

УДК 535.3

Т.Г. Яковчик, В.В. Шепелевич

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ УКОРОЧЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ РАЗЛИЧНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ШАБЛОНОВ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

При решении ряда практических задач оптики целесообразно использовать укороченное волновое уравнение, которое получают из уравнений Максвелла и материальных уравнений в параксиальном приближении.

В последние годы особый интерес исследователей привлекают процессы преобразования световых пучков в фоторефрактивных кристаллах, изменяющих физические свойства под действием света [1]. В частности, как показано в [2], под действием приложенного к кубическому фоторефрактивному кристаллу внешнего знакопеременного электрического поля световой пучок отклоняется от первоначального положения в пространстве. Это явление может быть использовано для адресного позиционирования световых пучков.

Подробное рассмотрение физики взаимодействия светового пучка с кристаллом приводит к укороченному нелинейному уравнению параболического типа, которое не решается аналитически в общем случае.

Среди различных приемов численного решения дифференциальных уравнений в частных производных наибольшей простотой отличаются конечно-разностные методы [3–8]. Суть этих методов заключается в том, что дифференциальное уравнение в частных производных приближенно заменяют разностной схемой [6], решение которой принимают за решение исходного уравнения.

Несмотря на разнообразие численных методов, разработанных для решения дифференциальных уравнений в частных производных, детальное исследование эффективности различных методов и схем в случае численного решения укороченного волнового уравнения в фоторефрактивных кристаллах не проводилось. В большинстве случаев, авторы ограничиваются анализом эффективности различных разностных схем при решении уравнения теплопроводности (напр., [9–11]).

Целью настоящего исследования является сравнение решений укороченного волнового уравнения, используемого для описания распространения световых пучков в кубическом фоторефрактивном кристалле, помещенном в знакопеременное электрическое поле, которые получают при помощи двухслойных шаблонов разностных схем.

Рассмотрим кубический фоторефрактивный кристалл среза $(\bar{1}\bar{1}0)$, в котором вдоль оси z распространяется гауссов световой пучок, линейно поляризованный вдоль оси y , с одномерным распределением интенсивности $I(x)$ на входной грани. Знакопеременное внешнее электрическое поле с амплитудой $E_0 = 12.5$ кВ/см приложено к кристаллу вдоль оси x . Ось x расположена в плоскости среза кристалла под углом 90° по отношению к кристаллографическому направлению $[\bar{1}\bar{1}0]$, причем угол отсчитывается по часовой стрелке. В этом случае укороченное волновое уравнение может быть записано в скалярной форме [2]:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k_0 \delta n A, \quad (1)$$

где $A(x, z)$ – медленно изменяющаяся комплексная амплитуда напряженности электрического поля светового пучка; $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число для вакуума; λ – длина световой волны; n_0 – показатель преломления невозмущенной среды; $\delta n = -\tau_{41} n_0^3 E_x / 2$ – нелинейная добавка к показателю преломления; τ_{41} – компонента электрооптического тензора. Поле пространственного заряда $E_x(x, z)$ в линейном приближении может быть представлено следующим образом:

$$E_x = -\frac{L_E E_0}{I_d + I} \frac{dI}{dx}. \quad (2)$$

Здесь $L_E = \mu \tau_R E_0$ – дрейфовая длина; E_0 – амплитуда внешнего знакопеременного электрического поля; μ – подвижность; τ_R – время рекомбинации носителей заряда; I_d – темновая интенсивность кристалла, включающая в себя интенсивность подсветки.

Поскольку в общем случае аналитическое решение уравнения (1) получить не удастся, то динамика распространения светового пучка, имеющего распределение амплитуды в виде функции Гаусса с перетяжкой $x_0 = 15$ мкм ($A(x) = A_0 \exp(-x^2/2x_0^2)$) на входной грани кристалла, исследовалась нами на основе численного моделирования с помощью метода конечных разностей [4].

Для построения разностной схемы частные производные в исходном уравнении заменяют конечно-разностными соотношениями по некоторому шаблону [7; 8]. В частности, если воспользоваться шаблоном, изображенным на рис. 1а, получим явную разностную схему для решения укороченного волнового уравнения (1), то есть схему позволяющую последовательно находить значения искомой функции на $(j+1)$ -м слое через соответствующие значения на j -м слое.

