УДК 519.240

М.Д. Юдин

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Решая центральную предельную проблему теории вероятностей (ц. пр. п.) для сумм зависимых случайных величин (см., например [1-3]), мы выявили в основном достаточные условия сходимости распределений этих сумм к данному безгранично делимому распределению, логарифм характеристической функции (х. ф.) которого выражается, в случае ограниченных дисперсий, по формуле, обобщающей формулу Колмогорова, и, в случае неограниченных дисперсий, по формуле, обобщающей формулу Леви–Хинчина.

В данной работе определяются некоторые необходимые условия сходимости распределений сумм зависимых величин к данному безгранично делимому распределению, исследуется сохранение некоторых необходимых и достаточных условий сходимости распределений сумм независимых величин при переходе к суммам зависимых величин.

Рассматривается случай ограниченных дисперсий. Основными ограничениями зависимости мы берем m_n-зависимость и условие равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) [4].

1°. Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий случайных величин, определенных при каждом n на общем векторном пространстве и имеющих ограниченные дисперсии, $S_n=\sum_s \xi_{ns}$, $S_{n(s,n)}=\xi_{n(s+1)}+\ldots+\xi_{nn}$, B_{ns} — σ–алгебра, порождённая ξ_{ns}.

Разрабатывая аппарат решения ц. пр. п. теории вероятностей для сумм зависимых величин, мы ввели функции [1]

$$f_{ns}(t,B_{ns})=\frac{\mathrm{M}\left(\exp itS_{n(s,n)}/B_{ns}\right)}{\mathrm{M}\left(\exp itS_{n(s,n)}\right)},$$

$$\varphi_{ns}(t)=\mathrm{M}\left(e^{it\xi_{ns}}f_{ns}(t,B_{ns})\right),\quad \alpha_{ns}(t)=\mathrm{M}\left(\xi_{ns}f_{ns}(t,B_{ns})\right)$$

и условие (А) [1]: *при любом фиксированном t*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_s\left|\varphi_{ns}(t)-1\right|^2=0. \qquad \text{(A)}$$

Очевидно, что если $\varphi_n(t)$ — х. ф. суммы S_n, то

$$\varphi_n(t) = \prod_{s=1}^{n} \varphi_{ns}(t).$$

В [1] приведено доказательство леммы (типа леммы Бавли):

Лемма 1. *Пусть система серий* $\{\xi_{ns}\}$ *удовлетворяет условию* (А). *Тогда для того чтобы х. ф.* $\varphi_n(t)$ *сумм* $S_n = \sum_s \xi_{ns}$ *сходились к функции* $\varphi(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_s \left(\varphi_{ns}(t) - 1\right) = \ln \varphi(t).$$

Предположим далее, что величины ξ_{ns} центрированы своими математическими ожиданиями (м. о.), т.е. $\mathrm{M}\xi_{ns} = 0$, $s = \overline{1,n}$, $n = \overline{1,\infty}$. Обозначим

$$\gamma_n(t,x) = \sum_{s=1} \mathrm{M}\left(\xi_{ns}^2 f_{ns}(t, B_{ns}); \xi_{ns} \le x\right), \quad \alpha_n(t) = \sum_{s=1} \alpha_{ns}(t),$$

$G_n(x)$ – функция распределения (ф. р.) суммы S_n, $F(x)$ – ф. р. с логарифмом х. ф. $\psi(t)$.

Теорема 1. *Пусть система серий* $\{\xi_{ns}\}$ *удовлетворяет условию* (А). *Тогда для того чтобы* $G_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}} F(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} d_x \gamma_n(t,x) + it\alpha_n(t) = \psi(t), \tag{1}$$

где подынтегральная функция в точке $x=0$ *равна* $-\dfrac{t^2}{2}$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{M} f_{ns}(t, B_{ns}) = 1$, то

$$\sum_s \left(\varphi_{ns}(t) - 1\right) = \sum_s \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) f_{ns}(t, B_{ns}) dP\{\xi_{ns} \le x\} + it\alpha_n(t).$$

Отсюда, по свойству интеграла Стилтьеса,

$$\sum_s \left(\varphi_{ns}(t) - 1\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} d_x \gamma_n(t,x) + it\alpha_n(t).$$

Заканчивает доказательство лемма 1 и 2–ая теорема Леви (теорема непрерывности).

