УДК 519.240

М.Д. Юдин

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ИЗ КЛАССА L

В данной работе получена оценка модуля разности между характеристическими функциями (х.ф.) сумм зависимых случайных векторов и х.ф. сопровождающих распределений, принадлежащих классу L. Предполагается существование конечных математических ожиданий (м.о.) векторов.

Здесь применяется метод дифференцирования х.ф., используемый в [1-5] для одномерного случая, который в многомерном варианте приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных. Для упрощения выкладок рассматриваются двумерные вектора. Обобщение на случай d-мерных векторов очевидно.

1^0 Пусть $\{\xi_{ns}\}_{q=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, – система серий двумерных случайных векторов (d=2), имеющих ограниченные м.о.. Положим: $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\xi_{ns}^{(2)}\right)$, $x=(x_1,x_2)$, $t=(t_1,t_2)$, $S_n=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}$, $(t,\cdot)$- скалярное произведение,

$$\overline{\xi}_{ns}^{(i)}=\begin{cases}\xi_{ns}^{(i)}, & \left|\xi_{ns}^{(i)}\right|\le H_0,\\ 0, & \left|\xi_{ns}^{(i)}\right|>H_0,\end{cases}\qquad \overline{\overline{\xi}}_{ns}^{(i)}=\begin{cases}0, & \left|\xi_{ns}^{(i)}\right|\le H_0,\\ \xi_{ns}^{(i)}, & \left|\xi_{ns}^{(i)}\right|>H_0,\end{cases}$$

где $H_0>0$ – постоянное число. Через $\overline{M}$ будем обозначать м.о, взятое по множеству, на котором координаты векторов, входящих под знак $\overline{M}$, удовлетворяют неравенствам: $\left|\xi_{ns}^{(i)}\right|\le H_0$, через $\overline{\overline{M}}$ -м.о., взятое по дополнению к множеству, по которому берется $\overline{M}$.

Введем матрицу $B_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, где

$$b_{n(i,j)}=\sum_{0<|p-s|\le m_n}\overline{M}\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}+\sum_{s=1}^{n}M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{ns}^{(j)};\left|\xi_{ns}\right|\le\varepsilon_n\right).$$

Предполагается, что вектора системы $\{\xi_{ns}\}$ m_n- зависимы. Зависимость ε_n и m_n от n определяется ниже.

Не нарушая общности, будем считать, что $M\xi_{ns}=0$, $s=\overline{1,n}$, $n=\overline{1,\infty}$.

Согласно общим теоремам о сходимости распределений сумм зависимых векторов к безгранично делимым распределениям [6;7], логарифм х.ф. распределения, сопровождающего распределение суммы S_n, нужно взять в форме

$$\psi_n(t_1,t_2)=-\frac{\left(t,B_nt^*\right)}{2}+\int_{|x|>\varepsilon_n}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi_n(x),\qquad(1)$$

где t^*-вектор-столбец,

$$\Psi_n(x)=\sum_{s=1}^{n}M\left(\frac{\xi_{ns}^2}{1+\xi_{ns}^2};\xi_{ns}\le x\right),$$

причем $\xi_{ns}\le x$ означает $\xi_{ns}^{(i)}\le x_i$, $i=1,2$ [8].

Пусть $\varphi_n(t_1,t_2)$-х.ф. суммы $S_n=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}$., $\mathcal{A}_{ns}$ – σ–алгебра, порожденная вектором ξ_{ns}.

<u>Теорема</u>. *Пусть вектора системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n=m_0n^{\rho}$*-зависимы, где* m_0*- постоянное число,* $0\le\rho<\frac{1}{4}$*, найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* c *такие, что*

$$\max_{s,i}\overline{M}\xi_{ns}^{(i)2}\le\frac{H_1}{n},\qquad \max_{s,p,q,i,j,k}\overline{M}\left|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right|\le\frac{H_2}{n^{3/2}},\qquad(2)$$

$$P\left\{\left|\xi_{np}^{(i)}\right|>H/\mathcal{A}_{ns}\right\}\le\frac{c}{H^{\alpha}n},\qquad(3)$$

где $0<|s-p|\le m_n$, $0\le|p-q|\le m_n$, $1<\alpha\le2$, $H\ge H_0$, $c>0$. *Тогда, если* $\exp\psi_n(t_1,t_2)$ *принадлежит классу* L *и* $0<\varepsilon_n\le c_1n^{-1/2+(2/3)\rho}$, *то*

$$\left|\varphi_n(t_1,t_2)-\exp\psi_n(t_1,t_2)\right|\le\frac{B_{n1}|t_1|+B_{n2}|t_2|}{n^{1/2-2\rho}},$$

где B_{n1} *и* B_{n2}*-многочлены второй степени относительно* $|t|$*, коэффициенты которых разве лишь убывают с ростом* n.

