

## МАТЭМАТЫКА

УДК 519.240

С.Н. Гуз, М.Д. Юдин

ОДИН ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭВОЛЮЦИИ ПЯТЕН  
РАДИОАКТИВНОЙ ЗАРАЖЕННОСТИЧасть 2. Отдельные пятна<sup>1</sup>

Так же, как в [1], эволюцию радиоактивных пятен мы рассматриваем как реализацию некоторого виртуального случайного поля (подробнее см. в [2]). В свою очередь, реализация рассматривается как стохастически непрерывный во времени диффузионный случайный процесс [3] с массопереносом, модель которого мы получаем в виде плотности предельного распределения сумм двумерных случайных величин – приращений процесса. При этом, как указывалось в [2], как только поверхность теоретической плотности будет подобрана адекватно степени зараженности в пределах радиационного пятна, аппликаты поверхности в определенном масштабе будут поточечно отражать интенсивность пятна.

Как уже отмечалось в [1; 2], предположение стохастической непрерывности обеспечивает равномерную бесконечную малость системы серий приращений процесса при неограниченном дроблении времени. Поэтому можно считать, что к суммам приращений без предположения их независимости, применимы фундаментальные теоремы решения центральной предельной проблемы теории вероятностей, полученной для случая сумм зависимых случайных векторов [4–6], поскольку требования этих теорем довольно естественны.

Основными ограничениями зависимости приращений процесса предполагаются  $m$ -зависимости или выполнения условия равномерно сильного перемешивания с достаточно быстро убывающим коэффициентом.

1<sup>0</sup>. Теоретическая часть. Пусть  $\{\eta_{ns}\}_{s=1}^n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , – система серий двумерных случайных векторов с ограниченными дисперсиями,  $\eta_{ns} = (\eta_{ns}^{(1)}, \eta_{ns}^{(2)})$ ,  $M\eta_{ns}^{(i)} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $s = \overline{1, n}$ ,  $t = (t_1, t_2)$ ,  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ ,  $S_n = \sum_{s=1}^n \eta_{ns}$ , матрица  $B_n = \|b_{n(i,j)}\|$ , где  $b_{n(i,j)} = \sum_{|s-p| \geq 0} M\eta_{ns}^{(i)}\eta_{np}^{(j)}$ ,  $K_n(x) = \sum_{s=1}^n M(\eta_{ns}^2; \eta_{ns} \leq x)$ , где  $\eta_{ns} < x$  означает, что  $\eta_{ns}^{(i)} \leq x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Согласно основным теоремам из [4–6], условия которых мы считаем выполненными, если  $K_n(x) \xrightarrow{сл.} K(x)$ ,  $B_n \rightarrow B$ , при  $n \rightarrow \infty$ , то суммы  $S_n$  будут иметь предельное распределение, логарифм характеристической функции (х. ф.) которого

$$\psi(t) = \int_{R^2} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)) \frac{1}{x^2} dK(x) - \frac{(t, Bt^*)}{2}, \quad (1)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение,  $t^*$  – вектор-столбец, а из области интегрирования исключен нуль.

2<sup>0</sup>. Моделирование. Пусть  $\xi_{ns} = (\xi_{ns}^{(1)}, \xi_{ns}^{(2)})$  – приращение диффузирующей частицы за время  $\Delta\tau_{ns}$ . Тогда  $\ell = \sum_{s=1}^n \xi_{ns}$  – продвижение частицы за время  $\tau = \sum_{s=1}^n \Delta\tau_{ns}$ . При неограниченном дроблении времени  $\tau$ , когда  $n \rightarrow \infty$  и  $\max_s \Delta\tau_{ns} \rightarrow 0$ , в силу стохастической непрерывности процесса мы получим систему серий  $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$  приращений процесса –

<sup>1</sup> Первая часть опубликована в [1]

систему равномерно бесконечно малых случайных векторов. Поэтому распределение вектора  $\ell$  можно найти как предельное распределение сумм  $\sum_{s=1}^n \xi_{ns}$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\max_s \Delta \tau_{ns} \rightarrow 0$ .