2°. Ниже $h(x)$ – медленно меняющаяся функция при $n\to\infty$ [4].

Теорема 2. *Пусть случайные величины системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{\frac{1}{4}-\rho}$ – *зависимы, где* m_0 – *любое постоянное число,* $0<\rho\le 1/4$, *и выполняется условие*

$$\max_s \mathrm{M}\xi_{ns}^2 \le \frac{H\ h(n)}{n}, \tag{2}$$

где H – *постоянная. Тогда, если существует предельное распределение сумм* $S_n = \sum_s \xi_{ns}$, *то оно необходимо безгранично делимо.*

Доказательство. Сделаем разбиение суммы S_n по методу Бернштейна:

$$u_{ni} = \sum_{s=(i-1)k+(i-1)m+1}^{ik+(i-1)m} \xi_{ns}, \quad \upsilon_{ni} = \sum_{s=ik+(i-1)m+1}^{ik+im} \xi_{ns}, \quad i = \overline{1,\nu}, \tag{3}$$

$S_{n1} = \sum_i u_{ni}$, $S_{n2} = \sum_i \upsilon_{ni}$, $S_n = S_{n1} + S_{n2}$. Можно считать [1], что n кратно $k+m$, т.е. $n=(k+m)\nu$.

Возьмем в разложении (3) $k = \left\lfloor n^{1/2-\rho} \right\rfloor$, $m = \left\lfloor n^{1/4-\rho} \right\rfloor$. Тогда

$$MS_{n2}^2 = \sum_i M\upsilon_{ni}^2 \le \frac{H\ vm^2 h(n)}{n} \to 0, \quad \max_i Mu_{ni}^2 \le \frac{H\ k^2 h(n)}{n} \to 0$$

при $n\to\infty$. Следовательно, во–первых, предельное распределение суммы S_n совпадает с предельным распределением суммы S_{n1} [1]; во-вторых, поскольку слагаемые u_{ni} суммы S_{n1} равномерно бесконечно малые и независимые, то согласно общей теории суммирования независимых случайных величин (см., например, [4–6]), класс предельных распределений сумм S_{n1} совпадает с классом безгранично делимых распределений с ограниченными дисперсиями и нулувыми м. о.

Замечание. В теореме 2 условие m_n–зависимости можно заменить на условие р. с. п., коэффициент которого $\beta(\tau)$ таков, что $\sum_{i=1}^{\infty} \beta^{1/2}(\tau) < \infty$ (см. лемму 2.1 в [1]).

Следствие. Если выполнены условия теоремы 2, то в (1) $\psi(t)$– логарифм безгранично делимой х. ф., причем

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} dQ(x), \qquad (4)$$

где $Q(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} M\left(u_{ni}^2; u_{ns} \le x\right)$ [4–6].

Представление логарифма х. ф. предельного распределения S_n в форме (4) рассматривалось в (7). Это представление имеет теоретическое значение, но на практике вряд ли применимо из–за трудности нахождения $Q(x)$.

3°. Предположим, что $K_n^*(x) = \sum_{s=1}^{n} M\left(\xi_{ns}^2 \le x\right)$, $a_n = \sum_{s\ne p} M\xi_{ns}\xi_{np}$ равностепенно ограничены при всех n и x.