<u>Доказательство.</u> Следуя [1], положим

$$S_{nj}^{(\nu)} = \sum_{|j-s|\geq \nu m_n} \xi_{ns},\ S_{nj}^{(0)} = S_n,\ j=\overline{1,n};\ \nu = 1,2.$$

Из (1) получаем

$$\frac{\partial\psi_n(t_1,t_2)}{\partial t_1} = -(t_1 b_{n(1,1)} + t_2 b_{n(1,2)}) + i\sum_s M\left(\xi_{ns}^{(i)}\left(e^{i(t,s_{ns})}-1\right); |\xi_{ns}| > \varepsilon_n\right) \tag{4}$$

С другой стороны, дифференцируя х.ф. суммы S_n, находим

$$\frac{\partial\varphi_n(t_1,t_2)}{\partial t_1} = i\sum_j M\xi_{nj}^{(i)} e^{i(t,S_{nj}^{(0)})} = i\left(\sum_j M\xi_{nj}^{(1)} e^{i(t,S_{nj}^{(1)})} + \sum_j M\xi_{nj}^{(1)}\left(e^{i(t,S_{nj}^{(0)}-S_{nj}^{(1)})}-1\right)e^{i(t,S_{nj}^{(2)})} + \right.$$

$$\left. + \sum_j M\xi_{nj}^{(1)}\left(e^{i(t,S_{nj}^{(0)}-S_{nj}^{(1)})}-1\right)\left(e^{i(t,S_{nj}^{(1)}-S_{nj}^{(2)})}-1\right)e^{i(t,S_{nj}^{(2)})}\right) \tag{5}$$

В (5), в силу m_n- зависимости, $\sum_j M\xi_{nj}^{(1)}\left(e^{i(t,S_{nj}^{(1)})}\right) = 0$. Пусть $Y_{nj}^{(\nu)} = e^{i(t,S_{nj}^{(\nu-1)}-S_{nj}^{(\nu)})} - 1$, $\nu = 1,2$. Для третьей суммы в (5) получаем

$$\left|M\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(2)} e^{i(t,S_{nj}^{(2)})}\right| \leq 2\overline{M}\left|\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(2)}\right| + \overline{\overline{M}}\left|\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(2)}\right|. \tag{6}$$

Здесь, благодаря (2),

$$\overline{M}\left|\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(2)}\right| \leq \overline{M}\left|\xi_{nj}^{(1)}\left(t, S_{nj}^{(0)} - S_{nj}^{(1)}\right)\left(t, S_{nj}^{(1)} - S_{nj}^{(2)}\right)\right| \leq \frac{16 H_2 m_0^2}{n^{3/2 - 2\rho}}.$$

Далее, из (3) следует, что

$$\max_{s,p}\sup M\left(\left|\overline{\overline{\xi}}_{np}^{(i)}\right| \Big/ A_{ns}\right) \leq \frac{\alpha c}{n(\alpha-1)H_0^{\alpha-1}} = \frac{c_0}{H_0^{\alpha-1} n},\ i=1,2.$$

Поэтому в (6)

$$\overline{\overline{M}}\left|\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(2)}\right| \leq M\left|\overline{\overline{\xi}}_{nj}^{(1)}\ \overline{M}\left(Y_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(2)} \Big/ A_{nj}\right)\right| + M\left|\overline{\xi}_{nj}^{(1)}\overline{\overline{M}}\left(Y_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(2)} \Big/ A_{nj}\right)\right| +$$

$$+ 2M\left|\overline{\overline{\xi}}_j^{(1)}\right|\left|\overline{\overline{M}}\right|Y_{nj}^{(2)}\Big| \leq \frac{16 m_0 c c_0}{H_0^{2\alpha-1} n^{2-\rho}} + \frac{16 H_1^{1/2} m_0 c}{H_0^{\alpha} n^{3/2-\rho}} + \frac{16 H_1^{1/2} m_0 c_0}{H_0^{\alpha-1} n^{3/2-\rho}}.$$

Рассмотрим вторую сумму из правой части (5). В силу m_n- зависимости,

$$\sum_j M\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} e^{i(t,S_{nj}^{(2)})} = \sum_j M\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} M e^{i(t,S_{nj}^{(2)})}$$

Здесь при замене $Me^{i(t,S_{nj}^{(2)})}$ на $Me^{i(t,S_{nj}^{(0)})}$ очевидно придем к тем же оценкам, что и для одномерного случая, опубликованного в [5, 229], но увеличенным в d=2 раза.

