УДК 519.240

М.Д. Юдин

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ *m*-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОГРАНИЧЕННЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ В МЕТРИКЕ П. ЛЕВИ

Рассматривается случай, когда сумма ковариаций случайных величин положительна. Известно (см., например, [1-4]), если предел суммы ковариаций случайных величин положителен, то он поставляет в предельное распределение их суммы нормальный компонент. Это обстоятельство позволяет более эффективно использовать неравенство Эссеена (см., например, [5] (стр. 616), [6] (стр. 137)).

1^0. Пусть $\left\{X_{nq}\right\}_{q=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$ — система серий случайных величин, определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве, имеющих конечные дисперсии и равные нулю математические ожидания (м. о.): $MX_{nq}=0$, $q=\overline{1,n}$ и пусть $S_n=\sum\limits_{q=1}^{n}X_{nq}$.

Сделаем разбиение суммы S_n по методу Бернштейна:

$$u_{ni}=\sum_{q=(i-1)m+(i-1)k+1}^{(i-1)m+ik}X_{nq},$$

$$\upsilon_{ni}=\sum_{q=(i-1)m+ik+1}^{im+ik}X_{nq},\ i=\overline{1,\nu},\quad k=\left[n^{\rho}\right], \tag{1}$$

где $0<\rho<1/4$.

Положим:. $S_{n1}=\sum\limits_{i=1}^{\nu}u_{ni}$, $S_{n2}=\sum\limits_{i=1}^{\nu}\upsilon_{ni}$. Тогда $S_n=S_{n1}+S_{n2}$ (можно считать, что n кратно $k+m$ (см.[1], §1.10)).

Выпишем величины, вошедшие при разбиении (1) в S_{n1}, в порядке возрастания их индексов. Получим систему серий

$$\xi_{n1},\xi_{n2},\cdots\xi_{n\ell},\quad \ell=\nu k,\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{2}$$

Положим для системы (2)

$$K_n(x)=\sum_{s=1}^{\ell}M(\,\xi_{ns}^2;\xi_{ns}\le x\,),$$

$$a_n=\sum_{s\ne r}M\ \xi_{ns}\,\xi_{nr},$$

$$\psi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}dK_n(x)-\frac{a_nt^2}{2}. \tag{3}$$

Согласно результатам, полученным при решении центральной предельной проблемы для сумм зависимых случайных величин [1-4], распределение, логарифм характеристической функции (х.ф.) которого выражается по формуле (3), сыграет роль сопровождающего для распределения суммы S_n.

Обозначим через $F_n(x)$ функцию распределения (ф.р.), логарифм х.ф. которой выражается по формуле (3). Справедлива

Теорема1.*Пусть величины системы серий* $\{X_{nq}\}_{q=1}^{n}, n=\overline{1,\infty}$ *m-зависимы, найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n \ge n_0$ $a_n \ge \sigma^2 > 0$,

$$\max_q M\, X_{nq}^2 \le \frac{H_1}{n}, \qquad \max_{s,p,r} M\left|X_{ns}X_{np}X_{nr}\right| \le \frac{H_2}{n^{3/2}},$$

где $0<p-s\le n^\rho, 0\le|p-r|\le n^\rho$.*Тогда при любом фиксированном* $\varepsilon>0$ *и* $n \ge n_0$ *будет выполняться неравенство*

$$F_n(x-\varepsilon-0)-\frac{c_0}{n^{1/2-2\rho}}-\frac{H_1m^2}{\varepsilon^2n^\rho} \le P\{S_n\le x\} \le F_n(x+\varepsilon+0)+\frac{c_0}{n^{1/2-2\rho}}+\frac{H_1m^2}{\varepsilon^2n^\rho} \tag{4}$$

где c_0*-независимая от n постоянная.*

2^0. Прежде чем доказывать теорему 1, рассмотрим вспомогательную лемму. Пусть B_{ns} – σ – алгебра, порожденная величиной ξ_{ns}. Положим для системы (2):

$$S_{n(s,p)}=\xi_{n(s+1)}+\cdots+\xi_{np}, \qquad S_{n(p,p)}\equiv 0(\operatorname{mod} P),$$

$$f_{ns}(t,\mathrm{B}_{ns})=\frac{M\left(\exp it\,S_{n(s,\ell)}/\mathrm{B}_{ns}\right)}{M\left(\exp it\,S_{n(s,\ell)}\right)}, \tag{5}$$

$$\alpha_n(t)=\sum_s M\left(\xi_{ns}f_{ns}(t,\mathrm{B}_{ns})\right),$$

$$\gamma_n(t,x)=\sum_s M\left(\xi_{ns}f_{ns}(t,\mathrm{B}_{ns});\xi_{ns}\le x\right),$$

$$\varphi_{ns}(t)=M\left(e^{it\xi_{ns}}f_{ns}(t,\mathrm{B}_{ns})\right).$$

Очевидно, х.ф. суммы S_{n1}

$$\varphi_n(t)=\prod_{s=1}^{\ell}\varphi_{ns}(t),$$

$$\varphi_{ns}(t)=\frac{M\left(\exp it\,S_{n(s-1,\ell)}\right)}{M\left(\exp it\,S_{n(s,\ell)}\right)}. \tag{6}$$

