УДК 535.42

А.А. Фирсов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОРИЕНТАЦИОННОГО УГЛА ДЛЯ ЭНЕРГООБМЕНА И ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИФРАКЦИИ В КУБИЧЕСКИХ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ

Выходные характеристики голограмм, записанных в кубических фоторефрактивных оптически активных пьезокристаллах среза (110), можно улучшить, выбрав оптимальный азимут поляризации считывающих световых волн (поляризационный угол ψ) или оптимальную ориентацию вектора голографической решетки относительно кристаллографической оси [001] (ориентационный угол θ). Наибольшая эффективность дифракции и максимальный энергообмен достигаются при одновременном выборе оптимальных значений как поляризационного, так и ориентационного углов [1-7]. В работе [6] численным методом определены зависимости оптимального ориентационного угла от толщины кристаллов BSO и BTO при двухволновом взаимодействии и отмечено, что направление (111) в кристаллах силленит-типа в общем случае не является оптимальным. Аналогичные результаты для кристалла BSO получены также численным методом в [7] в процессе ориентационной и поляризационной оптимизации дифракционной эффективности голограммы.

Однако численные методы не являются наиболее эффективными способами решения задачи оптимизации выходных характеристик голограмм в связи с тем, что с изменением параметров кристалла необходимо заново производить вычисления.

В настоящей работе аналитическим методом исследованы возможности оптимизации дифракционной эффективности голограммы и относительной интенсивности предметной световой волны путем выбора как поляризационного, так и ориентационного углов для кристаллов фиксированной толщины.

Воспользуемся выражениями оптимизированных по поляризационному углу дифракционной эффективности $\eta_{\psi}^{\max}(\theta, d)$ и относительной интенсивности $\gamma_{\psi}^{\max}(\theta, d)$, полученными в [8, 9].

Рассмотрим частный случай, когда выполняется равенство $\sin\alpha d = 0$, где d - толщина, а α - удельное вращение кристалла.

В результате исследования на экстремум зависимости $\eta_{\psi}^{\max}(\theta)$ получим следующее равенство:

$$(A - r)(\cos^4 2\theta + z_1 \cos^3 2\theta + z_2 \cos^2 2\theta + z_3 \cos 2\theta + z_4)\sin 2\theta = 0, \qquad (1)$$

где z_1, z_2, z_3, z_4 – постоянные коэффициенты, зависящие только от электрооптического и фотоупругих коэффициентов кристалла, модулей упругости и пьезоэлектрического коэффициента:

$$z_1 = \frac{1}{z_0}\{4r m_1 m_2 + e(m_1 a_2 + 3m_2 a_1)\},$$

$$z_2 = \frac{1}{2z_0}\{2r[m_2^2 + 4m_1(m_3 - m_1)] + e[6m_1 a_3 + (4m_1 - m_2)a_2 + 2(2m_1 - 5m_3 - 2m_2)a_1]\},$$

$$z_3 = \frac{1}{z_0}\{2rm_2(m_3 - m_1) + e[(8m_1 + m_2)a_3 - 3(m_3 - m_1)a_2 - (m_2 + 8m_3)a_1]\},$$

$$z_4 = \frac{1}{2z_0}\{2r(m_3 - m_1)^2 + e[(2m_2 - m_3 + m_1)(a_3 - a_1) - 2(m_3 - m_1)a_2]\},$$

$$z_0 = 2m_1(2r m_1 - e a_1),$$

где $e \equiv e_{14}$ – пьезоэлектрический коэффициент, $r \equiv r_{41}^{u}$ – электрооптический коэффициент зажатого кристалла. Введенные здесь параметры m_1, m_2, m_3 зависят только от модулей упругости c_1, c_2, c_3, в то время как параметры a_1, a_2, a_3 зависят ещё и от фотоупругих коэффициентов p_1, p_2, p_3, p_4:

$$m_1 = (c_1 + c_2)(c_3 - c_1) + 2(c_2 + c_3)^2,$$
$$m_2 = 4c_3(c_1 - c_2 - 2c_3),$$
$$m_3 = (c_1 + c_2)(c_1 + 3c_3) + 8c_3(c_1 + c_3) - 2(c_2 + c_3)^2,$$

$$a_1 = (c_1 - 4c_2 - 5c_3)(2p_1 + p_2 + p_3) + 2(c_2 - c_3 + 2c_1)(2p_4 + p_2 + p_3),$$

$$a_2 = 4[(c_1 + 3c_3)(2p_1 + p_2 + p_3) - 2(c_2 - c_3)(2p_4 + p_2 + p_3)],$$

$$a_3 = (4c_2 - 5c_1 - 7c_3)(2p_1 + p_2 + p_3) + 2(3(c_2 - c_3) - 2c_1)(2p_4 + p_2 + p_3).$$

