УДК 519.240

С.Н. Гуз, Н.В. Сергиевич, М.Д. Юдин

СЛОЖНОЕ ПУАССОНОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В данной работе на базе общей теории предельных распределений сумм зависимых случайных величин и векторов, основные результаты которой опубликованы в [1-5], строятся вероятностные модели некоторых деформаций и разрушений с целью получения теоретических распределений их линейных размеров и плоских конфигураций.

В отличие от ранее рассмотренных случаев (см., например, [6; 7]), здесь носителями пуассоновской вероятности служит не окрестность одной точки, а окрестности нескольких точек, расположенных на одной прямой. Оказывается, это обстоятельство поставляет в теоретическую плотность вероятности деформации сложный пуассоновский компонент.

Согласно концепции продвижения деформации, разработанной в [6] и используемой, в частности, в [1, 7], приращения деформации зависимы и делятся на два типа по величине и частоте встречаемости: большинство приращений длины дефекта в поле внутренних напряжений имеют относительно малую величину; фактор торможения роста деформаций “стопорами” и периодический прорыв последних вызывает появление относительно редких, но значительно больших приращений. Сосредоточение пуассоновских вероятностей в окрестностях нескольких точек обусловливается тем, что, во-первых, прорывы “стопоров” могут различаться по длине, во-вторых, мы допускаем [8] прорывы сразу нескольких “стопоров” при одном скачке.

1°. Линейный случай. *Теоретическая часть.* Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий случайных величин, определенных при каждом n на одном и том же пространстве элементарных событий и имеющих ограниченные дисперсии. Независимости величин ξ_{ns} не предполагается. Положим: $\eta_{ns}=\xi_{ns}-M\xi_{ns}$. Как показано в [1] (см. теорему 2.3, стр. 60 и теорему 2.7, стр. 72), при довольно естественных ограничениях, если при $n\to\infty$

$$K_n(x)=\sum_{s=1}^{n} M(\eta_{ns}^2;\eta_{ns}<x)\xrightarrow{\text{сл.}}K(x),\quad \sum_{s=1}^{n} M\eta_{ns}\eta_{nq}\longrightarrow a,$$

то сумма $\sum_{s=1}^{n}\eta_{ns}$ будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм характеристической функции (х. ф.) которого

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1-itx)\frac{1}{x^2}dK(x)-\frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Моделирование. Пусть n-ая серия $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$ случайных величин — система приращений деформации. Тогда $S=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}$ – общая длина деформации. Согласно приведенной концепции, распределение S должно быть близко к предельному распределению суммы $\sum_s \xi_{ns}$ при $n\to\infty$, за счет дробления времени, когда будут выполнены условия: если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные точки сосредоточения пуассоновской вероятности, расположенные в порядке возрастания, то при любом $\tau\in(0,\min_k(x_k-x_{k-1}))$, $k=\overline{1,m}$, $x_0=0$,

$$\sum_s \int_{|x|<\tau} x^2 dP\{\eta_{ns}<x\}\to\sigma^2<\infty, \qquad (2)$$

$$\sum_s \int_{|x-x_k|<\tau} dP\{\eta_{ns}<x\}\to\lambda_k, \quad k=\overline{1,m}, \qquad (3)$$

$$\sum_s M\left(\eta_{ns}^2;\ \bigwedge_{k=1}^{m}|x_k-\eta_{ns}|\ge\tau\wedge|\eta_{ns}|\ge\tau\right)\to 0. \qquad (4)$$