В [1] (стр.53) показано, что если, $q_n(t)=\ln\varphi_n(t)$ и $\left|\varphi_{ns}-1\right|<1$, то

$$q_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}d_x\gamma_n(t,x)+it\alpha_n(t)+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\left(\varphi_{ns}-1\right)^r.$$

Лемма 1. *Пусть величины системы серий* $\{X_{nq}\}$ *m-зависимы, найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n \ge n_0$

$$\max_{s} M\,\xi_{nq}^{2} \le \frac{H_1}{n}, \qquad\qquad \max_{s,p,r} M\left|\xi_{ns}\,\xi_{np}\,\xi_{nq}\right| \le \frac{H_2}{n^{3/2}} \tag{7}$$

где $0<p-s\le n^{\rho}$, $0\le |p-q|\le n^{\rho}$. *Тогда при* $|t| \le An^{1/2-2\rho}$, *где при* $A^2 \le \dfrac{1}{4H_1}$ *и* $n\ge n_0$

будет выполняться неравенство

$$\sup_t \left|q_n(t)-\psi_n(t)\right| \le \frac{C|t|^3}{n^{1/2-2\rho}}, \tag{8}$$

где $C \le H_1^{3/2} + 2H_2 + 6H_1^2\ A$.

Доказательство. В силу m-зависимости в разбиении (1) части u_{ni} независимы. Поэтому в функциях (5) и (6) можно делать сокращения, в результате чего получим $f_{ns}(t,\mathrm{B}_{ns}) = \dfrac{M\left(\exp it\, S_{n(s,p)}/\mathrm{B}_{ns}\right)}{M\left(\exp it\, S_{n(s,p)}\right)}$, где $p=p(s)$-индекс последней величины ξ_{np}

той части u_{ni}, в которую вошла величина ξ_{ns}.

Из разбиения (1) и (7) следует, что

$$\sum_s M\,\xi_{ns}^{2}\left|S_{n(s,p)}\right| \le \frac{H_2 \nu k^2}{n^{3/2}},$$

$$\sum_s M\left|\xi_{ns}\right| S_{n(s,p)}^{2} \le \frac{H_2 \nu k^3}{n^{3/2}},$$

$$\left|M(\exp it\, S_{n(s,p)}\right| \ge 1 - \frac{H_1 k^2 t^2}{2n}. \tag{9}$$

Оценим $\left|q_n(t)-\psi_n(t)\right|$. При $|t| \le An^{1/2-\rho}$, где $\mathrm{A}^2 < \dfrac{1}{H_1}$, из (9)

следует $\left|M(\exp it\, S_{n(s,p)}\right| \ge \dfrac{1}{2}$. Имея в виду, что $\left|e^{itx}-1-itx\right| \le \dfrac{t^2x^2}{2}$,

получаем

$$\begin{aligned} &\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}\left(d_x\gamma_n(t,x)-dK_n(x)\right)\right| \le \frac{t^2}{2}\sum_s M\left(\xi_{ns}^2\left|f_{ns}(t,\mathrm{B}_{ns})-1\right|\right) \le \\ &\le |t|^3\sum_s\left(M\xi_{ns}^2\left|S_{n(s,p)}\right| + M\xi_{ns}^2 M\left|S_{n(s,p)}\right|\right) \le \frac{\left(H_2+H_1^{3/2}\right)\nu k^2|t|^3}{n^{3/2}} \le \frac{\left(H_2+H_1^{3/2}\right)|t|^3}{n^{1/2-\rho}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, пользуясь (7), находим при $|t| \le An^{1/2-2\rho}$

$$\left|it\,\alpha_n(t)+\frac{a_n t^2}{2}\right|=\left|it\sum_s M\left(\xi_{ns} f_{ns}(t,\mathrm{B}_{ns})\right)+t^2\sum_s M\,\xi_{ns} S_{n(s,p)}\right|\le$$

$$\le 2t^2\sum_s M\left|\xi_{ns} S_{n(s,p)}\right|\left|1-M\left(\exp it\,S_{n(s,p)}\right)\right|+|t|^3\sum_s M\left|\xi_{ns}\right|S^2_{n(s,p)}\le \tag{11}$$

$$\le\frac{2H_1^2\nu k^4 t^4}{n^2}+\frac{H_2\nu k^3|t|^3}{n^{3/2}}\le\frac{2H_1^2 A|t|^3}{n^{1/2-\rho}}+\frac{H_2|t|^3}{n^{1/2-2\rho}}.$$

