УДК 517.917

В.В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Пусть для системы

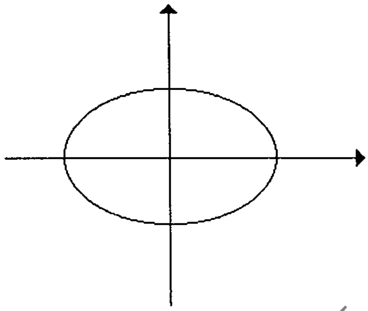
$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij} x^i y^j, \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, алгебраическая кривая

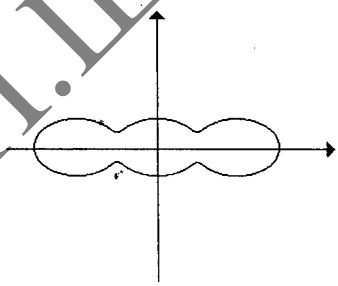
$$\omega(x, y) \equiv y^2 + (x^3 + px)^2 - q^2 = 0, \quad p \cdot q \neq 0 \tag{2}$$

является частным интегралом.

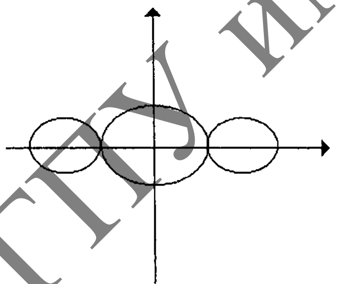
При различных соотношениях между коэффициентами p и q кривая (2) имеет вид, показанный на рисунках:



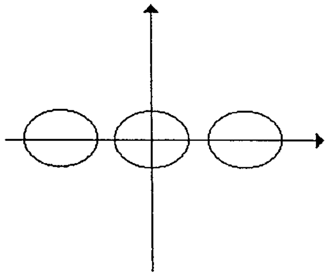
$p < 0,$



$p > 0, \quad 4p^3 + 27q^2 > 0$



$4p^3 + 27q^2 = 0$



$4p^3 + 27q^2 < 0$

Теорема. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

[1] Работа выполнена при поддержке республиканской межвузовской программы фундаментальных исследований «Анализ и динамические системы», задание № 4.6.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2py + 3x^2 y \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -(2p^3 + 9q^2)x - 2p^2x^3 + 9xy^2 \equiv Q(x,y) \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Теорема доказывается с использованием метода, предложенного в [1].

Замечание 1. Если $p=0$, то $x=0$ – особая линия для системы (3). Считаем далее, что $p \neq 0$.

Замечание 2. Поле направлений системы (3) симметрично относительно обеих осей координат.

Замечание 3. Для уравнения траекторий системы (3) находится общий интеграл в виде $\omega_1(x,y) = C\omega_2^3(x,y)$, где $\omega_1(x,y) = 27y^2 - 9p^2x^2 - (8p^3 + 27q^2)$, $\omega_2(x,y) = 3x^2 + 2p$.

Легко проверить, что кривые $\omega_1(x,y) = 0$ и $\omega_2(x,y) = 0$ – частные интегралы системы (3).

Найдем возможные особые точки системы (3) в конечной части плоскости. Для этого приравниваем правые части системы (3) к нулю и решаем систему

$$\left.\begin{aligned} y(2p + 3x^2) &= 0, \\ x(-2p^3 - 9q^2 - 2p^2x^2 + 9y^2) &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

В результате получаем возможные особые точки системы (3) с координатами:

$$x_1 = 0, y_1 = 0; \tag{4}$$

$$x_{2,3} = \pm\frac{1}{p}\sqrt{-\frac{2p^3 + 9q^2}{2}},\ y_{2,3} = 0; \tag{5}$$

$$x_{4,5} = \pm\sqrt{-\frac{2p}{3}};\ y_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{2p^3 + 27q^2}{27}}. \tag{6}$$

Числа $x_{4,5}$ и $y_{4,5}$ определяют координаты четырех особых точек:

$$(x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_4, y_5), (x_5, y_4).$$

Соответствующие найденным особым точкам характеристические числа такие:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-2p(2p^3 + 9q^2)} \tag{4'}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-2(2p^3 + 9q^2)(2p^3 + 27q^3)}; \tag{5'}$$

$$\lambda_1 = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-2p(2p^3 + 27q^2)},\ \lambda_2 = \pm 2\sqrt{-2p(2p^3 + 27q^2)}. \tag{6'}$$

В выражениях для характеристических чисел (6') знак "+" соответствует точкам (6) в $1^{\text{й}}$ и $3^{\text{й}}$ четвертях, а знак "-" точкам (6) во $2^{\text{й}}$ и $4^{\text{й}}$ четвертях.

Находим особые точки системы (3) в бесконечной части плоскости. Для этого к системе (3) последовательно применяем преобразования Пуанкаре [2]:

$$x=\frac{1}{z},\, y=\frac{u}{z} \text{ и } x=\frac{\vartheta}{z},\, y=\frac{1}{z},\ \frac{dt}{z^2}\to dt.$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt}&=-2p^2+6u^2-(2p^3+9q^2)z^2-2pu^2z^2,\\ \frac{dz}{dt}&=-3uz-2puz^3, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt}&=-6\vartheta^2+2pz^2+2p^2\vartheta^4+(2p^3+9q^2)\vartheta^2z^2,\\ \frac{dz}{dt}&=-9\vartheta z+2p^2\vartheta^3z+(2p^3+9q^2)\vartheta z^3 \end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

Полагая в правых частях системы (7) $z=0$ и приравнивая их к нулю, получаем уравнение для определения координаты u особых точек $(u;0)$:

$$3u^2-p^2=0.$$

Получаем две особые точки $\left(\pm\frac{p}{\sqrt{3}};0\right)$ (9)

с характеристическими числами $\lambda_1=\pm\frac{12p}{\sqrt{3}},\quad \lambda_2=\mp\sqrt{3}p$.