Оценим близость $\sum_j M\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)}$ к $\frac{\partial\psi_n}{\partial t_1}$ (4). Имеем

$$M\xi_{nj}^{(1)} Y_{nj}^{(1)} = M\xi_{nj}^{(1)}\left(\exp i\left(t, \sum_{0<|j-s|\leq m_n}\xi_{ns}\right) - 1\right)e^{i(t,\xi_{nj})} + M\xi_{nj}^{(1)}\left(e^{i(t,\xi_{nj})}-1\right).$$

Отсюда, пропуская очевидные оценки (см.[5, 229-230], получаем

$$\left|i\sum_j \overline{M}\xi_{nj}^{(1)}\left(\exp i\left(t, \sum_{0<|j-s|\leq m_n}\xi_{ns}\right) - 1\right) + t_1 \sum_{0<|j-s|\leq m_n}\overline{M}\xi_{nj}^{(1)}\xi_{ns}^{(1)} + t_2 \sum_{0<|j-s|\leq m_n}\overline{M}\xi_{nj}^{(1)}\xi_{ns}^{(2)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum \overline{M}\left|\xi_{nj}^{(1)}\left(t, \sum_{0<|j-s|\leq m_n}\xi_{ns}\right)^2\right| \leq \frac{4 H_2 m_0^2 t^2}{n^{1/2-2\rho}}.$$

Кроме того,

$$\left| i\sum_j M\left(\xi_{nj}^{(1)}\left(e^{i(t,\xi_{nj})}-1\right);\left|\xi_{nj}\right|\le\varepsilon_n\right)+t_1\sum_j M\left(\xi_{nj}^{(1)2};\left|\xi_{nj}\right|\le\varepsilon_n\right)+\right.$$

$$\left.+t_2\sum_j M\left(\xi_{nj}^{(1)}\xi_{nj}^{(2)};\left|\xi_{nj}\right|\le\varepsilon_n\right)\right|\le\frac{nt^2\varepsilon_n^3}{2}\quad.$$

Из проведенных оценок и равенств (4) и(5) следует

$$\frac{\partial\varphi_n(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\varphi_n(t_1,t_2)\frac{\partial\psi_n(t_1,t_2)}{\partial t_1}+\left(\frac{B_n^{(1)}(t)}{n^{1/2-2\rho}}+\frac{nt^2\varepsilon_n^3}{2}\right)\theta_n^{(1)}$$

где $B_n^{(1)}(t)$ -многочлен второй степени относительно $|t|$, коэффициенты которого разве лишь убывают с ростом n, $\left|\theta_n^{(1)}\right|\le 1$. Аналогичное равенство верно и для $\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_2}$. Полагая, при фиксированных t_1 и t_2, $u_1=t_1\gamma$, $u_2=t_2\gamma$, $0\le\gamma\le 1$ и $0<\varepsilon_n\le n^{-1/2+(2/3)\rho}$, приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_n(u_1,u_2)}{\partial u_1}=\varphi_n(u_1,u_2)\dfrac{\partial\psi_n(u_1,u_2)}{\partial u_1}+\dfrac{B_{n1}^*(u_1,u_2)}{n^{1/2-2\rho}},\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_n(u_1,u_2)}{\partial u_2}=\varphi_n(u_1,u_2)\dfrac{\partial\psi_n(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\dfrac{B_{n2}^*(u_1,u_2)}{n^{1/2-2\rho}}.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение на $du_1=t_1d\gamma$, второе — на $du_2=t_2d\gamma$ и складывая, получим

$$d\varphi_n(u_1,u_2)=\varphi_n(u_1,u_2)d\psi_n(u_1,u_2)+\frac{B_{n1}^*t_1+B_{n2}^*t_2}{n^{1/2-2\rho}}d\gamma \tag{7}$$

Интегрируя (7), при $0\le\gamma\le 1$, найдем

$$\varphi_n(t_1,t_2)=e^{\psi_n(t_1,t_2)}\left(1+\int_0^1 e^{-\psi_n(u_1,u_2)}\frac{B_{n1}^*(u_1,u_2)t_1+B_{n2}^*(u_1,u_2)t_2}{n^{1/2-2\rho}}d\gamma\right) \tag{8}$$

Поскольку $\exp\psi_n(t_1,t_2)\in L$, то $\exp\left(\psi_n(t_1,t_2)-\psi_n(u_1,u_2)\right)$ - х.ф. (для одномерного случая см.[9], стр. 664, обобщение очевидно), поэтому $\left|\exp\left(\psi_n(t_1,t_2)-\psi_n(u_1,u_2)\right)\right|\le 1$. Отсюда и (8) следует доказательство теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, договор №Ф97–399 от 1-го марта 1998 года.

Литература

1. Тихомиров А.Н. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и ее применение. – 1980. Т.25, №4. – С.800-818.

2. Юдин М.Д. Замечание к аппроксимации распределений сумм зависимых величин безгранично делимыми распределениями // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – №2. – С.38-41.

3. Юдин М. Д. К аппроксимации распределений сумм m_n- зависимых величин распределениями из класса L // Изв. вузов. Математика. – 1983, №4. – С.83-88.

4. Юдин М. Д. Об аппроксимации распределений сумм зависимых величин распределениями из класса L // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1991. – №1. – С.35-41.

5. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Минск: Университетское, 1990.–254 с.

6. Юдин М. Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – №3. – С.31-35.

7. Юдин М. Д. Об обобщении формулы Леви-Хинчина на суммы зависимых векторов // Изв.вузов. Математика. – 1996. – №4. – С.75-80.

8. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. – М.: Наука, 1967. – 752с.

Summary

There is an estimation of a difference between characteristic functions of the sums of dependent random vectors and characteristic functions approximated of accompanying distributions from the class L.