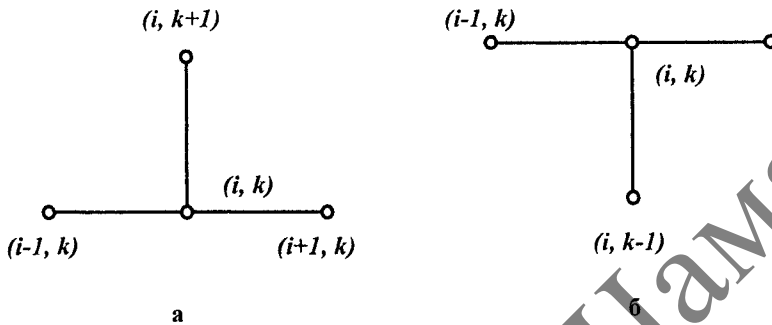


Рис. 1. Двухслойные шаблоны: а) явный; б) неявный

Для начала счета по этой схеме при $j = 1$ необходимо знать решение на начальном слое при $j = 0$. Оно определяется начальным условием. Значения в граничных узлах находятся из граничных условий [7].

Заменяя в уравнении (1) частные производные искомой функции с помощью конечных разностей с использованием шаблона, изображенного на рис. 1б, получим неявную разностную схему для решения данного уравнения. В отличие от явной схемы каждое разностное уравнение этой схемы содержит на каждом новом слое три неизвестных значения искомой функции, поэтому нельзя сразу определить эти значения через известное решение на предыдущем слое. В этом случае разностная схема реализуется через систему линейных трехточечных уравнений. Такие системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей [3] могут быть решены методом прогонки [4–8].

Используя для решения уравнения (1) шаблоны, изображенные на рис. 1, получаем двухслойные схемы, то есть схемы, когда в каждое разностное уравнение входят значения функции из двух слоев: нижнего, на котором решение уже найдено, и верхнего, в узлах которого решение ищется.

Исследования явной двухслойной схемы [3] показали, что она является условно устойчивой, т.е. ее устойчивость связана с некоторым ограничением на шаг. В отличие от явной, неявная двухслойная схема устойчива при любом соотношении шагов, в связи с чем ее называют безусловно или абсолютно устойчивой разностной схемой [8].

Каждая из этих схем имеет свои достоинства и недостатки. Явная схема проще для подсчета значений одного слоя, но таких слоев должно быть больше из-за ограничения на шаг, чем при реализации неявной схемы, допускающей любое соотношение шагов, но требующей решения системы линейных алгебраических уравнений при подсчете значений каждого слоя.

Существуют также другие шаблоны и способы построения разностных схем, о которых можно найти более полную информацию в работах по численным методам и теории разностных схем [напр., 3–11].

Результаты численного решения уравнения (1) при помощи двухслойных шаблонов разностных схем (рис. 1) представлены на рис. 2. Ширина расчетного окна в данном случае равна 200 мкм, шаги по направлениям x и z составляют 2 мкм.

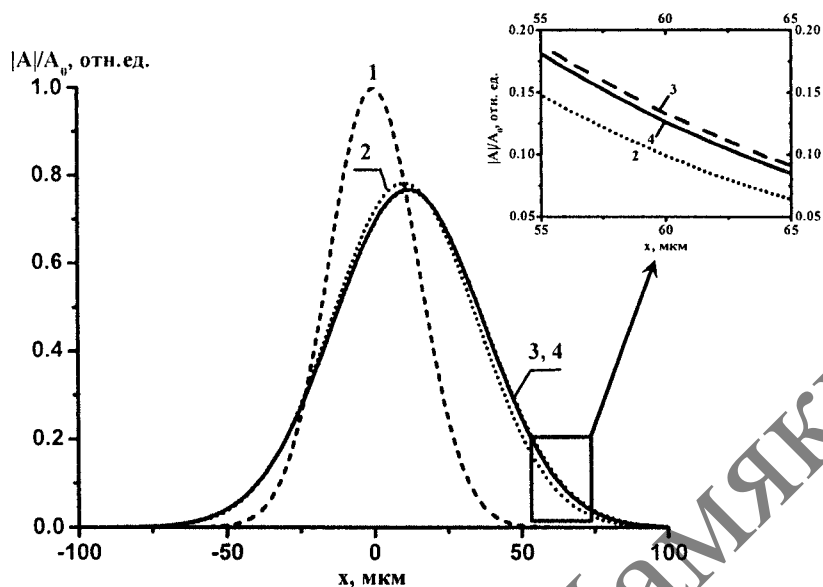


Рис. 2. Распределение относительного модуля амплитуды $|A|/A_0$ светового пучка на входе в кристалл (1) и на выходе из кристалла (2–4), полученное при помощи явной разностной схемы (2), аналитического решения (3) и неявной разностной схемы (4)

В расчетах принималось, что гауссов пучок света с длиной волны $\lambda = 0.6328$ мкм распространяется через кубический фоторефрактивный кристалл толщиной 8 мм с показателем преломления 2.58 и электрооптическим коэффициентом $\gamma_{41} = 5 \cdot 10^{-12}$ м/В, к которому приложено внешнее знакопеременное поле амплитудой $E_0 = 12.5$ кВ/см.