Определим, при каких значениях ориентационного угла будет выполняться равенство (1). В интервале углов θ [0; 180°) $\sin 2\theta = 0$ при $\theta = 0$ и $\theta = 90°$. Решение $\theta = 180°$ отброшено, так как зависимость $\eta_{\psi}^{\max}(\theta)$ имеет период $\theta = 180°$. При $\theta = 90°$ дифракционная эффективность не зависит от азимута считывающего света [3], при этом в зависимости $\eta_{\psi}^{\max}(\theta)$ возникает локальный минимум. Точки минимума в зависимости $\eta_{\psi}^{\max}(\theta)$ будут появляться также и при выполнении равенства A-r=0, так как в этом случае дифракционная эффективность также не зависит от азимута считывающего света [9]. Однако следует отметить, что при известных параметрах кристаллов BSO, BGO и BTO [10-13] равенство A-r=0 не выполняется.

Для нахождения остальных экстремальных точек приравняем нулю оставшийся сомножитель в равенстве (1):

$$\cos^4 2\theta + z_1 \cos^3 2\theta + z_2 \cos^2 2\theta + z_3 \cos 2\theta + z_4 = 0. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2) [14], находим следующие выражения значений ориентационного угла в интервале (0; 180), при которых достигаются экстремальные значения в зависимости $\eta_{\psi}^{\max}(\theta)$:

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{\sqrt{2\tau}}{2} \pm \sqrt{-\frac{\tau}{2} - \frac{q}{2\sqrt{2\tau}} - \frac{p}{2} - \frac{z_1}{4}}\right],$$

$$\theta_{3,4} = \frac{1}{2}\arccos\left[-\frac{\sqrt{2\tau}}{2} \pm \sqrt{-\frac{\tau}{2} + \frac{q}{2\sqrt{2\tau}} - \frac{p}{2} - \frac{z_1}{4}}\right], \qquad (3)$$

$$\theta_{5,6} = \pi - \theta_{1,2}; \quad \theta_{7,8} = \pi - \theta_{3,4},$$

где

$$p = z_2 - 3z_1^2/8; \quad q = z_1^3/8 + z_3 - z_1 z_2/2;$$

$$\tau = \begin{cases} \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - y^3}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - y^3}} - \dfrac{p}{3}, & \text{если } x^2 - y^3 \ge 0, \\ 2\sqrt{y}\cos\dfrac{\varphi}{3} - \dfrac{p}{3}, & \text{если } x^2 - y^3 < 0, \end{cases}$$

$$x = p^3/216 - pw/6 + q^2/16; \quad y = p^2/36 + w/3,$$

$$w = z_1^2 z_2/16 - z_1 z_3/4 - 3z_1^4/256 + z_4,$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{y^3 - x^2}}{x} + \pi m, \qquad m = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0 \\ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для того чтобы имели физический смысл все восемь корней решения (3), должны выполняться следующие условия [14]:

$$\tau > 0, \qquad (4)$$

$$-\frac{\tau}{2} - \frac{q}{2\sqrt{\tau}} - \frac{p}{2} \ge 0, \qquad (5)$$

$$-\frac{\tau}{2}+\frac{q}{2\sqrt{\tau}}-\frac{p}{2}\geq 0, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\sqrt{2\tau}}{2}+\sqrt{-\frac{\tau}{2}-\frac{q}{2\sqrt{2\tau}}-\frac{p}{2}-\frac{z_1}{4}}\right|\leq 1, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\sqrt{2\tau}}{2}-\sqrt{-\frac{\tau}{2}-\frac{q}{2\sqrt{2\tau}}-\frac{p}{2}-\frac{z_1}{4}}\right|\leq 1, \tag{8}$$

$$\left|-\frac{\sqrt{2\tau}}{2}+\sqrt{-\frac{\tau}{2}+\frac{q}{2\sqrt{2\tau}}-\frac{p}{2}-\frac{z_1}{4}}\right|\leq 1, \tag{9}$$

$$\left|-\frac{\sqrt{2\tau}}{2}-\sqrt{-\frac{\tau}{2}+\frac{q}{2\sqrt{2\tau}}-\frac{p}{2}-\frac{z_1}{4}}\right|\leq 1. \tag{10}$$

Из (3) видно, что в интервале $\theta\in(0;\,90°)$ возможны 4 экстремальные точки θ_i, где i=1, 2, 3, 4. Другие четыре точки θ_i, где i=5, 6, 7, 8 зеркально симметричны первым относительно оси $\theta=90°$.

