Е. М. ОВСИЮК, А. Д. КОРАЛЬКОВ, А. А. НИКОЛАЕНКО
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 И ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, АНАЛИЗ ИХ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В работе [1] было предложено обобщенное уравнение для частицы со спином 1/2, характеризующейся тремя разными значениями массового параметра M_1, M_2, M_3. Цель настоящей работы – исследовать возможные значения этих трех параметров. Параметры M_i определяются корнями λ_i кубического уравнения

$$M_i = \frac{M}{\lambda_i}, \quad i = 1,2,3, \quad \lambda^3 + \lambda^2 a + \lambda b + c = 0\,,$$

где (величины c_1, c_2 – вещественные)

$$a = -(c_1 + c_2), \quad b = c_1 c_2 - f\,|c_3|^2 - g\,|c_4|^2, \quad c = f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2, \quad f, g \in \{-1, +1\}\,.$$

Выполнив стандартную замену переменной, преобразуем уравнения к более простому виду:

$$y^3 + py + q = 0\,, \quad y = \lambda - \frac{c_1 + c_3}{3} = \lambda + \frac{a}{3}\,,$$

$$p = -\frac{a^3}{3} + b = -\frac{1}{3}(c_1 + c_3)^3 + c_1 c_2 - f\,|c_3|^2 - g\,|c_4|^2\,,$$

$$q = 2(\frac{a}{3})^3 - \frac{ab}{3} + c = -\frac{2}{27} c_1 + c_3{}^3 + \frac{c_1 + c_2}{3}\; c_1 c_2 - f\,|c_3|^2 - g\,|c_4|^2\} + \{f\,|c_3|^2 + g\,|c_4|^2\;.$$

По физическим соображениям предполагаем вещественность и положительность всех трех корней, это возможно при выполнении неравенств

$$p < 0, \qquad Q < 0, \text{ где } \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Известно, что решения кубического уравнения (1) могут быть представлены в тригонометрической форме:

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \quad \cos\alpha = \frac{-q/2}{\sqrt{-(\frac{p}{3})^3}}\,,$$

что дает для исходных физически интерпретируемых корней следующие выражения:

$$\lambda_1 = y_1 + \frac{c_1 + c_2}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3} + \frac{c_1 + c_2}{3} >,$$

$$\lambda_2 = y_2 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{c_1 + c_2}{3},$$

$$\lambda_3 = y_3 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{c_1 + c_2}{3}.$$

Нетрудно получить следующие равенства:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2\,,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2f\,|c_3|^2 + 2g\,|c_4|^2\,,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_2 = c_1 c_2 - f\,|c_3|^2 - g\,|c_4|^2,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -f c_2\,|c_3|^2 - g c_1\,|c_4|^2\,.$$

Очевидно, что случаю трех положительных корней может соответствовать только вариант $f = -1, g = -1$; при этом предыдущие соотношения принимают вид

$$\lambda_{1,2,3} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2 > 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2|c_3|^2 - 2|c_4|^2 > 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_2 = c_1 c_2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 > 0, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +c_2\,|c_3|^2 + c_1\,|c_4|^2 > 0.$$

Введем обозначения $|c_4|^2 = a^2, |c_3|^2 = b^2$ и проанализируем два соотношения из приведенных выше:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3};$$

отсюда находим выражения для λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3}}\,,$$

$$\lambda_2 = \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3}}\,, \qquad (2)$$

под корнем должно стоять положительно число. Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3 > 0$, то должно выполняться неравенство $0 < \lambda_3 < c_1 + c_2$; откуда следует возможность тригонометрической параметризации значений для λ:

$$\lambda_3 = (c_1 + c_2)\cos\alpha\,, \qquad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Соответственно формулы (2) переписываются так:

$$\lambda_1 = (c_1 + c_2)\left\{\frac{1-\cos\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3}\frac{1}{\cos\alpha}}\right\},$$

$$\lambda_2 = (c_1 + c_2)\left\{\frac{1-\cos\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3}\frac{1}{\cos\alpha}}\right\}.$$

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3}\,.$$

Получим выражения для корней λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 = \lambda_3\ \frac{1}{\cos\alpha}\left\{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}\right\},$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\ \sin^2(\alpha/2) + \sqrt{(\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}\ \ .$$

Под конем должно стоять положительное число, т. е.

$$\cos\alpha\ \sin^4(\alpha/2) > \Gamma\,. \qquad (3)$$

Отсюда получаем выражения для трех возможных масс (для краткости используем параметр μ)

$$M_3 = \frac{M}{\lambda_3} = \frac{M}{(c_1 + c_2)}\frac{1}{\cos\alpha} = \mu \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\,,$$

$$M_2 = \frac{M}{\lambda_2} = \frac{M}{\lambda_3}\ \frac{\cos\alpha}{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}},$$

$$M_1 = \frac{M}{\lambda_2} = \frac{M}{\lambda_3}\ \frac{\cos\alpha}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma/\cos\alpha}};$$

при численном счете можно полагать $\mu = 1$; необходимо помнить об условии (3).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Об описании частицы со спином 1/2 и тремя массовыми параметрами во внешних электромагнитных полях / О.В. Веко, А.Я. Войнова, В.В. Кисель, А.Д. Коральков, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // VI Конгресс физиков Беларуси (20-23 ноября 2017): Сборник научных трудов / редкол.: С.Я. Килин (гл. ред.) [и др.] – Минск: Институт физика НАН Беларуси, 2017. – С. 48–49.