Кривая 1 соответствует распределению модуля амплитуды светового пучка на входной грани кристалла. В отсутствие темновой проводимости и некогерентной подсветки ($I_d = 0$) уравнение (1) имеет аналитическое решение [2]. В этом случае результаты численного решения этого уравнения, выполненного конечно-разностным методом с использованием неявной разностной схемы (кривая 4), практически совпадают с результатами, рассчитанными по формуле, представленной в [2] (кривая 3). Результат численного решения укороченного волнового уравнения (1), полученный с помощью явной разностной схемы (кривая 2), существенно отличается от решений 3 и 4, что свидетельствует о целесообразности использования данной схемы лишь в том случае, когда необходимо исследовать только качественное изменение профиля огибающей амплитуды светового пучка.

На рис. 3 показано отклонение значений модуля амплитуды $|A|$ светового пучка, полученных в результате численного решения уравнения (1) с помощью явной (кривая 1) и неявной (кривая 2) разностных схем, от значений $|A|$ точного решения данного уравнения.

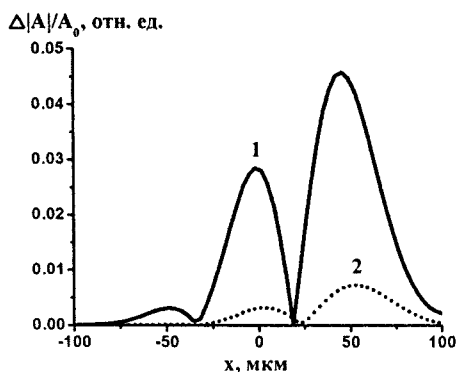


Рис. 3. Относительная погрешность численного решения укороченного волнового уравнения, полученного с помощью явной (1) и неявной разностной схемы

При вычислении погрешности численных решений уравнения (1) в качестве точного решения данного уравнения принималось аналитическое выражение распределения модуля амплитуды $|A|$ гауссова пучка света [2].

Из рис. 3 видно, что относительная погрешность численного решения уравнения (1) по неявной разностной схеме не превышает 0.01, тогда как использование явной схемы увеличивает относительную погрешность более, чем в 4 раза.

Таким образом, несмотря на существование различных экономичных разностных схем с повышенной точностью, разработанных для решения дифференциальных уравнений в частных производных, в случае необходимости большого объема вычислений, качественного решения уравнений и быстрого получения результатов могут быть полезны простые разностные явная и неявная схемы. Неявная разностная схема менее чувствительна к изменению шага, ее применение позволяет получить решение уравнения (1) с большей точностью (до 1%), чем при использовании явной схемы (до 5%). Однако машинное время, которое требуется для реализации неявной схемы, почти в 2 раза превышает время, необходимое для проведения расчетов по явной схеме. Поэтому окончательный выбор схемы определяется требованиями, предъявляемыми пользователем к точности и скорости вычислений.

Литература

1. Петров М.П., Степанов С.И., Хоменко А.В. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике. – СПб.: Наука, 1992. – 320 с.
2. Бородин М.В., Нажесткина Н.И., Шандаров С.М., Литвинов Р.В. // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2001. – № 10. – С. 38–42.
3. Mitchell A.R. Computational methods in partial differential equations. – John Wiley and Sons, 1997. – 255 p.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
6. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы: Введение в теорию: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
8. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
9. Фрязинов И.В. Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа // ЖВМ и МФ. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 436–443.
10. Дьяконов Е.Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач // ЖВМ и МФ. – 1962. – Т. 2, № 4. – С. 549–568.
11. Самарский А.А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.

Summary

Comparison of numerical solution of nonlinear wave equation for Gaussian beam propagating in cubic photorefractive crystal under external AC electric field with help of two different difference schemes is fulfilled.

Поступила в редакцию 08.11.04.