Теорема 3. *Пусть случайные величины системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$ *–зависимы, где m_0 - любое постоянное число,* $0<\rho\le 1/8$, *кроме того, найдутся постоянные H_1, H_2 и n_o такие, что при* $n \ge n_o$

$$\max_s M\xi_{ns}^2 \le \frac{H_1 h(n)}{n}, \quad \max_{s,p,q} M\left|\xi_{ns}\xi_{np}\xi_{nq}\right| \le \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}}, \qquad (5)$$

где $0 \le |s-p| \le m_0 n^{1/4-\rho}$, $0 < |s-q| \le m_0 n^{1/4-\rho}$. *Тогда для того, чтобы суммы* $S_n = \sum_s \xi_{ns}$ *имели предельное распределение, логарифм х. ф которого выражается по формуле*

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} dK(x)$$

где $K(x)$ *–ограниченная неубывающая функция и* $K(-\infty)=0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$K_n(x) = \begin{cases} K_n^*(x), & x < 0, \\ K_n^*(x) + a_n, & x \ge 0 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл}} K(x) \ .$$

Доказательство. Сделаем разбиение (3) с $k = \left[m_0 n^{1/4-\rho}\right]$, $m = \left[m_0 n^{1/8-\rho}\right]$, $0 < \rho \le \frac{1}{8}$, и пусть

$$\eta_{n1}, \eta_{n2}, \ldots, \eta_{n\ell}, \ \ell = \nu k, - \qquad (6)$$

система серий величин ξ_{ns}, вошедших при разбиении (2) в u_{ni}, $i=\overline{1,\nu}$, и выписанных в порядке возрастания индексов. Как показано в доказательстве теоремы 2.3 из [1] (стр. 60), система (6) удовлетворяет условию (А), $\mathrm{MS}_{n2}^2 \to 0$, $\sum_{q=1}^{\nu m} \mathrm{M}\eta_{nq}'^2 \to 0$ при $n\to\infty$, где η_{nq}' –величины, вошедшие в υ_{ni}, $i=\overline{1,\nu}$ при разбиении (2). Составим функции $\gamma_n(t,x)$ и $\alpha_n(t)$ для системы (6). В доказательстве той же теоремы 2.3 из [1] показано, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}d_x\gamma_n(t,x)+it\alpha_n(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}d\mathrm{K}_n^*(x)-\frac{a_nt^2}{2}=o(1)$$

при $n\to\infty$. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}d\mathrm{K}_n^*(x)-\frac{a_nt^2}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}d\mathrm{K}_n(x)$$

то утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1 и решения ц. пр. п. для сумм независимых равномерно бесконечно малых случайных величин в случае ограниченных дисперсий (см., например, [4–6,1]).

З а м е ч а н и е 1. Условие $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$–зависимости в теореме 2 можно заменить на условие р. с. п. с коэффициентом $\beta(\tau)=o(\tau^{-3-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, но при этом условие $\mathrm{M}\xi_{ns}^2 \le \frac{H_1 h(n)}{n}$ в (5) заменяется на $\mathrm{M}\xi_{ns}^2 \le \frac{H_1}{n}$ (см. теорему 2.7 в [1], стр. 72).

З а м е ч а н и е 2. Требование ограниченности сверху предела суммы ковариаций в условиях теоремы 3, в случае m_n–зависимости, необходимо, вообще говоря, само по себе. Рассмотрим

П р и м е р. Пусть $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{n(n+m-1)}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины:

$$X_{ns}=\begin{cases}\dfrac{g}{r\sqrt{n}}, & p_1=\dfrac{1}{2},\\[2mm] -\dfrac{g}{r\sqrt{n}}, & p_2=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$s=\overline{1,n+m-1}$, $g>0$ – постоянное. Определим систему серий m-зависимых величин, положив

$\xi_{ns}= X_{ns} + X_{n(s+1)} + \ldots + X_{n(s+m-1)}$, $s=\overline{1,n}$.