Полагая  $\eta_{ns} = \xi_{ns} - M\xi_{ns}$ , получаем систему серий  $\{\eta_{ns}\}$  центрированных случайных векторов,  $M\eta_{ns} = 0$ , относительно которой, как уже говорилось, можно считать а priori, что она удовлетворяет условиям базовых теорем работ [5; 6]. Поэтому предельное распределение сумм  $\sum_{s=1}^n \eta_{ns}$  определяется по формуле (1).

При получении дифференциальной части будущей теоретической плотности мы исходим из положительно апробированной концепции разделения приращений  $\xi_{ns}$  на малые, броуновского типа, которых большинство, и редкие, относительно большие, вызванные влиянием внешних факторов (см., например, [7]). Получим, аналогично линейному случаю в [1], условия для любых  $\varepsilon$ -окрестностей  $v_o, v_k$ , расположенных на одной прямой, проходящей через точки  $O = (o^{(1)}, o^{(2)})$ , и  $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)})$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $x_k \neq 0$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{v_o} y^2 dP\{\eta_{ns} < x\} &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{v_k} y^2 dP\{\eta_{ns} < x\} &= \lambda_k \geq 0, \quad k = \overline{1, m}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{\bigcup_{i=0}^m v_i} y^2 dP\{\eta_{ns} < x\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Предполагая, что  $\sum_{s=1}^n M\xi_{ns} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell_0 = (\ell_0^{(1)}, \ell_0^{(2)})$ , из условий (2), определяющих  $K(x)$ , и формулы (1) найдем, что величина  $\ell$  будет иметь теоретическое распределение с логарифмом х. ф.:

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \left( e^{i(t, x_k)} - 1 - i(t, x_k) \right) - \frac{(t, Bt^*)}{2} + i(t, \ell_0). \quad (3)$$

Считая, что входящие в (3) параметры являются функциями времени, из (3) получим теоретическую плотность вероятности величины  $S$ :

$$p_m(x, \tau) = \frac{e^{-\sum_{k=1}^m \lambda_k} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{\substack{q_k=0 \\ k=1, m}}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^m \frac{\lambda_k^{q_k}}{q_k!} \right) \exp\left\{-\frac{1}{2}(z, B^{-1}z^*)\right\}, \quad (4)$$

где  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ ,  $z = x - \left( \ell_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right) - \sum_{k=1}^m q_k x_k$ , матрица  $B^{-1} = \|c_{ij}\|$ ,  $i, j = 1, 2$  обратна матрице  $B$ .

Поверхность плотности (4) для случая  $m = 2$  можно посмотреть в [7].

В частности, при  $m = 1$  получим плотность вероятности

$$p_1(x, \tau) = \frac{e^{-\lambda_1} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{q_1=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{q_1}}{q_1!} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z, B^{-1}z^*)\right\}, \quad (5)$$

где  $z = x - (\ell_0 - \lambda_1 x_1) - q_1 x_1$ .

Поверхности плотностей (4) и (5) направлены вдоль полупрямой  $x = \rho x_1$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ , идущей под некоторым углом  $\alpha$  к оси  $x^{(1)}$ .

Моделирование радиационного пятна мы проведем путем «вращения» локальных поверхностей вида (4) и (5) относительно определенного центра (лучше центр брать в точке наибольшей зараженности). При этом параметры плотностей (4) и (5) и расположение точек  $x_k$  по

каждому направлению рассматриваются, вообще говоря, как функции угла поворота. Мы поступим следующим образом.

Проведем замкнутый контур  $\Gamma$  по ближайшим местам от центра, имеющим повышенную зараженность. Возьмем точку  $x_1$  в тригонометрической форме:  $x_1 = (r_1 \cos \alpha, r_1 \sin \alpha)$ , где  $r_1$  – расстояние от точки  $x_1$  до центра. Если точка  $x_1$  движется по контуру  $\Gamma$ , то  $r_1 = r_1(\alpha)$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Плотность (5) также будет функцией угла  $\alpha$ . Полагая, что  $\alpha$  – случайная величина, например, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 2\pi]$ , по формуле полной вероятности получим плотность вероятности, моделирующую в первом приближении радиоактивное пятно:

$$u_1(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_1(x, \tau, \alpha) d\alpha. \quad (6)$$

Если  $m > 1$ , то по тому же принципу можно выбрать  $m$  контуров с общим центром, для которых  $x_k = (r_k \cos \alpha, r_k \sin \alpha)$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $r_k = r_k(\alpha)$ . Получим более точное приближение, используя (4):

$$u_m(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_m(x, \tau, \alpha) d\alpha. \quad (7)$$

Примеры компьютерных изображений поверхностей вида (6) при различных контурах  $\Gamma$  и значениях параметров впервые получены в [8].