Условие (2) следует из относительной малости подавляющей часть приращений, условие (3) – из редкости относительно больших приращений с различными длинами: $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Если, кроме того, $\sum_{s\ne q} M\eta_{ns}\eta_{nq}\to a$, $\sum_s M\xi_{ns}\to\ell$, то из формулы (1) и условий (2), (3), (4) получим, что плотность вероятности предельного распределения суммы $\sum_s \xi_{ns}$ будет иметь вид (см. [8])

$$p(x)=\frac{e^{-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+a)}}\sum_{q_k=0\forall k}^{\infty}\frac{\lambda_1^{q_1}\lambda_2^{q_2}\ldots\lambda_m^{q_m}}{q_1!q_2!\ldots q_m!}\exp\left\{-\frac{(x-(\ell-\sum_{k=1}^{m}x_k\lambda_k)-\sum_{k=1}^{m}x_k q_k)^2}{2(\sigma^2+a)}\right\} \qquad (5)$$

В [8] мы получили подобную теоретическую плотность вероятности при условии, что "большие" приращения кратны "единичному шагу", т. е. что пуассоновская вероятность сосредотачивается в точках 1, 2, ... , m.

Для случая m=2 нами составлена компьютерная программа, строящая график плотности (5), позволяющая варьировать входящие в (5) параметры, выявлять влияние этих параметров на предельные распределения суммы $S=\sum_s \xi_{ns}$. Так, на рис. 1 дан график плотности (5) при $x_1=1$, $x_2=5$, $\lambda_1=1.5$, $\lambda_2=2$, $\sigma^2+a=0.1$, $\lambda=1$; на рис.2 дан график плотности (5) при $x_1=1$, $x_2=2$, $\lambda_1=5$, $\lambda_2=0.8$, $\sigma^2+a=0.1$, $\lambda=1.4$;

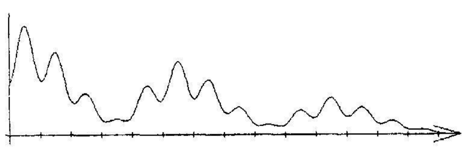

Рис. 1

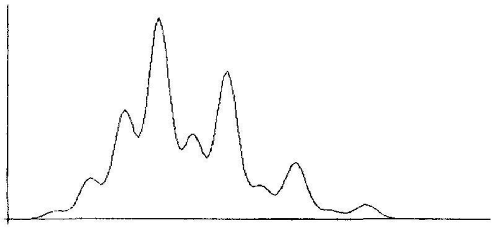

Рис. 2

Оказалось, в частности, что при увеличении λ_k график смещается вправо, при уменьшении дисперсионного параметра σ^2+a вершины становятся более выраженными и могут переходить в отдельные части кривой, поскольку вероятность между ними становится близкой к нулю. Можно заметить и другие закономерности. Важно то, что при достижении хорошего совпадения графика теоретической плотности вероятности (5) с графиком плотности, полученной на основе экспериментальных данных, параметры плотности (5) становятся, вообще говоря, новыми характеристиками исследуемого материала.

2^0. <u>Двумерный случай.</u> В этом пункте показана возможность вероятностного моделирования не только линейных размеров дефектов, но и картин их расположения на поверхности твердого тела, без предположения независимости приращений процесса распространения.

Теоретическая часть. Теперь ξ_{ns} – случайные векторы.

В [2-4] было найдено общее представление логарифма х. ф. предельного распределения суммы зависимых случайных векторов.

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий d – мерных случайных векторов с ограниченными дисперсиями, $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\ldots,\xi_{ns}^{(d)}\right)$, $M\xi_{ns}^{(i)}=0$, $t=(t_1,\ldots,t_d)$, $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(d)})$, $S_n=\sum_s \xi_{ns}$, матрица $B_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, где $b_{n(i,j)}=\sum_{0\le|p-s|\le m_n} M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};\left|\xi_{ns}\right|\le\varepsilon\Lambda\left|\xi_{np}\right|\le\varepsilon\right)$, $\varepsilon>0$, $K_n(x)=\sum_{s=1}^{n}M(\xi_{ns}^2;\xi_{ns}<x)$, где $\xi_{ns}<x$ означает, что $\xi_{ns}^{(i)}<x^{(i)}$, $i=\overline{1,d}$ [9].

