УДК 517.917

***В.В. Шкут***

# КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij} x^i y^j, \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij}$ - действительные числа.

Пусть для системы (1) кривая

$$y^2 = x^3 + px + q, \; 27q^2 + 4p^3 < 0, \; q < 0 \tag{2}$$

является частным интегралом. Кривая (2) состоит из овала и параболической ветви, причём овал находится левее, а параболическая ветвь правее оси $OY$. Условия на коэффициенты $a_{ij}, b_{ij}$, чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), находим методом, предложенным в [1].

**Теорема.** Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a_{01}y + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2, \\ &\frac{dy}{dt} = \left(\frac{pa_{11}}{2} - \frac{p^2 a_{01}}{2q} - \frac{3qa_{21}}{2}\right)x + \left(\frac{pa_{02}}{2} - \frac{3qa_{12}}{2}\right)y + \left(\frac{3a_{01}}{2} - pa_{21}\right)x^2 - \\ &- pa_{12}xy + \frac{pa_{01}}{2q}y^2 + \left(\frac{3a_{11}}{2} - \frac{pa_{01}}{2q}\right)x^3 + \frac{3a_{02}}{2}x^2y + \frac{3a_{21}xy^2}{2} + \frac{3a_{12}}{2}y^3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Провести полное качественное исследование системы (3) весьма трудно, так как практически невозможно найти особые точки системы. Поэтому дополнительно предполагается, что $a_{01} = a_{02} = a_{21} = 0$ и на овале кривой (2) не лежат особые точки системы (3). Тогда система (3) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}xy + a_{12}xy^2, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{pa_{11}}{2}x - \frac{3qa_{12}}{2}y - pa_{12}xy + \frac{3a_{11}}{2}x^3 + \frac{3a_{12}}{2}y^3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Сразу замечаем, что если $a_{11} = 0$, то $y = 0$ – особая линия системы (4). Если же $a_{12} = 0$, то $y^2 = x^3 + px + c$ – общий интеграл уравнения траекторий системы (4). Далее полагаем $a_{11} \cdot a_{12} \neq 0$.

Приравнивая правые части системы (4) к нулю, находим особые точки системы (4) в конечной части плоскости:

$$x_1 = 0, \ y_1 = 0, \quad (5)$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}; \ y_{2,3} = 0, \quad (6)$$

$$x_4 = \sqrt[3]{\frac{a_{11}^2}{2a_{12}^2} - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11}^2}{2a_{12}^2} - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{a_{11}^2}{2a_{12}^2} - \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11}^2}{2a_{12}^2} - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}}}, \quad (7)$$

$$y_4 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

Точка $(-\sqrt{-\frac{p}{3}}; 0)$ лежит внутри овала. Точка (7) лежит на параболической ветви кривой (2). На овале кривой (2) не будет особых точек, если выполняется неравенство

$$\left(\frac{a_{11}^2}{2a_{12}^2} - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Проведем исследование особых точек (5)-(7).

1. Характеристические числа для точки (5)

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -\frac{3qa_{12}}{2} \neq 0.$$

Систему (4) неособенным преобразованием координат $x$, $y$ и заменой времени приведем к каноническому виду [2]. Не меняя обозначения переменных заменой

$$x \to x, \ y \to \frac{pa_{11}}{3qa_{12}}x + y, \ -\frac{3qa_{12}}{2}dt \to dt,$$