Можно использовать следующие приемы получения наиболее адекватного моделирования радиационного пятна:

1. Варьирование параметров плотностей (6), (7). Добиться адекватности теоретической плотности с интенсивностью зараженности в пределах радиационного пятна можно путем варьирования параметров плотностей (6), (7). Так, мы добились хорошего приближения поверхности теоретической плотности с замерами пятна радиационной зараженности в районе посёлка Мелешковичи Мозырского района [9]. (См. рис.1). Причем, контур  $\Gamma$  выбран по местам, имеющим повышенный уровень радиации. Неравенство  $c_{11} < c_{22}$  отражает то обстоятельство, что в направлении оси  $x_1$  волны повышенной зараженности выражены рельефнее и распространяются дальше.

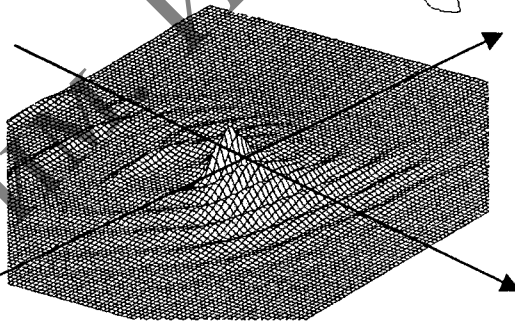


Рис.1.  $\lambda = 3$ ,  $c_{11} = 1$ ,  $c_{21} = c_{12} = 1$ ,  $c_{22} = 4$

2. Добавление новых носителей пуассоновской вероятности продлевает, вообще говоря, теоретическую плотность в нужном направлении.

а) Можно взять несколько «концентрических» контуров  $\Gamma$ ,  $m > 1$ , с различными значениями  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  на каждом из них.

При этом можно использовать формулы (4), (7) или сложить несколько поверхностей (6), полученных для различных контуров  $\Gamma_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ , придав каждой плотности  $u_{li}$  некоторый вероятностный вес  $q_i$ . Получим теоретическую плотность

$$u(x, \tau) = \sum_{i=1}^s q_i u_{li}(x, \tau), \quad (8)$$

где  $q_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^s q_i = 1$ .

б) Если зараженность распространяется в некотором отдельном направлении, то в качестве дополнительного носителя пуассоновской вероятности можно взять соответствующую дугу  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  и сочетать плотность (18) с плотностью (8)

$$V(x, \tau) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_1(x, \tau, \alpha) d\alpha$$

при равномерном распределении  $\alpha$ .

#### *Литература*

1. Гуз С.Н., Юдин М.Д. Один подход к моделированию эволюции пятен радиоактивной зараженности. Часть 1. Линейные направления // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута імя Н.К. Крупскай. – 2001, № 5. – С. 15–19.
2. Гуз С.Н., Юдин М.Д. Конструктор для моделирования стохастически непрерывных случайных процессов // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. – 2003. – № 9. – С. 3–11
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Том 1. – М., 1971.
4. Юдин М.Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994, № 3. – С. 31–35.
5. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997, № 4. – С. 19–23.
6. Юдин М.Д. Применение обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997, № 3. – С. 28–31.
7. Гуз С.Н., Сергеевич Н.В., Юдин М.Д. Сложное пуассоновское распределение в моделировании некоторых деформаций // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута імя Н.К. Крупскай. – 1999, № 2. – С. 26–30.
8. Гуз С.Н., Юдин М.Д. К исследованию случайных процессов с зависимыми приращениями на плоскости // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута імя Н.К. Крупскай. – 1999. – № 1. – С. 85–87.
9. Обследование сельхозугодий Мозырского района Гомельской области и выработка рекомендаций по ведению сельскохозяйственной деятельности в условиях радиоактивного заражения. Отчет о НИР. АН БССР. Институт радиобиологии. – Мн., 1991.

#### *Summary*

The intensity of infection on a plane is simulated with the purpose of prediction of changes of aircraft attitude of a radiation spot.

*Поступила в редакцию 28.09.04.*