УДК 517.917

В.В. Шкут

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i}x^{k-i}y^{i} \equiv \sum_{k=1}^{n} P_k(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k} b_{k-i,i}x^{k-i}y^{i} \equiv \sum_{k=1}^{n} Q_k(x,y), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $a_{k-i,i}, b_{k-i,i} \in R, P_k(x,y), Q_k(x,y)$ – однородные многочлены степени k, в предположении, что многочлены $P_k(x,y)$ и $Q_k(x,y)$ связаны условиями Гамильтона, т. е.

$$\frac{\partial P_k}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial y} = 0, k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Если выполняются условия (2), то систему (1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i}x^{k-i}y^{i}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}(b_{k0}x^{k} - \sum_{i=1}^{k}\frac{k-i+1}{i}a_{k-i+1,i-1}x^{k-i}y^{i}). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Выясним характер особых точек системы (3) в бесконечной части плоскости. Для этого к системе (3) применяем последовательно преобразования Пуанкаре [1]:

$$x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z} \text{ и } x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z}, \frac{dt}{z^{n-1}} \to dt. \tag{4}$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}\left(b_{k0} - \sum_{i=0}^{k}\frac{a_{k-i,i}}{i+1}u^{i+1}\right)z^{n-k} \equiv \overline{P}(u,z), \\ \frac{dz}{dt} &= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i}u^{i}z^{n-k+1} \equiv \overline{Q}(u,z), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)\sum_{i=0}^{k}\frac{a_{k-i,i}}{i+1}v^{k-i} - b_{k0}v^{k+1}\right)z^{n-k} \equiv \overline{\overline{P}}(v,z), \\ \frac{dz}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{k-i+1}{i}a_{k-i+1,i-1}v^{k-i} - b_{k0}v^{k}\right)z^{n-k+1} \equiv \overline{\overline{Q}}(v,z). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В правых частях системы (5) положим, что $z = 0$, и приравняем их к нулю. Тем самым получим уравнение для определения координаты u особых точек $(u;0)$, не лежащих на «концах» оси Oy. Это уравнение запишем в виде

$$A_{n+1}(u) \equiv b_{n0} - (n+1)\sum_{i=0}^{n}\frac{a_{n-i,i}}{i+1}u^{i+1} = 0. \tag{7}$$

Пусть u_0 – действительный корень уравнения (7). Тогда находим характеристические числа особой точки $(u_0, 0)$:

$$\lambda_1 = \frac{\partial \overline{P}(u_0,0)}{\partial u} = \frac{\partial A_{n+1}(u_0)}{\partial u}, \lambda_2 = \frac{\partial \overline{Q}(u_0,0)}{\partial z} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial A_{n+1}(u_0)}{\partial u}.$$

Видим, что если $\frac{\partial A_{n+1}(u_0)}{\partial u} \neq 0$, то $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Это значит, что точка $(u_0, 0)$– простой узел.

Пусть теперь u_0 – r-кратный действительный корень уравнения (7), где $2 \leq r \leq n+1$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\frac{\partial^{r-1} A_{n+1}(u_0)}{\partial u^{r-1}} = 0$, а $\frac{\partial^r A_{n+1}(u_0)}{\partial u^r} \neq 0$. В системе (5) сделаем замену переменных $u \to u + u_0$, $z \to z$ (перенесем начало координат в точку $(u_0, 0)$). Получим систему

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \overline{P}(\mathrm{u}_0, 0)}{\partial z} z + \xi(u, z), \frac{dz}{dt} = \eta(u, z), \tag{8}$$

где $\xi(u, z), \eta(u, z)$ – многочлены не ниже второй степени. Выясним характер особой точки (0; 0) системы (8) при условии, что $\frac{\partial \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{\partial z} \neq 0$. Сделав в системе (8) замену времени $\frac{\partial \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{\partial z} dt \to dt$, получим систему

$$\frac{du}{dt} = z + \overline{\xi}(u, z), \frac{dz}{dt} = \overline{\eta}(u, z). \tag{9}$$

Согласно [2], находим решение уравнения $z + \overline{\xi}(u, z) = 0$ относительно z в виде $z = \alpha_r u^r + \alpha_{r+1} u^{r+1} + \ldots \equiv \varphi(u)$. Оно имеет вид

$$z = -\left(\frac{1}{r!} \cdot \frac{\partial^r \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{\partial u^r} \Big/ \frac{\partial \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{\partial z}\right) u^r + \ldots, \text{ где } \frac{\partial^r \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{\partial u^r} = \frac{\partial^r A_{n+1}(\mathrm{u}_0)}{\partial u^r} \neq 0.$$