получаем систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{2pa_{11}^2}{9q^2a_{12}^2}x^2 - \frac{2a_{11}}{3q_{12}}xy - \frac{2p^2a_{11}^2}{27q^3a_{12}^2}x^3 - \frac{4pa_{11}}{9q^2a_{12}}x^2y - \frac{2}{3q}xy^2 \equiv \xi(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= y + \frac{2p^2a_{11}\left(a_{11}^2 + 3qa_{12}^2\right)}{27q^3a_{12}^3}x^2 + \frac{2p(a_{11}^2 + 3qa_{12}^2)}{9q^2a_{12}^2}xy - \frac{a_{11}(p^3a_{11}^2 + 81q^3a_{12}^2)}{81q^4a_{12}^3}x^3 - \\ &- \frac{5p^2a_{11}^2}{27q^3a_{12}^2}x^2y - \frac{7pa_{11}}{9q^2a_{12}}xy^2 - \frac{3}{q}y^3 \equiv y + \eta(x,y). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Если $a_{11}^2 + 3qa_{12}^2 = 0$.то при $x \to 0$ видим, что $\dfrac{\eta(x,0)}{\xi(x,0)} \to 0$ и $\xi(x,0) \equiv 0$. Если же $a_{11}^2 + 3qa_{12}^2 \neq 0$, то заменой $y \to \varphi(x) + y$, где $\varphi(x) = -\dfrac{2p^2 a_{11}(a_{11}^2 + 3qa_{12}^2)}{27q^3 a_{12}^3}x^2 + \cdots$, можно достичь того, что $\dfrac{\eta(x,0)}{\xi(x,0)} \to 0$ при $x \to 0$. При этом функция $\varphi(x)$является решением уравнения $y + \eta(x,y) = 0$ относительно $y$.

Полагая $y=0$, получим $\xi(x,0) = -\dfrac{2pa_{11}^2}{9q^2a_{12}^2}x^2 - \dfrac{2p^2a_{11}^2}{27q^3a_{12}^2}x^3 \equiv ax^{\alpha} + a_1x^{\alpha+1} + \cdots$

Так как $a \neq 0$ и $\alpha$ - чётное, то точка (5) является седло-узлом [2].

2. Характеристические уравнения для точек (6) такие:

$$\lambda^2 + \left(\frac{3q}{2} \pm p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)a_{12}\lambda \pm a_{11}^2 p\sqrt{-\frac{p}{3}} = 0 \tag{9}$$

Очевидно, что для точки $\left(\sqrt{-\frac{p}{3}};0\right)$ свободный член меньше нуля. Это значит, что характеристические числа имеют разные знаки. Поэтому точка $\left(\sqrt{-\frac{p}{3}};0\right)$ являются четерехсепаратрисным седлом.

Для точки $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}};0\right)$ свободный член в (9) больше нуля. С учётом того, что $27q^2 + 4p^3 < 0$ и на овале нет особых точек, заключаем, что точка $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}};0\right)$ является узлом или фокусом, а овал кривой (2) является предельным циклом системы (4). Заметим, что если $27q^2 + 4p^3 = 0$, то овал вырождается в точку $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}};0\right)$ с чисто мнимыми характеристическими числами. Нетрудно показать, что уже первое необходимое условие центра не выполняется ни при каком соотношении между коэффициентами системы (4). Это значит, что точка $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}};0\right)$ будет негрубым фокусом, из которого рождается предельный цикл.

3. Характеристическое уравнение для точки (7) имеет вид

$$\lambda^2 - \left(\frac{9a_{11}^2 - 3qa_{12}^2}{2a_{12}} - pa_{12}x_4\right)\lambda + \frac{9a_{11}^2}{2}x_4\left(\frac{p}{3} + x_4^2\right) = 0. \tag{10}$$

Здесь свободный член больше нуля и так как точка (7) лежит на параболической ветви кривой (2), то она может быть только узлом.

Выясним, существуют ли особые точки для системы (4) в бесконечной части плоскости. Применив к системе (4) преобразование Пуанкаре [3] $x = \dfrac{1}{z}$, $y = \dfrac{u}{z}$ и сделав замену времени $\dfrac{3a_{11}}{2}dt \to dt$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= z - \frac{2pa_{12}}{3a_{11}}uz + \frac{p}{3}z^2 + \frac{a_{12}}{3a_{11}}u^3 - \frac{2}{3}u^2z - \frac{qa_{12}}{a_{11}}uz^2 \equiv z + \xi(u,z) \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{2a_{12}}{3a_{11}}u^2z - \frac{2}{3}uz^2 \equiv \eta(u,z) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Полагая в правых частях системы (11) $z=0$ и приравнивая их к нулю, получим $u=0$. Это значит, что «концы» оси $OX$ являются особой точкой системы (4) с характеристическими числами $\lambda_{1,2}=0$. Выясним характер этой особой точки. Согласно [2], находим решение уравнения $z+\xi(u,z)=0$ в виде $z=\alpha_2u^2+\alpha_3u^3+\cdots\equiv\varphi(u)$. Подставив $z=\varphi(u)$ в уравнение, находим $z=-\frac{a_{12}}{3a_{11}}u^3+\cdots\equiv\varphi(u)$. Далее находим $\eta(u,\varphi(u))=\frac{2a_{12}^2}{9a_{11}^2}u^5+\cdots\equiv au^\alpha+\cdots$ т.к. $a>0$ и $\alpha$ - нечётные, то «концы» оси $OX$ являются четырехсепаратрисным седлом.

