УДК 519.21

Ф. Д. Коршков

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ

Для одноканальной системы массового обслуживания (СМО) с ординарным пуассоновским входящим потоком и показательным обслуживанием (СМО типа $M|M|1|0$) известны вероятности состояний в стационарном режиме [1,2].

В данной работе получены вероятности состояний в стационарном режиме для одноканальной СМО с рекуррентным входящим потоком и рекуррентным обслуживанием (СМО типа $GI|G|1|0$).

Для нахождения функции восстановления $H(t)$ использованы определения и формулы, приведенные в [3,4]. Нахождение $H(t)$ для произвольных рекуррентных потоков трудная задача. Приведены примеры вычисления стационарных вероятностей состояний для некоторых СМО с эрланговским входящим потоком второго порядка и эрланговским обслуживанием произвольного порядка.

Пусть

$A(t)$ – ф. р. (функция распределения) длительности промежутка между заявками входящего потока интенсивности λ;

$B(t)$ – ф. р. длительности обслуживания интенсивности μ;

$b(t)$ – плотность распределения длительности обслуживания;

$\rho = \lambda / \mu$ - загрузка СМО (допускается $\rho > 1$);

p_0 ,p_1 – соответственно вероятности состояний СМО, когда в ней нет заявок или одна заявка на обслуживании;

$p_k(t)$ – вероятность поступления k заявок за промежуток времени t;

$P(z,t)$ – производящая функция числа поступлений заявок за промежуток времени t в рекуррентном потоке, определяемом ф.р $A(t)$;

$\sum kp_k(t) = P'_z(z,t)|_{z=1} = H(t)$ – среднее число заявок, поступивших за промежуток времени t.

Найдем среднее число заявок, получивших отказ, пока не закончилось обслуживание заявки. Разобьем большой промежуток времени $(0,T)$ на n частей точками $t_1, t_2, t_3 \ldots$

$H(t_k)\,(B(t_{k+1}) - B(t_k)) = H(t_k)\Delta B(t_k)$ – среднее число заявок, получивших отказ за промежуток времени t, если обслуживание не закончилось за промежуток времени $(0,t)$.

При $T \to \infty$ получаем среднее число заявок, получивших отказ, пока не закончилось обслуживание заявки.

Суммируя по всем k при $\Delta t_k = (t_{k+1} - t_k) \to 0$, получаем среднее число заявок, получивших отказ за промежуток времени $(0,T)$, если не закончилось обслуживание заявки:

$$\int_0^\infty H(t)dB(t) = \int_0^\infty H(t)b(t)dt.$$

$$\int_0^T H(t)dB(t).$$

Тогда вероятность отказа (числитель - среднее число заявок, получивших отказ, пока одна заявка находилась на обслуживании, знаменатель - сумма среднего числа заявок, получивших отказ, и заявки, находящейся на обслуживании.

$$p_{отк} = \frac{\int_0^\infty H(t)dB(t)}{1 + \int_0^\infty H(t)dB(t)}.$$

Найдем p_1.

λT – число заявок, поступивших за длительный промежуток времени $(0,T)$;

$\lambda T(1 - p_{отк})$ – среднее число обслуженных заявок за время $(0,T)$;

$\lambda T(1 - p_{отк})\cdot(1/\mu)$ - среднее время, затраченное на обслуживание этих заявок.

Разделив последнее выражение на T, получаем

$p_1 = \rho(1 - p_{отк})$; $p_0 = 1 - p_1$.

Примеры. Система $E_2|E_2|1|0$.

$A(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$ – ф.р. эрланговского потока второго порядка интенсивности $\lambda/2$;

$b(t) = 1 - e^{-\mu t} - \mu t e^{-\mu t}$ - ф.р. эрланговского обслуживания второго порядка интенсивности $\mu/2$;

$\rho = (\lambda / \mu)$- загрузка системы;

$H(t) = (\lambda t / 2) + (e^{-2\lambda t}) / 4 - 1/4$ – среднее число заявок, поступивших за промежуток времени $(0,t)$ в эрланговском потоке второго порядка.

Среднее число заявок, получивших отказ, пока не закончилось

Обслуживание, равно

$$\int_0^\infty H(t)dB(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\lambda t}{2} + \frac{1}{4}e^{-2\lambda t} - \frac{1}{4}\right)\mu^2 t e^{-\mu t}dt = \frac{\lambda\mu^2}{2}\cdot\frac{2}{\mu^3} + \frac{\mu^2}{4}\cdot\frac{1}{(2\lambda+\mu)^2} - \frac{\mu^2}{4}\cdot\frac{1}{\mu^2} =$$

$$= \rho + \frac{1}{4(2\rho+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{\rho^2(4\rho+3)}{(2\rho+1)^2};$$

$$p_{отк} = \frac{\rho + \dfrac{1}{4(2\rho+1)^2} - \dfrac{1}{4}}{1 + \rho + \dfrac{1}{4(2\rho+1)^2} - \dfrac{1}{4}} = \frac{4\rho + (2\rho+1)^{-2} - 1}{4\rho + (2\rho+1)^{-2} + 3} = \frac{\rho^2(4\rho+3)}{4\rho^3 + 7\rho^2 + 4\rho + 1}.$$

Тогда

$$p_1 = \frac{4\rho}{4\rho + (2\rho+1)^{-2} + 3} = \frac{4\rho^3 + 4\rho^2 + \rho}{4\rho^3 + 7\rho^2 + 4\rho + 1};$$

$$p_0 = \frac{(2\rho+1)^{-1} + 3}{4\rho + (2\rho+1)^{-2} + 3} = \frac{3\rho^2 + 3\rho + 1}{4\rho^3 + 7\rho^2 + 4\rho + 1}.$$

Система $E_2|E_k|1|0$.
$b(t) = (\mu^k \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\mu t})/(k-1)!$ - плотность распределения эрланговского обслуживания k-го порядка интенсивности μ/k
$\rho = (k\lambda / 2\mu)$ - загрузка системы.
Среднее число заявок, получивших отказ, пока не закончилось обслуживание, равно

$$\int_0^\infty \left(\frac{\lambda t}{2} + \frac{1}{4}e^{-2\lambda t} - \frac{1}{4}\right)\frac{\mu(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}dt = \rho + \frac{1}{4\left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^k} - \frac{1}{4};$$

$$p_{отк} = \frac{4\rho\left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^k + 1 - \left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^k}{4\rho\left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^k + 1 + 3\left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^k}.$$

Тогда $p_1 = \dfrac{4\rho}{4\rho + \left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^{-k} + 3}$; $\quad p_0 = \dfrac{\left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^{-k} + 3}{4\rho + \left(\frac{4\rho}{k}+1\right)^{-k} + 3}$.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Наука, 1987. – 338 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Коваленко И.Н., Сарманов О.В. Краткий курс теории случайных процессов. – Киев: Вища шк., 1978. – 264 с.
4. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. – М.: Связь, 1966. – 184 с.

Summary

Stationary state probabilities of the loss single serve model are calculated.