Поскольку при $i=\overline{1,\nu}, k=\left[n^{\rho}\right]$, $|t|\le An^{1/2-2\rho}$, где $A^2\le\dfrac{1}{4H_1}$,

$\left|\varphi_{ns}(t)-1\right|\le\dfrac{2H_1k^2t^2}{n}\le\dfrac{1}{2}$, то

$$\left|\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\left(\varphi_{ns}-1\right)^r\right|\le\frac{4H_1^2A|t|^3}{n^{1/2-2\rho}}. \tag{12}$$

Из неравенств (10), (11) и (12) следует(8). Лемма доказана.

3^0.Приступим к доказательству теоремы 1. Используя неравенство (8), находим при $n\ge n_0$

$$\left|e^{q_n(t)}-e^{\psi_n(t)}\right|\le\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)\left|e^{q_n(t)-\psi_n(t)}-1\right|\le\left|q_n(t)-\psi_n(t)\right|\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\left|q_n(t)-\psi_n(t)\right|\right)\le\frac{C|t|^3}{n^{1/2-2\rho}}\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\frac{C|t|^3}{n^{1/2-2\rho}}\right).$$

Можно подобрать такое $A_0^2\le\dfrac{1}{4H_1}$, что при $|t|\le A_0n^{1/2-2\rho}$ и $n\ge n_0$

будет выполняться неравенство $-\dfrac{\sigma^2t^2}{2}+\dfrac{C|t|^3}{n^{1/2-2\rho}}\le -at^2,\quad a>0$.

Пусть $G_n(x)$- функция распределения (ф.р.) суммы S_{n1}, $F_n(x)$-ф.р., логарифм х.ф. которой выражается формулой (3). По условию теоремы $a_n\ge\sigma^2>0$, когда $n\ge n_0$. Наличие нормального компонента в распределении $F_n(x)$ обеспечивает существование и ограниченность производной: $\left|F'_n(x)\right|\le C$. Это позволяет применить неравенство Эссеена:

$$\sup_x\left|G_n(x)-F_n(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{q_n(t)}-e^{\psi_n(t)}}{t}\right|dt+\frac{24C}{\pi T},$$

из которого при $T \le A_0\, n^{1/2-2\rho}$, учитывая, что интеграл от $t^2 e^{-at^2}$ конечен, получим

$$\sup_x \left|G_n(x)-F_n(x)\right| \le \frac{C_0}{n^{1/2-2\rho}}, \qquad (13)$$

где C_0 - независимая от n постоянная.

Как показано в [1] (§1.10), для фиксированного $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$P\{S_{n1} \le x-\varepsilon\} - P\{|S_{n2}| \ge \varepsilon\} \le P\{S_n \le x\} \le P\{S_{n1} \le x+\varepsilon\} + P\{|S_{n2}| \ge \varepsilon\}.$$

Отсюда (13) и из неравенства Чебышева $P\{|S_{n2}| \ge \varepsilon\} \le \dfrac{M\, S_{n2}^2}{\varepsilon^2} \le \dfrac{H_1\, m^2}{\varepsilon^2 n^{\rho}}$ следует (4). Теорема доказана.

Замечания. 1. Теорема 1 допускает варьирование за счет применения других форм неравенства Чебышева.

Из проведенных оценок следует, что постоянная C_0 вычисляема, а постоянная C в (8) с ростом *n* может разве лишь убывать.

Литература

1. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Минск: «Университетское», 1990. – 254 с.
2. Юдин М. Д. Об обобщении формул Колмогорова и Леви-Хинчина на суммы зависимых величин //ДАН БССР.–1986. – т. 30, № 1. – С. 29-31.
3. Юдин М.Д. О предельных законах для сумм слабозависимых величин с конечной дисперсией // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 5. – С. 113-114.
4. Юдин М.Д. Примеры применения обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых случайных величин // Изв. вузов. Математика.–1980. – № 9. – С. 65-70.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: «Мир», 1967. – т. 2.–752 с.
6. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. – М.: «Наука», 1972. – 414 с.

Summary

The distribution of the sums of m-dependent random variables with restricted variances is approximated by the infinitely divisible distribution in the metrics of P. Levy.

Поступила в редакцию 7.04.03.