Применяем теперь к системе (4) преобразование Пуанкаре $x=\frac{v}{z}$, $y=\frac{1}{z}$. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{a_{12}}{2}v + a_{11}vz + pa_{12}v^2z + \frac{3qa_{12}}{2}vz^2 - \frac{3a_{11}}{2}v^4 - \frac{pa_{11}}{2}v^2z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{3a_{12}}{2}z + pa_{12}vz^2 + \frac{3qa_{12}}{2}z^3 - \frac{3a_{11}}{2}v^3z - \frac{pa_{11}}{2}vz^3. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Положив в правых частях $v=z=0$, видим, что «концы» оси $OY$ являются особой точкой. Характеристические числа для нее такие:
$\lambda_1=-\frac{a_{12}}{2}$, $\lambda_2=-\frac{3a_{12}}{2}$. Отсюда следует, что «концы» оси $OY$ являются узлом.

Покажем, наконец, что овал кривой (2) является единственным предельным циклом системы (4). Исходя из характера особых точек, их расположения, хода сепаратрис седел и седло-узла, заключаем следующее: если система (4) имеет еще предельные циклы, то они должны охватывать точку $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}};0\right)$. Но с помощью семейства замкнутых кривых [4] $F(x,y)\equiv x^3-y^2+px+c=0$, $\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}<c<0$, показывается, что овал (2) - единственный предельный цикл системы (4). Действительно, уравнение кривой контактов имеет вид

$$\omega(x,y)\equiv\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=3a_{12}y^2(x^3-y^2+px+q)=0.$$

Если $\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}<c<0$, то кривые семейства расположены внутри овала (2) и $\omega(x,y)\le0$, если $a_{12}<0$ и $\omega(x,y)\ge0$, если $a_{12}>0$. Если $q<c<0$, то кривые семейства расположены вне овала (2) и $\omega(x,y)\ge0$, если $a_{12}<0$ и $\omega(x,y)\le0$, если $a_{12}>0$. Это значит, что фазовые траектории при $t\to\infty$ будут пересекать кривые семейства только один раз. Отсюда следует, что овал является единственным предельным циклом системы (4).

Если $a_{12} > 0$, то цикл устойчив, если $a_{12} < 0$, то неустойчив. Это следует из неравенства $27q^2 + 4p^3 < 0$ и вида характеристического уравнения (9) для точки $(-\sqrt{-\frac{p}{3}};\ 0)$.

***Пример.***

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2xy + xy^2 \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 3y + 4xy - 3x^3 + \frac{3}{2}y^3 \end{aligned}\right\}$$

Система имеет особые точки $(0;0)$ – седло-узел, $(-\frac{2}{\sqrt{3}};\ 0)$ – фокус, $(\frac{2}{\sqrt{3}};\ 0)$ – седло, $(\approx 2{,}55;\ 2)$ - узел, “концы “ оси $OX$ – седло, “концы” оси $OY$ - узел. Овал кривой $y^2 = x^3 - 4x - 2$ – устойчивый предельный цикл системы, охватывающий фокус $(-\frac{2}{\sqrt{3}};\ 0)$.

***Литература***

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую //ПММ. – 1952. – Т.16, Вып. 6. – С. 659-670.
2. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Минск: Выш. шк., 1979. – 136 с.
3. Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения. – Минск: Выш. шк., 1982. – 271 с.
4. Андронов А.А. и др. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

***Summary***

*The complete qualitative research of cubic system of the second order is carried out at presence at it of private integral as one algebraic curve of the third order and other assumptions.*