Очевидно, $\mathrm{D}\xi_{ns}=\mathrm{M}\xi_{ns}^2=\dfrac{mg^2}{r^2n}$. Пусть $r=\left[n^{\alpha}\right]$, $m=\left[n^{\beta}\right]$, $0<\beta<2\alpha<1/8$. При таких r и m $\sum_{s=1}^{n} D\xi_{ns} \to 0$ при $n\to\infty$. В то же время, если при этом $r=\left[n^{\alpha}\right]$, $m=\left[n^{\alpha}h(n)^{1/3}\right]$ и $h(n)\to\infty$, то $\sum_{s\ne p}\mathrm{M}\xi_{ns}\xi_{np}=\dfrac{2m(m-1)n}{2r^2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. Нетрудно видеть, что система серий $\{\xi_{ns}\}$ этого примера удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Об ограниченности суммы ковариаций снизу можно не заботиться поскольку, как показано в [1] (см. доказательство теоремы 2.5 в стр.65), в условиях теоремы 3

$$\mathrm{K}^*(+0)-\mathrm{K}^*(-0)+a=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{M}\left(u_{ni}^2;\ \left|\eta_{nq}\right|\le\varepsilon,\ q=\overline{1,\nu k}\right), \qquad (7)$$

где η_{nq} – величины системы (6), $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Равенство (7) обеспечивает неотрицательный скачок функции K(x) в нуле.

Таким образом, в условиях теоремы 3, при m_n–зависимости или выполнения условия р. с. п. (замечание 1 к теореме 3), класс предельных распределений сумм остается классом безгранично делимых распределений с ограниченными дисперсиями, т.е. является тем же классом, что и для сумм независимых слагаемых. Важно то, что мы получили новую существенную информацию об этом классе. А именно, поскольку независимость — редкое явление в природе, то в каждом случайном процессе появляется, вообще говоря, нормальный компонент, "шум", как результат корреляции слагаемых, что, например, не дает предельному распределению быть дискретным.

4°. В предложенном нами доказательстве, с применением метода Бернштейна разбиения (3), показатель степени $m_0 n^{1/8-\rho}$–зависимости, $0<\rho\le 1/8$, величин системы $\{\xi_{ns}\}$ оптимален.

Действительно, для того чтобы при разбиении (3) $MS^2_{n2} \to 0$ при $n\to\infty$, необходимо, вообще говоря, чтобы $\frac{vm^2}{n} \sim \frac{m^2}{k} \to 0$. Отсюда следует, что $m^2=o(k)$. Кроме того, при доказательстве теоремы 2.3 из [1] существенным является тот факт, что для системы (6) в условиях теоремы 3 $\sum_{j=1}^{vk} M\eta_{nj} S^2_{n(j,p)} \to 0$ при $n\to\infty$, где $S_{n(j,p)} = \eta_{n(j+1)} + \ldots + \eta_{np}$, $p=p(j)$ индекс последней величины той части u_{ni} разбиения (3), в которую вошла η_{nj}. Отсюда следует, что $\frac{vk^3}{n^{3/2}} \sim \frac{k^2}{n^{1/2}} \sim o(1)$. Из того, что $k=o(n^{1/4})$ и $m=o(k^{1/2})$ следует, что $m=o(n^{1/8})$. Значит, при нашем методе доказательства теоремы 3 $m_n = o(n^{1/8})$ – зависимость, вообще говоря, не усиляема.

Литература

1. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Мн.: Университетское, 1990. – 254 с.
2. Юдин М. Д. Об обобщениях формул Колмогорова и Леви–Хинчина на суммы зависимых величин// ДАН БССР. – 1986, т. 30, № 1. – С. 29–31.
3. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых случайных величин с неограниченными дисперсиями// ДАН БССР.–1984, т. 28, № 6. – С.496–498.
4. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
5. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин.–М., Наука,1972.–414с.
6. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М., 1949. – 264 с.
7. Philipp W. The Central limit Problem for Mixing Sequences of random variables// Z. Wahrscheinlichkcitsthesr. Verw. Geb.– 1969, v.12, N2,–P.155–171

Summary

There are indispensable and sufficient conditions of convergence of distributions of the sums of dependent random variables in case of restricted dispersions.

Поступила в редакцию 11.05.01.