УДК 519.240

М.Д. Юдин

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ m_n – ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, КОГДА КООРДИНАТЫ СУММ НЕЗАВИСИМЫ

В [1] показано, что в случае, когда суммы зависимых случайных векторов имеют независимые между собой координаты, вопрос об аппроксимации их распределений сопровождающими распределениями сводится к аппроксимации их покоординатных сумм, т.е. к аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин.

С другой стороны, в [2–4], опираясь на результаты, опубликованные в [5], мы определили сопровождающие распределения для сумм зависимых случайных величин и получили оценки аппроксимаций. Результатами работ [2 – 4] мы здесь воспользуемся.

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$ – система серий d-мерных случайных векторов, определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве.

Положим: $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\ldots,\xi_{ns}^{(d)}\right)$, $x=\left(x_1,\ldots,x_d\right)$, $t=\left(t_1,\ldots,t_d\right)$,

$S_n=\sum\limits_{s=1}^{n}\xi_{ns}$,

$S_n^{(k)}=\sum\limits_{s=1}^{n}\xi_{ns}^{(k)}$, $k=\overline{1,d}$, G_n – функция распределения (ф.р.) суммы S_n, $F_n(x)$ – некоторая сопровождающая ф.р., $G_{nk}(x_k)$ и $F_{nk}(x_k)$ – соответствующие покоординатные ф.р..

В [1] показано, если покоординатные суммы $S_n^{(k)}$ независимы, $k=\overline{1,d}$, т.е. $G_n(x)=\prod_{k=1}^{d}G_{nk}(x_k)$, и $F_n(x)=\prod_{k=1}^{d}F_{nk}(x_k)$, то

$$\Delta_n \le \sum_{k=1}^{d}\Delta_{nk}, \tag{1}$$

где $\Delta_n=\sup_x\left|G_n(x)-F_n(x)\right|$, $\Delta_{nk}=\sup_{x_k}\left|G_{nk}(x_k)-F_{nk}(x_k)\right|$.

1^0. В этом пункте рассмотрим случай, когда векторы ξ_{ns} имеют ограниченные дисперсии координат. Не нарушая общности, будем считать, что математические ожидания (м.о.) $M\xi_{ns}=0$, $s=\overline{1,n}$, $n=\overline{1,\infty}$.

Пусть $K_{nk}(x_k)=\sum_{s=1}^{n}M\left(\xi_{ns}^{(k)2};\xi_{ns}^{k}\le x_k\right)$, $a_{nk}=\sum_{s<r}M\xi_{ns}^{(k)}\xi_{nr}^{(k)}$. Согласно результатам решения центральной предельной проблемы (ц.пр.п.) теории вероятностей для сумм зависимых случайных величин [5], определим логарифм характеристической функции сопровождающей ф.р. $F_{nk}(x_k)$ для ф.р. $G_{nk}(x_k)$ формулой:

$$\psi_{nk}(t_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{it_kx_k}-1-it_kx_k\right)\frac{1}{x_k^2}\,dK_{nk}(x_k)-\frac{a_{nk}t_k^2}{2}$$

и положим $F_n(x)=\prod_{k=1}^{d}F_{nk}(x_k)$.

Обозначим:

$$b_{nk}^2=\sum_{s=1}^{n}M\left(\xi_{ns}^{(k)2};\left|\xi_{ns}^{(k)}\right|\le cn^{-\delta}\right),$$

$$g_{nk}^2=\sum_{s=1}^{n}M\left(\xi_{ns}^{(k)2};\left|\xi_{ns}^{(k)}\right|> cn^{-\delta}\right),$$

где $c>0$ и $\delta>0$ – постоянные.

Теорема 1. *Пусть векторы системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n=m_0n^{\rho}$ *– зависимы, где* m_0 *– любое постоянное число,* $0\le\rho<\frac{1}{4}$, *кроме того, существуют постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n\ge n_0$, $0<|p-q|\le m_n$, $0\le|p-q|\le m_n$

$$\max_{s,k}M\xi_s^{(k)2}\le\frac{H_1}{n},\quad \max_{s,p,q,k}M\left|\xi_{ns}^{(k)}\xi_{np}^{(k)}\xi_{nq}^{(k)}\right|\le\frac{H_2}{n^{3/2}}$$

и найдутся постоянные $A>0$, $c>0$, $\delta>0$, *при которых будет выполняться неравенство*

$$a_{nk}+b_{nk}^2\left(1-\frac{A_c}{3n^{\delta-1/8+\rho/2}}\right)\geq g_{nk}^2,\ k=\overline{1,d}.$$

Тогда, если ф.р. $F_{nk}(x_k)$ *имеют ограниченные производные* $\sup F'_{nk}(x_k)\leq const$ *и суммы* S_{nk} *независимы между собой,* $k=\overline{1,d}$, *то найдется независимая от n постоянная* $C=C(H_1,H_2,A,m_0)$ *такая, что при* $n\geq n_0$ $\Delta_n\leq Cn^{-1/8+\rho/2}d$.