В работе [5] показано, что в довольно естественных условиях, когда $K_n(x)\xrightarrow{сл.}K(x)$ при $n\to\infty$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}B_n=B$, сумма S_n будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого

$$\psi(t)=\int_{R^d}(e^{i(t,x)}-1-i(t,x))\frac{1}{x^2}dK(x)-\frac{(t,Bt^*)}{2}, \qquad (6)$$

где из области интегрирования исключен нуль–вектор (t, ·) — скалярное произведение, t^* — вектор–столбец.

Моделирование. Пусть d=2. В [7] мы рассматривали случай, когда носителями пуассоновской вероятности служили окрестности точек, никакие две из которых не расположены на одной прямой, выходящей из начала координат плоскости.

Здесь, наоборот, все точки $x_k=(x_k^{(1)},x_k^{(2)})$ расположены на одной полупрямой $x=\alpha x_1$, $\alpha>0$. $x_1=(x_1^{(1)},x_1^{(2)})\ne(0,0)$, причем $x_k=\alpha_k x_1$, $k=\overline{1,m}$, $\alpha_1=1$, $\alpha_k>\alpha_{k-1}$.

Пусть $\{\eta_{ns}\}_{s=1}^{n}$ — n-я серия двумерных приращений деформации, $\eta_{ns}=(\eta_{ns}^{(1)},\eta_{ns}^{(2)})$, $S=\sum_s \eta_{ns}$,

$\xi_{ns}=\eta_{ns}-M\eta_{ns}$.

Аналогично одномерному случаю (см. п.1^0 и [1]) наличие относительно больших "разношаговых" приращений в направлении полупрямой $x=\alpha x_0$ выразится условием: для любых δ–окрестностей n_k точек x_k, $0 < \delta < \min_k |x_k - x_{k-1}|$, $x_0=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int_{\nu_k} x^2 dP\{\xi_{ns} < x\} = \lambda_k > 0, \quad k = \overline{1.m} \quad . \tag{7}$$

Наличие большого числа малых приращений выразится в том, что для любой ε–окрестности ν_0, $\varepsilon<|x_1|$ начала координат

$$\sum_{s=1}^{n} M(\xi_{ns}^2; \quad \xi_{ns} \in \nu_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0 \tag{8}$$

(значения σ_1^2 и σ_2^2 войдут, соответственно, в предел матрицы $\mathbf{B}_n$). Зависимость между приращениями x_{ns} отразится в тех частях элементов $b_{n(i,j)}$ матрицы $\mathbf{B}_n$, которые получаются при $s\neq p$.

И, наконец, для любых таких δ и ε

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int_{\overline{\bigcup_{\nu=0}^{\kappa}\nu_n}} x^2 dP\{\xi_{ns} < x\} = 0 \tag{9}$$

Естественно предположить, что система серий $\{\xi_{ns}\}$ удовлетворяет условиям, в которых логарифм х. ф. предельного распределения суммы S_n выражается по формуле (6). Поэтому, если $\sum_{s=1}^{n} M\eta_{ns} \to \ell = (\ell^{(1)}, \ell^{(2)})$, $\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} B_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$, то из формулы (6) и условий (7), (8), (9) последует, что сумма $S_n = \sum_{s=1}^{n}\eta_{ns}$ при неограниченном дроблении времени будет иметь предельное распределение с логарифмом х. ф. $\psi(t) = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k (e^{i(t,x_k)} - 1 - i(t,x_k)) - \dfrac{(t,Bt^*)}{2} + i(t,\ell)$, где $t=(t_1, t_2)$. Отсюда следует, что теоретическая плотность вероятности предельного распределения суммы S

$$p(x) = \frac{e^{-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi}\sum_{\substack{q_k=0,\\ k=\overline{1,m}}}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{q_k}}{q_k!}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z, B^{-1}z^*)\right\}\right), \tag{10}$$

где $p(x)=p(x^{(1)}, x^{(2)})$, вектор $z = x - (\ell - \sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k) - \sum_{k=1}^{m} q_k x_k$, суммирование m-кратное по $q_1, q_2, \ldots, q_m$ от 0 до ∞.

