_4(r)] = g(r).$$

Выделим энергию покоя следующей формальной заменой  $\varepsilon = M + E$ ; пренебрегаем нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{r}\right) f + 2Mg = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{r}\right) g - Ef = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) f + 2Mg = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sin r}\right)g - Ef = 0, \quad (6.9)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right)f + 2Mg = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right)g - Ef = 0.$$

Исключаем из (6.9) функции  $g(r)$ , получаем нерелятивистские уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\delta\mu}{r^2} - \frac{1}{r^2} + 2ME\right)f = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\delta\mu \cos r}{\sin^2 r} - \frac{1}{\sin^2 r} + 2ME\right)f = 0, \quad (6.10)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\delta\mu \cosh r}{\sinh^2 r} - \frac{1}{\sinh^2 r} + 2ME\right)f = 0.$$

Все три уравнения (6.10) решаются в гипергеометрических функциях, при этом не возникает решений, отвечающих связанным состояниям. Исключением является случай сферического пространства, где дискретность уровней энергии возникает из-за топологии самого пространства [16].

Приведем конечные результаты анализа нерелятивистского приближения при больших значениях  $j > 0$ .

В сферическом пространстве нерелятивистские уравнения выглядят так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sin^2 r}\right)F &= \frac{\cos r + \delta\mu}{\sin^2 r}(0 \cdot G + vG), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sin^2 r}\right)G &= \\ &= \frac{\cos r + \delta\mu}{\sin^2 r}(vF + \delta\mu G). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Система переписывается в матричной форме

$$\Delta \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & v \\ v & \delta\mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix}, \quad (6.12)$$

$$\Delta = \left(\frac{\cos r + \delta\mu}{\sin^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sin^2 r}\right).$$

Аналог этой системы в пространстве Лобачевского будет выглядеть так:

$$\Delta \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & v \\ v & \delta\mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\Delta = \left(\frac{\cosh r + \delta\mu}{\sinh^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sinh^2 r}\right).$$

В обеих системах (6.11) и (6.12) матрицы справа диагонализуются с помощью линейных преобразований; в результате возникают два несвязанных уравнения. В случае сферического пространства Римана эти уравнения приводят к дискретным значениям энергии из-за компактности пространства [16]. В пространстве Лобачевского

возникающие дифференциальные уравнения не содержат решений, отвечающих связанным состояниям.

### Заключение

Построено нерелятивистское уравнение паулиевского типа для дублета дираковских частиц, учитывающее присутствие внешних неабелевых полей. Оно детализировано в случае неабелевых монополюльных потенциалов: вложенного в неабелеву модель потенциала дираковского монополя и потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда. С применением аппарата функций Вигнера проведено разделение переменных. В случае минимального значения полного момента  $j = 0$  уравнение Паули сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка, которое решается точно, возникающие эффективные потенциалы допускают существование одного единственного связанного состояния. В случае  $j > 0$  в нерелятивистском приближении задача сводится к зацепляющейся системе двух уравнений, при специальном виде неабелева потенциала в приближении Богомольного – Прасада – Зоммерфельда эти уравнения удается разделить и также решить уравнения, построив бегущие сферические волны.

Проведено сопоставление поведения дублета дираковских частиц в трех пространствах постоянной кривизны: Евклида  $E_3$ , Лобачевского  $H_3$  и Римана  $S_3$ . Это дает возможность сформулировать дополнительные аргументы относительно того, какие решения уравнений Янга – Миллса представляют физический и теоретический интерес. В частности, известное несингулярное монополюльное решение в пределе Богомольного – Прасада – Зоммерфельда в пространстве Минковского является в определенном смысле искусственной комбинацией геометрии плоского пространства с возможностью, ассоциированной с геометрией пространства Лобачевского. Это позволяет высказать точку зрения, что отношение к физическому статусу данного монополюльного решения, возможно, следует пересмотреть. Показано, что в такой трактовке во всех трех пространствах связанных состояний для дублета фермионов в полях неабелева монополя не возникает.

### ЛИТЕРАТУРА

1. 't Hooft, G. Monopoles in unified gauge theories / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. – 1974. – Vol. 79, № 2. – P. 276–284.
2. Поляков, А.М. Спектр частиц в квантовой теории поля / А.М. Поляков // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 20, вып. 6. – С. 430–433.
3. Julia, B. Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory / B. Julia,

A. Zee // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 11, № 8. – P. 2227–2232.

4. Bais, F.A. Magnetic-monopole solution of non-Abelian gauge theory in curved space-time / F.A. Bais, R.J. Russel // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 11, № 10. – P. 2692–2695.

5. Swank, J.H. Fermions in Yang – Mills potentials / J.H. Swank, L.J. Swank, Tekin Dereli // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 12, № 4. – P. 1096–1102.

6. Jackiw, R. Solitons with fermion number 1/2 / R. Jackiw, C. Rebbi // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 13, № 12. – P. 3398–3409.

7. Jackiw, R. Spin from isospin in a gauge theory / R. Jackiw, C. Rebbi // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 36, № 19. – P. 1116–1119.

8. Hasenfratz, P. Fermion-boson puzzle in a gauge theory / P. Hasenfratz, G. 't Hooft // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 36, № 19. – P. 1119–1122.

9. Прохвятилов, Е.В. Фермионы в поле монополя Хуфта – Полякова / Е.В. Прохвятилов, В.А. Франке // Ядер. физика. – 1976. – Т. 24, вып. 4. – С. 856–860.

10. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.

11. Prasad, M.K. Exact classical solution of the 't Hooft monopole and Julia – Zee dyon / M.K. Prasad, C.M. Sommerfield // Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 35, № 12. – P. 760–762.

12. Богомольный, Е.Б. Стабильность классических решений / Е.Б. Богомольный // Ядер. физика. – 1976. – Т. 24. – С. 861–870.

13. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.

14. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.

15. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдей. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

16. Red'kov, V.M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V.M. Red'kov, E.M. Ovsyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.

Поступила в редакцию 22.03.16.