Определим значения экстремальных ориентационных углов для длины волны считывающего света $\lambda=632.8$ нм в кристаллах BSO и BTO. Для BSO условие (6) не выполняется, поэтому корни $\theta_{3,4}$, а следовательно и $\theta_{7,8}$, не имеют физического смысла. Кроме того, не выполняется условие (7), то есть "отпадают" корни θ_1 и θ_5. Таким образом, остался корень θ_2 и зеркальный ему относительно оси $\theta=90°$ корень $\theta_6=\pi-\theta_2$. Значение ориентационного угла θ_2 для кристалла BSO равно 40.14°. Для BTO не выполняются не только условия (6), (7), но еще и условие (8). Поэтому для кристалла BTO ни один из корней θ_i где i=1, 2, $\cdots$, 8 не имеет физического смысла. При вычислениях использовались параметры кристаллов BSO и BTO, представленные в [3, 11, 12].

Используя достаточные условия локального экстремума, можно определить, при каких значениях ориентационного угла возникают локальные максимумы в зависимости $\eta_{\psi}^{max}(\theta)$. Для кристалла BSO в интервале угла θ [0; 180°) существует два локальных максимума при $\theta_2=40.14°$ и $\theta_6=139.86°$ и два локальных минимума при $\theta=0$ и $\theta=90°$. Для BTO существует только один локальный максимум при $\theta=0$ и один локальный минимум при $\theta=90°$.

Как было сказано выше, выражения (3) были получены для частного случая $\sin\alpha d=0$. Однако найденные решения с большой степенью точности справедливы и в более общем случае. Так, оценки, проведенные численным методом для кристаллов BSO и BTO, показывают, что при $\alpha d>2.5$ значения экстремальных ориентационных углов, найденные по формулам (3), отличаются менее чем на 3° от точных значений. При этом относительная погрешность оптимизированной по поляризационному углу дифракционной эффективности не превышает 0.5%.

Получим выражения ориентационного угла в интервале (0; 360°), при которых достигаются экстремальные значения в зависимости $\gamma_{\psi}^{max}(\theta)$. Для этого исследуем на экстремум зависимость $\gamma_{\psi}^{max}(\theta)$, полученную в [9]. В случае, когда $\sin\alpha d=0$, получим следующее равенство:

$$[\cos^4 2\theta+z_1\cos^3 2\theta+z_2\cos^2 2\theta+z_3\cos 2\theta+z_4]\sin\theta\times$$
$$\times\left\{(\rho_0^2-1)\kappa Ed(r-A)\cos\theta-2\rho_0\right\}=0. \tag{11}$$

Определим, при каких значениях ориентационного угла будет выполняться равенство (11). При $(\rho_0^2-1)\kappa Ed(r-A)\cos\theta-2\rho_0=0$ в зависимости $\gamma_{\psi}^{max}(\theta)$ будут наблюдаться особые точки, являющиеся локальными точками минимума [9]. При $\sin\theta=0$ в интервале углов θ [0; 360°) $\theta=0$ и $\theta=180°$. Решение $\theta=360°$ отброшено, так как период функции

$\gamma_{\psi}^{max}(\theta)$ равен 360°. Для нахождения остальных решений приравняем к нулю оставшийся множитель, то есть получим равенство (2). Решением уравнения (2) в области значений угла θ [0; 180°) являются выражения (3) (θ_i где i=1, 2, ···, 8). Значения ориентационного угла, лежащие в интервале [180°; 360°), зеркально симметричны θ_i относительно оси $\theta=180°$ ($\theta_i'=360°-\theta_i$).

Используя достаточные условия локального экстремума, несложно определить, при каких значениях ориентационного угла возникают локальные максимумы в зависимости $\gamma_{\psi}^{max}(\theta)$. Для кристалла BSO в интервале угла θ [0; 360°) существует три локальных максимума при $\theta_2=40.14°$, $\theta_2'=319.86°$, $\theta=180°$ и три локальных минимума при $\theta_6=139.86°$, $\theta_6'=220.14°$, $\theta=0$. Для BTO существует только один локальный максимум при $\theta=180°$ и один локальный минимум при $\theta=0$.

Отметим, что полученные аналитическим методом значения экстремальных ориентационных углов совпадают с соответствующими значениями, определенными численным методом в работах [2, 15].