Для случая, когда m=2, на компьютере нами получены изображения поверхностей плотности (10) при различных значениях входящих в нее параметров. Так, на рис. 3 дано изображение поверхности (10) при $\lambda_1=0.8$, $\lambda_2=0.5$, $x_1=(1, 1)$, $x_2=(5, 5)$, $l=(1, 1)$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. На рис. 4 дано изображение поверхности (10) при $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=4$, $x_1=(1, 1)$, $x_2=(3, 3)$, $l=(1, 1)$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

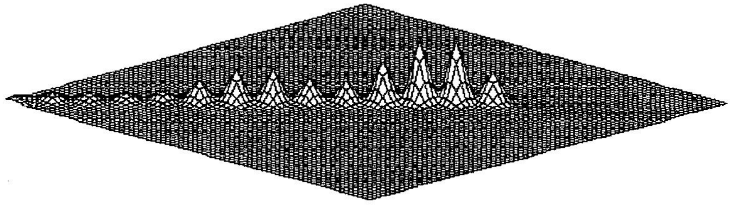

Рис. 3

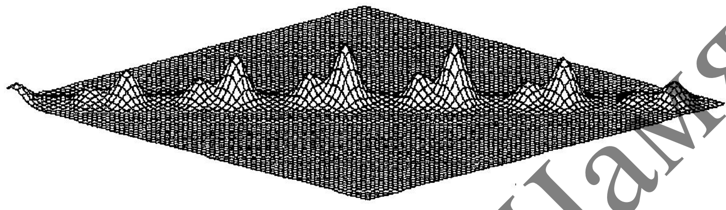

Рис.4

Видно, что, во–первых, при увеличении числа точек — носителей пуассоновской вероятности на прямой — увеличивается, вообще говоря, число вершин поверхности (10), во–вторых, вершины, расположенные на расстояниях, кратных x_1 и x_2, становятся выше. Варьируя на компьютере значениями параметров плотности (10), можно выявить и другие закономерности. И в двумерном случае важно то, что при подборе параметров так, чтобы теоретическая плотность вероятности (10) совпала с плотностью, полученной по экспериментальным данным, параметры плотности (10) дадут, вообще говоря, новые характеристики испытуемого материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, договор Ф97–399 от 1–го марта 1998 года.

Литература

1. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Мн.: Университетское, 1990.-254с.

2. Юдин М. Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов //Весці АН Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. –1994. – №3. – С.31–35.

3. Юдин М. Д. Об обобщении формулы Леви-Хинчина на суммы зависимых векторов //Изв. вузов. Математика. – 1996.- № 4. -С.75–80.

4. Юдин М. Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов// Весці АН Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. –1997. – №4. – С.19–23.

5. Юдин М. Д. Об обобщении формулы Колмогорова на суммы зависимых векторов //Изв. вузов. Математика. – 1999.- № 4. -С.61–64.

6. Башмаков В.И., Чикова Т.С., Юдин М.Д. Распределение трещин по размерам в кристаллических телах// Докл.АН БССР. – 1983.- Т.27, № 4. -С.326–328.

7. Юдин М.Д., Сергиевич Н.В., Шилько С.В. Локализация дефектов в твердых телах. Ч. 1. Вероятностная модель поверхностного разрушения кристаллов// Материалы, технологии, инструменты. – 1999.- № 3. -С.5–8.

8. Юдин М. Д. Сложное пуассоновское распределение в теории деформаций и разрушений// Изв. вузов. Математика. – 1993.- № 6. -С.62–64.

9. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер и ее приложения. -М.: Наука, 1977.-352с.

Summary

On the basis of the limit theorems the stochastic processes with dependent increments in the form of composition of normal and composite Poisson distributions are modelled.