Доказательство теоремы 1 немедленно следует из теоремы работы [2] и неравенства (1).

2^0. В этом пункте предполагается, что векторы ξ_{ns} имеют ограниченные м.о., которые будем считать равными нулю. В то же время дисперсии координат векторов ξ_{ns} могут быть и неограниченными. Аппроксимация рассматривается в случае, когда сопровождающие ф.р. $F_{nk}(x_k)$ принадлежит классу L.

Положим:

$$\overline{\xi}_{ns}^{(k)}=\begin{cases}\xi_{ns}^{(k)}, & \left|\xi_{ns}^{(k)}\right|\leq H_0,\\ 0, & \left|\xi_{ns}^{(k)}\right|>H_0,\end{cases}\quad \overline{\overline{\xi}}_{ns}=\begin{cases}0, & \left|\xi_{ns}^{(k)}\right|\leq H_0,\\ \xi_{ns}^{(k)}, & \left|\xi_{ns}\right|>H_0,\end{cases}$$

где $H_0>0$ – фиксированное число, $a_{nk}=\sum\limits_{0<|s-p|\leq m_n}M\overline{\xi}_{ns}^{(k)}\overline{\xi}_{np}^{(k)}$, в случае m_n-зависимости, $\sigma_{nk}^2=\sum\limits_s M\left(\xi_{ns}^{(k)2};\left|\xi_{ns}^{(k)}\right|\leq\varepsilon_n\right)$, $\varepsilon_n>0$,

$$\Psi_{nk}(x_k)=\sum_s M\left(\frac{\xi_{ns}^{(k)2}}{1+\xi_{ns}^{(k)2}};\xi_{ns}\leq x_k\right).$$

Согласно результатам решения ц.пр.п. для сумм зависимых случайных величин [5], определим логарифм х.ф. сопровождающей ф.р. $F_{nk}(x_k)$ для ф.р. $G_{nk}(x_k)$ формулой:

$$\psi_{nk}(t_k)=-\frac{(\sigma_{nk}^2+a_{nk})t_k^2}{2}+\int\limits_{|x_k|>\varepsilon_n}\left(e^{it_kx_k}-1-it_kx_k\right)\frac{1+x_k^2}{x_k^2}d\Psi_{nk}(x_k),$$

где $\varepsilon_n>0$, и положим $F_n(x)=\prod\limits_{k=1}^n F_{nk}(x_k)$.

Пусть $B_{ns}^{(k)}$ – σ - алгебра, порожденная величиной $\xi_{ns}^{(k)}$.

При формулировке следующей теоремы мы учитываем теорему 14 из [6], относящуюся к условиям сходимости распределения нормированных сумм независимых случайных величин.

Теорема 2. *Пусть вектора системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{\rho}$ *– зависимы, где* m_0 *– любое постоянное число,* $0 \le \rho < \frac{1}{4}$, *найдутся постоянные* H_1, H_2, c_1 *и* n_0 *такие, что при* $n \ge n_0$

$$\max_{s,x} M\overline{\xi}_{ns}^{(k)^2} \le \frac{H_1}{n}, \quad \max_{s,p,q,k} M\left|\xi_{ns}^{(k)}\xi_{np}^{(k)}\xi_{nq}^{(k)}\right| \le \frac{H_2}{n^{3/2}},$$

$$\max_{s,p,k} \sup P\left\{\left|\xi_{np}\right| > H / B_{ns}\right\} \le \frac{c_1}{H^{\alpha} n},$$

где $0 < |s-p| \le m_n$, $0 \le |p-q| \le m_0$, $1 < \alpha \le 2$, $H \ge H_0$. *Тогда если* $F_{nk}(x_k) \in L$, *суммы* S_{nk} *независимы между собой,* $k = \overline{1,d}$ *и* $\varepsilon_n \le c_2 n^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\rho}$, *где* c_2 *– постоянная, то при* $n \ge n_0$ *найдется независимая от n постоянная C такая, что* $\Delta_n \le C n^{-1/8+\rho/2}$.

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы, доказанной в [3] для сумм зависимых случайных величин.

3^0. В этом пункте существование м.о. случайных векторов ξ_{ns} не предполагается. Как и в п. 2^0, рассматривается случай, когда аппроксимирующие ф.р. $F_{nk}(x_k)$ принадлежат классу L. Положим при $H > 0$

$$\overline{\xi}_{ns}^{(k)} = \begin{cases} \xi_{ns}^{(k)}, \left|\xi_{ns}^{(k)}\right| \le H, \\ 0, \quad \left|\xi_{ns}^{(k)}\right| > H, \end{cases} \qquad \overline{\overline{\xi}}_{ns} = \begin{cases} 0, \quad \left|\xi_{ns}^{(k)}\right| \le H, \\ \xi_{ns}^{(k)}, \left|\xi_{ns}\right| > H, \end{cases}$$

$$\overline{\eta}_{ns}^{(k)} = \overline{\xi}_{ns}^{(k)} - M\overline{\xi}_{ns}^{(k)}, \quad \overline{\overline{\eta}}_{ns}^{(k)} = \overline{\overline{\xi}}_{ns}^{(k)}, \quad \eta_{ns}^{(k)} = \xi_{ns}^{(k)} - M\overline{\xi}_{ns}^{(k)}, \quad k = \overline{1,d},$$