Далее находим

$$f(u) = \overline{\eta}(u, \varphi(u)) = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial^r \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{r!\,\partial u^r} \Big/ \frac{\partial \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{\partial z}\right)^2 u^{2r-1} + \ldots = a u^{\alpha} + \ldots$$

и

$$g(u) = \overline{\xi}'_u(u, \varphi(u)) + \overline{\eta}'_z(u, \varphi(u)) =$$

$$= \frac{1}{r!}\left(r + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\partial^r \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{r!\,\partial u^r} \Big/ \frac{\partial \overline{P}(\mathrm{u}_0,0)}{\partial z}\right) u^{r-1} + \ldots = b u^{\beta} + \ldots$$

Видим, что $a<0$ и $\alpha=2r-1$ – нечетное, при этом $\alpha=2\beta+1$ и $-b^2\le 4a(\beta+1)<0$. Если β – четное (r – нечетное), то точка $(u_0,\,0)$ для системы (5) – узел. Если β – нечетное (r – четное), то $(u_0,\,0)$ для системы (5) – точка с одним гиперболическим, двумя параболическими и одним эллиптическим секторами Бендиксона.

Положим в правых частях системы (6) $v=z=0$. Нетрудно видеть, что «концы» оси Oy будут особой точкой системы (3), если $a_{0n}=0$. Выделив в системе (6) линейную часть, получим систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=\frac{n+1}{n}a_{1,n-1}v+a_{0,n-1}z+\xi(v,z),\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{1}{n}a_{1,n-1}z+\eta(v,z).\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Видим, что если $a_{1,n-1}\ne 0$, то «концы» оси Oy будут простым узлом. Пусть $a_{1,n-1}=0$. Тогда «концы» оси Oy – сложная особая точка, имеющая характеристические числа $\lambda_1=\lambda_2=0$. Исследуем ее, когда $a_{0,n-1}\ne 0$. После замены времени $a_{0,n-1}dt\to dt$ в системе (10) получим систему

$$\frac{dv}{dt}=z+\bar{\bar{\xi}}(v,z),\ \frac{dz}{dt}=\bar{\bar{\eta}}(v,z).\qquad(11)$$

Применяя, как и выше, метод, данный в [2], получим числа $\alpha=2r-1$, $a=-\dfrac{r(n+1)}{(n-r+1)^2}\left(\dfrac{a_{r,n-r}}{a_{0,n-1}}\right)^2$, $\beta=r-1, b=\dfrac{r(n+2)a_{r,n-r}}{(n-r+1)a_{0,n-1}}$. Тогда «концы» оси Oy будут узлом, если r – нечетное, и точкой с одним гиперболическим, одним эллиптическим и двумя параболическими секторами Бендиксона, если r – четное. Здесь $a_{r,n-r}\ne 0$ и $2\le r\le n$. Пусть все $a_{r,n-r}=0$. Тогда $b_{n0}\ne 0$. В противном случае экватор $z=0$ будет особой линией. Пусть $b_{n0}\ne 0$. Тогда получим, что $g(v)\equiv 0$. Следовательно, [2, 128], «концы» оси Oy – двухсепаратрисное седло.

Пример. Для системы Гамильтона

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x-3y-x^2-2xy+3y^2,\\ \frac{dy}{dt}&=6x-3y-3x^2+2xy+y^2\end{aligned}\right\}$$

уравнение (7) имеет вид

$$(u+1)(u-1)^2=0.$$

Отсюда следует, что $u=-1$ – простой корень $(r=1)$, а $u=1$ – двукратный корень $(r=2)$ уравнения. Кроме того, $\overline{P}_z'(1;0)=3\ne 0$. Тогда в бесконечной части плоскости система имеет узел $(-1;\,0)$ и точку $(1;\,0)$ с одним гиперболическим, двумя параболическими и одним эллиптическим секторами Бендиксона. Так как $a_{02}=3\ne 0$, то «концы» оси Oy не являются особой точкой системы.

Литература

1. Андронов А.А. и др. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981.
2. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Мн.: Выш. шк., 1979.

Summary

The nature of singular points in an infinite part of a plane of one system of Hamilton is clarified.

Поступила в редакцию 26.05.03.