УДК 518.12

Л.В. Дорошева

АППРОКСИМАЦИЯ И АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО ЯДРА УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Введение

Проблема создания систем космического мониторинга - дистанционного наблюдения за состоянием био- и озоносферы, земных покровов, океанов и водоемов [1; 2; 3] – особенно важна для экологически неблагоприятных регионов Земли.

Ее решение поставило ряд математических задач: расчет вариаций яркости системы атмосфера-неоднородная поверхность, освещенная солнечным светом (прямая задача дистанционного зондирования), "восстановление" исходной информации о состоянии био- и озоносферы (обратная задача). Эти пятимерные по фазовому пространству задачи представляют большие вычислительные трудности [1; 4]. Для численного решения задач атмосферной оптики и уравнений, описывающих распространение оптического излучения в атмосфере, применяются различные методы, упрощающие вычисления (например, аппроксимация входных функций и применение "быстрого" преобразования Фурье) [1; 4; 5]. В настоящее время успешно решаются прямые задачи; методы эффективного решения обратных задач находятся на стадии становления [4]. Последнее обусловлено тем, что математическая формулировка обратной задачи дистанционного зондирования приводит к многомерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,s)z(s)ds = u(s)$. Поскольку входные данные в обратной задаче – результат эксперимента, с математической точки зрения задача оказывается некорректно поставленной. Методы решения некорректных задач существенно более трудоемки по сравнению с решением уравнений других типов [6, 7]. Объем вычислений тем более увеличивается, когда решается многомерная задача.

В данной работе метод табличных фурье-преобразований [8, 9] используется для решения некорректной обратной задачи в неизопланарной области.

1.Аппроксимация ядра

Реальные изображающие системы обычно неизопланарны, лишь приближенно поле изображения можно разбить на изопланарные участки [2]. Чтобы полностью описать такую систему, необходимо определить импульсный отклик, соответствующий каждому изопланарному участку. В общем случае $K(x,s) \neq K(x-s)$ и $\breve{K}(\omega) = |\breve{K}(\omega)| \exp(i\Phi(\omega))$, а метод табличных трансформант [8; 9] применим только для $\Phi(\omega) = \pm\omega\xi$ (ξ - сдвиг координаты узла в плоскости изображения).

Рассмотрим более общий случай фазово-частотной характеристики $\Phi(\omega)$. Пусть по экспериментальным данным или расчетным путем известна $\Phi(\omega)$. Представим $K(x) = K^+(x) + K^-(x)$, где

$$K^+(x) = [K(x) + K(-x)]/2, \quad (1)$$

$$K^-(x) = [K(x) - K(-x)]/2. \quad (2)$$

В формулах (1),(2) $K^-(x)$ – нечетная (несимметричная) функция, а $K^+(x)$ – четная (симметричная). Найдем фурье-образ $K(x)$

$$F[K(x)] = \breve{K}(\omega) = F[K^+(x) + K^-(x)] = F[K^+(x)] + F[K^-(x)].$$

(3)

Причем

$$F[K^+(x)] = \breve{K}^+(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x) K^+(x)dx = 2\int_0^{+\infty} \cos(\omega x) K^+(x)dx = \breve{K}_c(\omega) \quad (4)$$

$$F[K^-(x)] = \breve{K}^-(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x) K^-(x)dx = 2i\int_0^{+\infty} \sin(\omega x) K^-(x)dx = i\breve{K}_s(\omega). \quad (5)$$

Таким образом, получили, что

$$\breve{K}(\omega) = \breve{K}_c(\omega) + i\breve{K}_s(\omega) \quad (6)$$

С другой стороны, $\breve{K}(\omega)$, как и любое комплексное число, представимо в виде $\breve{K}(\omega) = |\breve{K}(\omega)| \arg \breve{K}(\omega)$, где

$$\arg \breve{K}(\omega) = arctg \frac{\mathrm{Im}(\breve{K}(\omega))}{\mathrm{Re}(\breve{K}(\omega))} = \Phi(\omega). \quad (7)$$

Можно записать

$$\breve{K}(\omega) = |\breve{K}(\omega)| (\cos\Phi(\omega) + i \sin\Phi(\omega)). \quad (8)$$

