УДК 517.917

В.В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ В ЦЕЛОМ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij}x^i y^j \equiv \sum_{k=1}^{3} P_k(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij}x^i y^j \equiv \sum_{k=1}^{3} Q_k(x,y), \tag{1}$$

где a_{ij}, b_{ij} - действительные числа, кривая

$$\omega(x,y) \equiv x^3 + px + q - y^2 = 0, \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0, q \neq 0 \tag{2}$$

является частным интегралом и для многочленов $P_1(x,y) + P_2(x,y)$, $Q_1(x,y) + Q_2(x,y)$ выполняются известные условия Коши – Римана [1], т.е.

$$(P_1 + P_2)'_x \equiv (Q_1 + Q_2)'_y, (P_1 + P_2)'_y \equiv -(Q_1 + Q_2)'_x. \tag{3}$$

Заметим, что кривая (2) состоит из овала и параболической ветви (см. [2]).

Теорема. Для того чтобы система (1) удовлетворяла условиям (2) и (3), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{01}y + 9a_{01}xy + \frac{2}{3q}a_{01}x^2y \equiv P, \\ \frac{dy}{dt} &= -a_{01}x - \frac{9}{2}a_{01}x^2 + \frac{9}{2}a_{01}y^2 + 9a_{01}x^3 + \frac{1}{q}a_{01}xy^2 \equiv Q. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Выполнимость условий (3) проверяется непосредственно. Для доказательства того, что кривая (2) является частным интегралом системы (4), следует воспользоваться известным равенством [3]: если кривая $\omega(x,y) = 0$ - частный интеграл системы, то

$$\omega'_x \cdot P + \omega'_y \cdot Q = \omega \cdot F, \tag{5}$$

где F - многочлен второй степени относительно x и y. Сделав в системе (4) замену времени $a_{01}dt \to dt$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + 9xy + \frac{2}{3q}x^2y \equiv P, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2 + 9x^3 + \frac{1}{q}xy^2 \equiv Q. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В нашем случае равенство (5) запишется в виде

$$(3x^2 + 9q)P - 2yQ = (x^3 + 9qx + q - y^2)(9y + \frac{2}{q}xy). \tag{7}$$

Видим, что $p = 9q$. Тогда неравенство $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ примет вид $q < -\frac{1}{108}$.

Сразу замечаем, что поле направлений системы (6) симметрично относительно оси OX и поэтому особая точка (0;0) для системы (6) является центром. По этой же причине система (6) предельных циклов иметь не может. Найдем особые точки системы (6), лежащие в конечной части плоскости, отличные от точки (0;0), и выясним их характер. Для этого найдем действительные решения системы

$$\left.\begin{aligned} &y(1+9x+\frac{2}{3q}x^2)=0,\\ &-x-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}y^2+9x^3+\frac{1}{q}xy^2=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Из равенства (7) следует, что особые точки системы (6) могут лежать на линиях $y=0$, $2x+9q=0$ и $y^2=x^3+9qx+q$.

Пусть $y=0$. Тогда, учитывая, что $x\neq 0$, получим $x=-\frac{1}{6}$, и $x=\frac{2}{3}$. Если $x=-\frac{9q}{2}$, то подставив его в первое уравнение (8), получим $q=\frac{1}{27}$, а по условию $q<-\frac{1}{108}$. Найдем теперь особые точки системы (6), лежащие на частном интеграле. Подставив $y^2=x^3+9qx+q$ во второе уравнение системы (8), получим после преобразований систему

$$\left.\begin{aligned} &2x^2+27qx+3q=0,\\ &3y^2=3x^3-2x^2.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Из второго уравнения следует, что $x\geq\frac{2}{3}$. При этом условии из первого уравнения находим $x=\frac{-27q+\sqrt{729q^2-24q}}{4}$, а из второго уравнения $y=\pm\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2}$. Исследование показывает, что если $x\geq\frac{2}{3}$, то $q\leq-\frac{8}{189}$. Итак, система (6) в конечной части плоскости имеет особые точки $(0;0),(-\frac{1}{6};0),(\frac{2}{3};0)$ и, если $q<-\frac{8}{189}$, то $(x;\pm y\neq 0)$.

Выясним характер найденных особых точек. Выше отмечено, что точка (0;0) - центр. Для точки $(-\frac{1}{6};0)$ характеристические числа будут $\lambda_{1,2}=\pm\frac{5}{2}i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{q}{54}}$. В силу симметричности поля направлений относительно оси OX точка $(-\frac{1}{6};0)$ является центром.

Для точки $(\frac{2}{3};0)$ имеем характеристические числа $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{35(189q+8)}{189q}}$. Если $q<-\frac{8}{189}$, то $(\frac{2}{3};0)$ - простое седло, если же $-\frac{8}{189}<q<-\frac{1}{108}$, то $(\frac{2}{3};0)$ - центр. Пусть $q=-\frac{8}{189}$. Тогда $\lambda_{1,2}=0$. Выясним характер этой сложной особой точки, используя результаты [4]. Сделаем в системе (6) замену переменных, не меняя обозначения этих переменных: $x=x+\frac{2}{3}, y=y$. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=-12xy-\frac{63}{4}x^2y\equiv\eta(x,y),\\ &\frac{dy}{dt}=5x+\frac{27}{2}x^2-\frac{45}{4}y^2+9x^3-\frac{189}{8}xy^2\equiv 5x+\xi(x,y).\end{aligned}\right\}$$

