УДК 519.240

М.Д. Юдин

ОБ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА ЭССЕНА НА МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В [1–3] нами решалась центральная предельная проблема теории вероятностей для сумм зависимых случайных векторов. Теперь возникла задача об аппроксимации распределений сумм зависимых векторов сопровождающими безгранично делимыми распределениями. Для получения оценок подобных аппроксимаций через близость характеристических функций (х. ф.) распределений требуется обобщение неравенства Эссена (см., например, [4], стр. 317) на многомерные распределения. В [5], стр. 208, указано, что в [6] Эссен для случая сходимости к нормальному закону получил некоторую оценку близости распределений на сферах по близости х. ф. этих распределений. Кроме этого случая, каких-либо других обобщений неравенства Эссена нами не найдено.

Для упрощения выкладок рассмотрим двумерный случай.

Пусть $F(x, y)$ и $G(x, y)$ — двумерные функции распределения (ф. р.), $\varphi(t_1, t_2)$ и $\gamma(t_1, t_2)$ — их х. ф. соответственно.

Теорема. *Если ф. р. $G(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка и* $\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \le m_1$, $\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| \le m_2$, *то*

$$\sup\left|F(x,y) - G(x,y)\right| \le \frac{1}{2\pi^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi(t_1,t_2)-\gamma(t_1,t_2)}{t_1 t_2}\right| dt_1 dt_2 + \frac{48(m_1+m_2)}{\pi T}.$$

<u>*Доказательство.*</u> Воспользуемся методом сглаживания, примененного в [7] для одномерного случая. Пусть $V_T(x, y)$ — двумерное распределение вероятностей с плотностью

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\frac{1-\cos Tx}{Tx^2}\cdot\frac{1-\cos Ty}{Ty^2}. \qquad (1)$$

Известно, что х. ф. $\omega_T(t_1, t_2)$ плотности (1) при $|t_1| \le T \wedge |t_2| \le T$ имеет вид [7]

$$\omega_T(t_1, t_2) = \left(1 - \frac{|t_1|}{T}\right)\cdot\left(1 - \frac{|t_2|}{T}\right)$$

и, главное, $\omega_T(t_1, t_2)$ равна нулю вне квадрата ($|t_1| \le T \wedge |t_2| \le T$).

Обозначим: $\Delta(x, y) = F(x, y) - G(x, y)$, ${}^T\Delta(u, v) = V_T \otimes \Delta$ — свертка функции Δ с распределением V_T, т. е.

$${}^T\Delta(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta(u-x, v-y)\rho(x,y)\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Далее мы оцениваем $\sup\Delta$ через $\sup {}^T\Delta$.

Поскольку $\Delta(\infty, \infty)=\Delta(-\infty, y)=\Delta(x, -\infty)=\Delta(-\infty, -\infty)=0$, то по свойствам ф. р. найдется точка (x_o, y_o), в которой функция $|\Delta(x, y)|$ или ее предел, принимает наибольшее значение (мы исключаем sup на бесконечностях (∞, y) и (x, ∞), что сводит задачу к одномерному случаю). Пусть $\eta=\sup|\Delta(x, y)|=\Delta(x_o, y_o)$. Так как $F(x, y)$ не убывает, то из ограниченности производных ф. р. $G(x, y)$ следует при $s_1>0$ и $s_2>0$

$$\Delta(x_o+s_1, y_o+s_2)-\Delta(x_o, y_o) \ge -m_1 s_1 - m_2 s_2,$$

т.е.

$$\Delta(x_o+s_1, y_o+s_2) \ge \eta - m_1 s_1 - m_2 s_2. \qquad (3)$$

Положим $h_1 = \frac{\eta}{4m_1}$, $h_2 = \frac{\eta}{4m_2}$, $u=x_o+h_1$, $v=y_o+h_2$, $x=h_1-s_1$, $y=h_2-s_2$, тогда

$$\Delta(x_o+s_1, y_o+s_2) = \Delta(u-x, v-y). \tag{4}$$

Поскольку $s_1=h_1-x$, $s_2=h_2-y$, то при $|x|\le h_1 \Lambda |y|\le h_2$ из (3) и (4) найдем, что

$$\Delta(u-x, v-y) \ge \frac{\eta}{2} + m_1 x + m_2 y. \tag{5}$$

Оценим интеграл (2), используя (5) и неравенство $\Delta(u-x, v-y) \ge -\eta$. Плотность $\rho(x, y)$ — произведение четных функций, интеграл от ее произведения с линейной частью (5) в области $|x|\le h_1 \Lambda |y|\le h_2$ равен нулю. С другой стороны, плотность $\rho(x, y)$ приписывает области $|x|> h_1 V |y|> h_2$ массу $\le \frac{4}{\pi T h_1} + \frac{4}{\pi T h_2}$ [7]. Поэтому из (2) и (5) следует

$${}^T\Delta(x, y) \ge \left(1 - \frac{4}{\pi T h_1} - \frac{4}{\pi T h_2}\right) - \eta\left(\frac{4}{\pi T h_1} + \frac{4}{\pi T h_2}\right) = \frac{\eta}{2} - \frac{24(m_1+m_2)}{\pi T}.$$

Отсюда

$$\eta \le 2\, {}^T\Delta(x, y) + \frac{48(m_1+m_2)}{\pi T}. \tag{6}$$

Х. ф. сверток $F \otimes V_T$ и $G \otimes V_T$ равны $\varphi(t_1,t_2)\omega(t_1, t_2)$ и $\gamma(t_1, t_2)\omega(t_1, t_2)$. Эти свертки имеют плотности вероятности, которые обозначим ${}^Tf(x, y)$ и ${}^Tg(x, y)$ соответственно. По формуле обращения для плотностей

$${}^Tf(x, y) - {}^Tg(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{-i(t_1x+t_2x)}\left(\varphi(t_1,t_2) - \gamma(t_1,t_2)\right)\omega(t_1,t_2)dt_1dt_2. \tag{7}$$

Проинтегрируем равенство (7) в пределах от $-\infty$ до x и $-\infty$ до y, меняя справа порядок интегрирования. На основании Леммы Римана–Лебега (см. леммы 3 и 4 из [7] стр. 586, 587) получим

$${}^T\Delta(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{-i(t_1x+t_2x)}\frac{\varphi(t_1,t_2) - \gamma(t_1,t_2)}{-t_1t_2}\omega(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

Откуда

$$|{}^T\Delta(x, y)| \le \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi(t_1,t_2) - \gamma(t_1,t_2)}{-t_1t_2}\right|dt_1dt_2. \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует доказательство теоремы.

Очевидно, аналогичные оценки верны для ф. р. любой конечной размерности.

Литература

1. Юдин М.Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. –1994. – №3. – С.31-35.

2. Юдин М.Д. Об обобщении формулы Леви-Хинчина на суммы зависимых векторов // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №4. – С.75-80.

3. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов // Весці АН

Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – №4. – С.19-23.

4. Ширяев А.Н. Вероятность. -М., 1989.

5. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. -М.: СМБ, 1967.

6. Essen K.G. Fourier analysis of distribution functions // Acta Math. -1945. -Т.77. -Р. 1–125.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.II. -М., 1967.

Summary

The inequality Essen is extended on multivariate distributions.