Сравнивая (6) и (8), получим

$$\begin{aligned} \breve{K}_c(\omega) &= |\breve{K}(\omega)| \cos\Phi(\omega) = \breve{K}^+(\omega), \\ \breve{K}_s(\omega) &= |\breve{K}(\omega)| \sin\Phi(\omega). \end{aligned} \quad (9)$$

В качестве $K^+(x)$ можно принять любую из функций, применявшихся для аппроксимации $\breve{K}(\omega)$ [8], положив $K(x) = F^{-1}[\breve{K}(\omega)]$, например,

$$K^+(x) = F^{-1}[\sum_i a_i \exp(-b_i|\omega|)] \quad (10)$$

или

$$g(x) = -(\pi\alpha[1 + x^2/\alpha^2])^{-1}. \quad (11)$$

В качестве ассиметричной $K^-(x)$ примем, например,

$$g^-(x) = (a^2 + x^2)^{-1} \sin(2arctg\frac{x}{a}). \quad (12)$$

Функция (12) удобна по следующим причинам:

1) синус-преобразование этой функции

$$\breve{K}_s(\omega) = \breve{g}^-(\omega) = \omega \exp(-a|\omega|), a > 0, \quad (13)$$

т.е. фурье-образ опять-таки экспонента с множителем ω , как и при решении прямой задачи;

2) функция (12) имеет асимметрию тем больше, чем дальше от начала координат (плоскости симметрии) находится рассматриваемая точка x.

2. Алгоритм вычисления коэффициентов аппроксимирующей функции

Предположим, что известны по экспериментальным данным, либо рассчетным путем [4] n точек фазовой характеристики $\Phi(\omega)$. Пусть $\breve{K}_s(\omega)$ аппроксимируется суммой

$$\breve{K}_s(\omega) \approx \sum_{i=1}^{n} \omega \exp(-a_i\omega). \tag{14}$$

Ограничимся на аппроксимируемой кривой тремя точками, не считая $\omega = 0$. Построим систему:

$$\begin{cases} \omega_1 \exp(-a_1\omega_1) + \omega_1 \exp(-a_2\omega_1) + \omega_1 \exp(-a_3\omega_1) = \left|\breve{K}(\omega_1)\right| \sin\Phi(\omega_1), \\ \omega_2 \exp(-a_1\omega_2) + \omega_2 \exp(-a_2\omega_2) + \omega_2 \exp(-a_3\omega_2) = \left|\breve{K}(\omega_2)\right| \sin\Phi(\omega_2), \\ \omega_3 \exp(-a_1\omega_3) + \omega_3 \exp(-a_2\omega_3) + \omega_3 \exp(-a_3\omega_3) = \left|\breve{K}(\omega_3)\right| \sin\Phi(\omega_3). \end{cases} \tag{15}$$

Перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} \exp(-a_1\omega_1) + \exp(-a_2\omega_1) + \exp(-a_3\omega_1) = (\left|\breve{K}(\omega_1)\right| \sin\Phi(\omega_1))/\omega_1, \\ \exp(-a_1\omega_2) + \exp(-a_2\omega_2) + \exp(-a_3\omega_2) = (\left|\breve{K}(\omega_2)\right| \sin\Phi(\omega_2))/\omega_2, \\ \exp(-a_1\omega_3) + \exp(-a_2\omega_3) + \exp(-a_3\omega_3) = (\left|\breve{K}(\omega_3)\right| \sin\Phi(\omega_3))/\omega_3. \end{cases} \tag{16}$$

Разумеется, решить такую систему точно не представляется возможным. Допустим, что частоты ω_1, ω_2 и ω_3 выбраны так, что в системе (16) можно пренебречь в последнем уравнении вторым и третьим слагаемыми по сравнению с первым, а во втором уравнении – третьим слагаемым. Тогда, обозначая $Q_k = \left|\breve{K}(\omega_k)\right| \sin\Phi(\omega_k), k = \overline{1,3}$, имеем приближенно из (16):

$$\begin{aligned} &\exp(-a_1\omega_2) + \exp(-a_2\omega_2) = Q_2/\omega_2, \\ &\exp(-a_1\omega_3) = Q_3/\omega_3, \end{aligned} \tag{17}$$