Согласно [4], найдем решение уравнения $5x+\xi(x,y)=0$ в виде $x=\varphi(y)=\alpha_1y+\alpha_2y^2+\ldots$. Подставив $x=\varphi(y)$ в уравнение, получим $\alpha_1=0,\alpha_2=\frac{9}{4}$. Тогда

$x = \frac{9}{4}y^2 + \ldots$. Далее находим $f(y) \equiv \eta(\varphi(y), y) = -27y^3 + \ldots$,
$g(y) = \xi'_y(\varphi(y), y) + \xi'_x(\varphi(y), y) = -\frac{69}{2}y + \ldots$ Отсюда получаем $a = -27, \alpha = 3, b = -\frac{69}{2}, \beta = 1$.
Так как $\alpha = 2\beta + 1$, $a - b^2 \le 4a(\beta + 1) < 0$ и α, β - нечетные, то точка $(\frac{2}{3};0)$ при $q = -\frac{8}{189}$ является точкой с одним гиперболическим, двумя параболическими и одним эллиптическим секторами Бендиксона.

Для точек $(x;\pm y \ne 0)$ характеристические числа будут $\lambda_1 = \frac{\sqrt{729q^2 - 24q}}{3q}y$,
$\lambda_2 = \frac{-9q + \sqrt{729q^2 - 24q}}{2q}y$. Видим, что $(x;\pm y)$ - простые узлы.

Выясним, существуют ли особые точки системы (6) в бесконечной части плоскости. Применив к системе (6) преобразование Пуанкаре [5] $x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z}$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 9 - \frac{9}{2}z + \frac{1}{3q}u^2 - z^2 - \frac{9}{2}u^2 z - u^2 z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{2}{3q}uz - 9uz^2 - uz^3 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Полагая в правых частях системы (10) $z = 0$ и приравнивая их к нулю, получим уравнение для определения координаты u: $u^2 + 27q = 0$. Отсюда $u_{1,2} = \pm 3\sqrt{-3q}$. Применив к системе (6) преобразование Пуанкаре $x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z}$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{3q}v^2 + \frac{9}{2}vz + z^2 - 9v^4 + \frac{9}{2}v^3 z + v^2 z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{q}vz - \frac{9}{2}z^2 - 9v^3 z + \frac{9}{2}v^2 z^2 + vz^3. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Видим, что при $v = z = 0$, правые части системы (11) обращаются в нуль. Это значит, что «концы» оси OY - особая точка системы (6). Замечаем, что в системе (11) отсутствуют линейные члены. Итак, в бесконечной части плоскости система (6) имеет особые точки $(\pm 3\sqrt{-3q};0)$ и «концы» оси OY.

Характеристические числа для точек $(\pm 3\sqrt{-3q};0)$ такие: $\lambda_1 = \pm\frac{2}{q}\sqrt{-3q}, \lambda_2 = \mp\frac{2}{q}\sqrt{-3q}$.

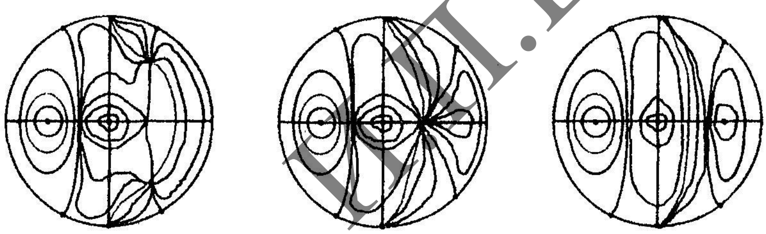
Это значит, что точки $(\pm 3\sqrt{-3q};0)$ - простые седла. Так как сумма индексов всех особых точек дожна быть равна единице, то индекс «концов» оси OY равен нулю. Далее параболическая ветвь кривой уходит в бесконечность без определенного направления, причем координата "y" растет быстрее координаты "x". Исходя из расположения особых точек на фазовой плоскости и их характера, заключаем, что «концы» оси OY являются точкой с двумя гиперболическими и одним параболическим секторами Бендиксона.

Результаты исследования особых точек системы (6) приведены в таблице:

	(0;0)	$(-\frac{1}{6};0)$	$(\frac{2}{3};0)$	$(x;\pm y)$	$(u_{1,2};0)$	"концы" OY
$q<-8/189$	Ц	Ц	С	У	С	ГП
$q=-8/189$	Ц	Ц	ГПЭ	—	С	ГП
$-8/189<q<-1/108$	Ц	Ц	Ц	—	С	ГП

Обозначения: Ц – центр, С – седло, У – узел, ГПЭ – точка с одним гиперболическим, двумя параболическими и одним эллиптическим секторами, ГП – точка с двумя гиперболическими и одним параболическим секторами.

По результатам исследования строим качественные картины поведения траекторий в круге Пуанкаре.



$q<-8/189$ $\qquad$ $q=-8/189$ $\qquad$ $-8/189<q<-1/108$

Литература

1. Еругин Н.П. Замечание об интегрировании системы двух уравнений в конечном виде // ПММ. - 1950. -Т.14, Вып. 3. – С.315.

2. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: Изд. Физ.-мат. лит., 1960. – 294 с.

3. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т.16, Вып. 6. – С. 659-670.

4. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. –Минск: Выш. шк., 1979. 136 с.

5. Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения. – Минск: Выш. шк., 1982. – 271 с.

Summary

In activity the quality research of one special differential winding of the second order is conducted.