$\eta_{ns} = \left(\eta_{ns}^{(1)},\ldots,\eta_{ns}^{(d)}\right)$, $S_n = \sum_{s=1}^{n} \eta_{ns}$, $G_n(x)$ – ф.р. суммы S_n, $G_{nk}(x_k)$ – ф.р. суммы $S_{nk} = \sum_{s=1}^{n} \eta_{ns}^{(k)}$.

Исходя из результатов работ, собранных в [5], определим логарифм х.ф. сопровождающего распределения $F_{nk}(x_k)$ равенством:

$$\psi_{nk}(t_k) = it_k b_{nk} - \frac{\left(\sigma_{nk}^2 + a_{nk}\right)t_k^2}{2} + \int_{|x|>\varepsilon_n} \left(e^{it_k x_k} - 1 - \frac{it_k x_k}{1+x_k^2}\right)\frac{1+x_k^2}{x_k^2}\, d\Psi_{nk}(x_k),$$

где $b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} M\dfrac{\overline{\eta}_{ns}^{(k)}}{1+\overline{\eta}_{ns}^{(k)^2}}$, $a_{nk} = \sum_{0<p-s\le m_n} M\overline{\eta}_{ns}^{(k)}\overline{\eta}_{np}^{(k)}$,

$$\sigma_{nk}^2 = \sum_{s=1}^{n} M\left(\eta_{ns}^{(k)^2}; \left|\eta_{ns}^{(k)}\right| \le \varepsilon_n\right),\ \varepsilon_n > 0,$$

$$\Psi_{nk}(x_k) = \sum_{s=1}^{n} M\left(\frac{\overline{\eta}_{ns}^{(k)^2}}{1+\overline{\eta}_{ns}^{(k)^2}};\ \overline{\eta}_{ns}^{(k)} \le x_k\right).$$

Сопровождающей ф.р. для суммы $S_n = \sum_{s=1}^{n} \eta_{ns}$ будет $F_n(x) = \prod_{k=1}^{d} F_{nk}(x_k)$.

Теорема 3. *Пусть вектора системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{\rho}$ *– зависимы, где* m_0 *– любое постоянное число,* $0 \le \rho < \frac{1}{4}$, *кроме того, найдутся постоянные* H_1, H_2, c_1, *могущие зависеть от* H, *такие, что при* $n \ge n_0$

$$\max_{s,k} M\overline{\eta}_{ns}^{(k)^2} \le \frac{H_1}{n},\quad \max_{s,p,q,k} M\left(\overline{\eta}_{ns}^{(k)}\overline{\eta}_{np}^{(k)}\overline{\eta}_{nq}^{(k)}\right) \le \frac{H_2}{n^{3/2}},$$

$$\max_{s,k} P\left\{\left|\overline{\overline{\xi}}_{ns}^{(k)}\right| > H\right\} \le \frac{c_1}{H^{\alpha} n},$$

где $0 < |s-p| \le m_n$, $0 \le |p-q| \le m_n$, $0 < \alpha \le 2$. *Тогда если* $F_{nk}(x_k) \in L$ *и суммы* S_{nk} *независимы между собой,* $k = \overline{1,d}$, *то при* $\varepsilon_n \le c_2 n^{-\frac{1}{2}+\frac{2\rho}{3}}$ *и* $n \ge n_0$ *будет выполняться неравенство*

$$\Delta_n \le \left(\frac{c}{n^{1/8-\rho/2}} + \frac{c_1}{H^{\alpha}}\right)d,$$

где С – независимая от n *постоянная.*

Доказательство теоремы 3 непосредственно следует из теоремы 1 работы [4] и неравенства (1).

Литература

1. Юдин М.Д. Об аппроксимации распределений сумм зависимых случайных векторов, когда координаты сумм независимы // Весці: НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. – 2000, № 3. – С. 133 – 135.
2. Юдин М.Д. Замечание к аппроксимации распределений сумм зависимых величин безгранично делимыми распределениями // Весці: АН Бел. Сер. фіз.- мат. навук. – 1987, № 2. – С. 38 – 41.
3. Юдин М.Д. К аппроксимации распределений сумм m_n – зависимых величин распределениями из класса L // Изв. вузов. Математика. – 1989, № 4. – С. 83 – 88.
4. Юдин М.Д. Об аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин распределениями из класса L // Весці: АН Бел. Сер. фіз.- мат. навук. – 1991, №1. – С. 35– 41.

5. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Минск, 1990.
6. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972.

Summary

The distribution of the sums m_n – dependent random vectors is approximated by the infinitely distribution it the coordinates sums independent.

Поступила в редакцию 23.09.02.