что дает

$$a_1 = -\frac{1}{\omega_3}\ln\frac{Q_3}{\omega_3} = -\frac{1}{\omega_3}(\ln Q_3 - \ln\omega_3). \tag{18}$$

После подстановки в (17) находим

$$a_2 = -\frac{1}{\omega_2}\ln(Q_2/\omega_2 - (Q_3/\omega_3)^{\omega 2/\omega 3}). \tag{19}$$

И, наконец, подставляя (18) и (19) в (16), получаем и α_3. Величины a_1, a_2, a_3 дают в фурье-образах множители $\omega\exp(-a_i\omega)$, . $i = 1,2,3$.

Можно записать

$$\begin{cases} z_\alpha^+(x) = F^{-1}[\breve{K}_c^{-1}(\omega)\breve{u}(\omega)\exp(-a|\omega|)], \\ z_\alpha^-(x) = F^{-1}[\breve{K}_s^{-1}(\omega)\breve{u}(\omega)\exp(-a|\omega|)] \end{cases} \tag{20}$$

тем самым доказана

Лемма. Решение интегрального уравнения первого рода с ядром $K(x,s) \neq K(x-s)$ может быть сведено к вычислению функционалов типа $z(x) = F^{-1}[\breve{K}^{-1}(\omega)\breve{u}(\omega)]$ для $\breve{K}_c(\omega)$ и $\breve{K}_s(\omega)$. Суперпозиция этих решений дает решение интегрального уравнения первого рода $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,s)z(s)ds = u(s)$ с комплекснозначным фурье-образом ядра $K(x,s)$.

Совокупность решений для обратной задачи в изопланарной области [9] и (20) полностью решает обратную задачу.

Заключение

Предлагаемый алгоритм свободен от необходимости многократного выполнения преобразований Фурье, для многомерного случая достаточно трудоемких. Он может быть использован в следующих отраслях науки и техники: космический мониторинг, радиотехника и телевидение (при синтезе антенн, для улучшения диаграмм их направленности), дистанционный поиск полезных ископаемых (решение обратной задачи гравиметрии), спектроскопия ("восстановление" характеристик плотности энергии по спектру излучения), астрофизика (определение характеристик звезд и крупномасштабных объектов Вселенной по спектрам излучения).

Литература

1. Имитационное моделирование в задачах оптического дистанционного зондирования /Креков Г.М., Орлов В.Р., и др. - Новосибирск: Наука, 1988. - 165с.
2. Дистанционное зондирование: количественный подход. /Дейвис Ш.М., Ландсребе Д.А. и др. - М.: Недра, 1983. -415с.
3. Diner D.S., Mantonchik I.V. Atmospheric tranfer of radiation above an inhomogene ons non-lambertian refletive ground. Theory // I. Quant. Spectrosc and Radiat Transfer. - 1984. - Vol. 31, № 2. - P. 97-125.
4. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. - М.: Наука, 1990. - 296с.
5. Математическая модель передаточных свойств атмосферы: Сб. Науч. трудов / Т.А. Сушкевич, А.А. Иолтуховский, С.А. Стрелков; под ред. проф. М.В. Масленникова, канд. физ.-мат. наук Т.А. Сушкевич. - М., 1994. - С. 4-21.
6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ: Справочное пособие. - Киев: Наукова думка, 1978. - 291с.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. - 223с.
8. Мозалевский В.В. Математическое моделирование электрофотографического канала. - Мн.: Наука и техника, 1984. - 232с.
9. Мозалевский В.В. Об одном методе решения уравнения первого рода типа свертки // Фундаментальная и прикладная математика. – 1996.-№1.-С. 301-304.

Summary

The decision of an incorrect return task out using of a method of Fouriertransformations and method of regularization of A.N. Tihonov is carried. The approximation of the kernel of the return operator in unisoplanar area is offered. The lemma about the decision of the integrated equation of the first kind with nondifference kernel is proved. The algorithm of calculation of coefficients for complex kernel of the integrated equation of Fredgolm of the first kind is developed.