Так как правые части системы (8) обращаются в нуль при $\vartheta=z=0$, то "концы" оси OY являются особой точкой системы (3). Замечаем, что в системе (8) отсутствуют линейные члены.

Выясним характер особых точек системы (3) по их характеристическим числам при различных соотношениях между коэффициентами p и q. Сразу замечаем, что точки (9) – четырехсепаратрисные седла во всех случаях.

I. Пусть $4p^3+27q^2>0.$

1) Если $-\sqrt[3]{\frac{9q^2}{2}}<p<0$, то точка (4) – четырехсепаратрисное седло, точки (6) – узлы, «концы» оси OY имеют индекс 0.

2) Если $2p^3+9q^2=0$, то система (3) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt}=2py+3x^2y,\ \frac{dy}{dt}=-2p^2x^3+9xy^2.$$

Сделав замену времени $2pdt\to dt$, получим систему

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{3}{2p}x^2y \equiv y + \xi(x,y), \ \frac{dy}{dt} = px^3 + \frac{9}{2p}xy^2 \equiv \eta(x,y).$$

Точка (4) имеет характеристические числа $\lambda_{1,2} = 0$. Для уравнения $y + \xi(x,y) = 0$ очевидным решением будет $y \equiv 0$. Тогда $f(x) \equiv \eta(x,0) = -px^3 = ax^\alpha$ и $g(x) = \xi'_x(x,0) + \eta'_y(x,0) \equiv 0$.

Видим, что $a = -p > 0$ и $\alpha = 3$ нечетное. Следовательно [3, с.128], точка (4) – четырехсепаратрисное седло. Кроме этого, точки (6) – узлы, и "концы" оси OY имеют индекс 0.

3) Если $-3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}} < p < -\sqrt[3]{\frac{9q^2}{2}}$, то точка (4) – центр, точки (5) – четырехсепаратрисные седла, точки (6) – узлы и "концы" оси OY имеют индекс 0.

4) Если $p>0$, то точка (4) – центр, «концы» оси OY имеют индекс 2.

II. Пусть $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Система (3) запишется так:

$$\frac{dx}{dt} = 2py + 9x^2y, \ \frac{dy}{dt} = -\frac{2p^3}{3}x - 2p^2x^3 + 9xy^2. \qquad (10)$$

Для системы (10) точка (4) – центр, точки (5) – четырехсепаратрисные седла, точки (6) – узлы, «концы» оси OY имеют индекс 0.

III. Пусть $4p^3 + 27q^2 < 0$.

1) Если $-3\sqrt[3]{\frac{q^2}{2}} < p < -3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}$, то точка (4) – центр, точки (5) – четырехсепаратрисные седла, точки (6) – узлы, «концы» оси OY имеют индекс 0.

2) Если $p = -3\sqrt[3]{\frac{q^2}{2}}$, то система (3) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 2py + 3x^2y, \\ &\frac{dy}{dt} = -\frac{4p^3}{3}x - 2p^2x^3 + 9xy^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Для этой системы точка (4) является центром, а точки (5) имеют характеристические числа $\lambda_{1,2} = 0$. Исследуем эти точки. Для этого перенесем начало координат в точки (5) и сделаем в системе (11) замены $x \to x \pm \sqrt{-\frac{2p}{3}}, \ y \to y, \ \frac{8p}{3}dt \to dt.$

Получим системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\pm\frac{9}{4p^3}\sqrt{-\frac{2p}{3}}xy+\frac{9}{8p^3}x^2y\equiv\eta(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=x\mp\frac{9}{4p}\sqrt{-\frac{2p}{3}}x^2\pm\frac{27}{8p^3}\sqrt{-\frac{2p}{3}}y^2-\frac{3}{4p}x^3+\frac{27}{8p^3}xy^2\equiv x+\xi(x,y)\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Находим решение уравнения $x+\xi(x,y)=0$ в виде $x=\alpha_2y^2+...\equiv\varphi(y)$.

Получим $x=\mp\dfrac{27}{8p^3}\sqrt{-\dfrac{2p}{3}}y^2+...\equiv\varphi(y)$.

Тогда

$$f(y)=\eta(\varphi(y),y)=\frac{81}{16p^5}y^3+...\equiv ay^\alpha+...\text{ и}$$

$$g(y)=\xi'_y(\varphi(y),y)+\eta'_x(\varphi(y),y)=\pm\frac{9}{p^3}\sqrt{-\frac{2p}{3}}y+...\equiv by^\beta+....$$

Видим, что α,β – нечетные, причем $\alpha=2\beta+1$. Кроме этого, $-b^2\le 4a(\beta+1)<0$. Согласно [3], для системы (11) точки (5) являются особыми точками с одним гиперболическим, двумя параболическими и одним эллиптическим секторами Бендиксона. «Концы» оси OY имеют индекс 0.

3) Если $p<-3\sqrt[3]{\dfrac{q^2}{2}}$, то точки (4) и (5) – центры, «концы» оси OY имеют индекс 0.

По результатам исследования нетрудно построить качественные картины поведения траекторий системы (3) в круге Пуанкаре.

Литература

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т.16. Вып. 6 – С. 650-670.

2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М: Наука, 1981. – 568 с.

3. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Минск: Выш.шк., 1979. – 136 с.

Summary

Qualitative research of cubic system of the second order having private integral as one algebraic curve of the sixth order is carried out.

Поступила в редакцию 29.11.02.