Таким образом, для частного случая толщины кристалла, удовлетворяющей равенству $\sin\alpha d=0$, найдена совокупность точек, подозрительных на экстремум, в зависимостях $\gamma_{\psi}^{max}(\theta)$ и $\eta_{\psi}^{max}(\theta)$. Численные расчеты показали, что полученные решения (3) можно использовать в качестве приближенных для кристаллов BSO, толщина которых удовлетворяет неравенству $\alpha d>2.5$.

Литература

1. Shepelevich V.V., Egorov N.N. Simultaneous diffraction of two light waves in cubic optically active photorefractive piezocrystals // Topical meeting on photorefractive materials, effects and devices III, Technical digest. - Beverly, Massachussets (USA), 1991. - P. 252-255.

2. Shepelevich V.V. Optimization of the energy transfer in cubic photorefractive piezocrystals // Digest topical meeting on photorefractive materials, Effects and devices (PRM 93, Kiev, Ukraine, 1993).-Kiev, – 1993. – P.128-131.

3. Shepelevich V.V., Egorov N.N., Shepelevich V. Orientation and polarization effects of two-beam coupling in a cubic optically active photorefractive piezoelectric BSO crystal // J. Opt. Soc. Am. - 1994. - V.B11, № 8. - P. 1394-1402.

4. Shepelevich V.V., Egorov N.N., Ropot P.I., Khomutovskiy P.P. Extremal conditions of diffraction and two-wave mixing in cubic gyrotropic photorefractive piezocrystals // Proc. SPIE. - 1997. V. 2968. - P. 301-306.

5. Шепелевич В.В., Егоров Н.Н. Одновременная дифракция двух световых волн в кубических фоторефрактивных пьезокристаллах // Письма в ЖТФ. - 1991. - Т.17, №8. - С.81-84.

6. Shamonina E., Kamenov V.P., Ringhofer K.H., Cedilnik G., Kiesling A., Kowarschik R. The optimum orientation of volume phase gratinds in sillenite crystals: is it always [111] // J. Opt. Soc. Am. - 1998. - V. B15, N10. - P.2552-2559.

7. Шепелевич В.В., Хомутовский П.П. Оптимизация выходных характеристик голограмм в кристалле $Bi_{12}SiO_{20}$ выбором ориентации кристалла и поляризации считывающего света // Письма в ЖТФ. - 1998. - Т.24, Вып. 24. - С. 55-60.

8. Shepelevich V.V, Firsov A.A. Diffraction of light on holographic gratings in cubic piezocrystals of ($\bar{1}$10)-cut. Comparison of the exact and approximate expressions of the output characteristics of diffracted light // Proc. SPIE. – 1997. – V. 3488 - P. 225-234.

9. Фирсов А.А., Шепелевич В.В. Оптимизация выходных характеристик пропускающих голограмм в кубических фоторефрактивных пьезокристаллах. - Мозырь, 1998. - 44с. - (Препринт / Мозырский гос. пед. ин-т; №1).

10. Бабонас Г.А., Реза А.А., Леонов Е.И. и др. Фотоупругие свойства $Bi_{12}SiO_{20}$ //ЖТФ. - 1985. - Т.55, N6. - С. 1203-1205.

11. Дагис Р., Бабонас Г, Каваляускас Ю., Кривайте Г., Шилейка А. Электронная структура и оптические спектры полупроводников / Под. ред. Ю. Пожелы. - Вильнюс: Моклас, 1987. - 231 с. - (Электроны в полупроводниках, 6).

12. Степанов С.И., Шандаров С.М., Хатьков Н.Д. Фотоупругий вклад в фоторефрактивный эффект в кубических кристаллах // ФТТ. - 1987. - Т.29, Вып.10. - С. 1754-1758.

13. Ропот П.И. Упругооптические постоянные силикосилленита // Письма в ЖТФ. - 1991. - Т.17, Вып.8. - С. 81-84.

14.Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. - Мн: Навука і тэхніка, 1991.- 480 с.

15. Хомутовский П.П., Шепелевич В.В., Егоров Н.Н., фон Бэлли Г., Одулов С.Г. Влияние пьезоэффекта и оптической активности на энергетический обмен световых волн в кристаллах ВТО// Лазерная физика и спектроскопия: Тр. III конф., 2-4 июля 1997 г., г. Гродно. - Мн., 1997. - С. 139-142.

Summary

The analytical expressions for orientation angles are found, at which the extreme values of both the diffraction efficiency of holograms and the relative intensity of a probe wave in a cubic photorefractive piezocrystal at fixed thickness are reached.