

Н. Л. КАРДАКОВ

УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

Использование аппарата векторной алгебры при решении прикладных инженерных задач вручную требует развитого пространственного воображения, знание тригонометрических функций и матричного исчисления.

Всё это как правило отпугивает студентов и инженеров-практиков от использования векторной алгебры при решении инженерных задач.

Система компьютерной математики Mathcad, со встроенным аппаратом векторной алгебры в значительной мере упрощает этот процесс и сводит решение определенного типа задач к шаблонным схемам.

Задачи статики очень часто встречаются в инженерной практике.

Что бы тело находилось в равновесии (в статическом положении) необходимо что бы сумма всех сил и моментов сил была равна нулю. Данное условие можно записать следующими векторными уравнениями:

$$\sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0 \quad (1),$$

где векторы \vec{P}_i , \vec{M}_i – силы и моменты сил действующих на тело. В свою очередь вектор момента силы определяется как векторное произведение радиуса-вектора на силу действующее на тело, т. е. $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i$. Радиус-вектор – это вектор, направленный из полюса вращения в точку приложения силы.

Тогда условие равновесия будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

В качестве примера рассмотрим решение задачи статики с помощью системы компьютерной математики Mathcad.

Однородная прямоугольная рама (рисунок 1) весом $G = 20 \text{ H}$ прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении верёвкой CE , привязанной в точке C рамы и к гвоздю E , вбитому в стену на одной вертикали с A , причём $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$.

Определить натяжение верёвки S и опорные реакции [1].

Составим расчетную схему (рисунок 1). На раму действует активная сила – сила тяжести \vec{G} и реакции связей. Шаровой шарнир A не дает возможности перемещаться точке A в любом направлении. Реакция шарнира A определяется по трем составляющим проекциям на оси координат $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$. Петля B допускает возможность перемещения вдоль оси вращения y , но препятствует её перемещению в плоскости, перпендикулярной этой оси. Реакция петли B определяется по двум составляющим \vec{X}_B и \vec{Z}_B . Реакция веревки CE направлена вдоль верёвки и приложена в точке прикрепления верёвки к раме, в точке C . Рассмотренная конструкция находится в равновесии [1].

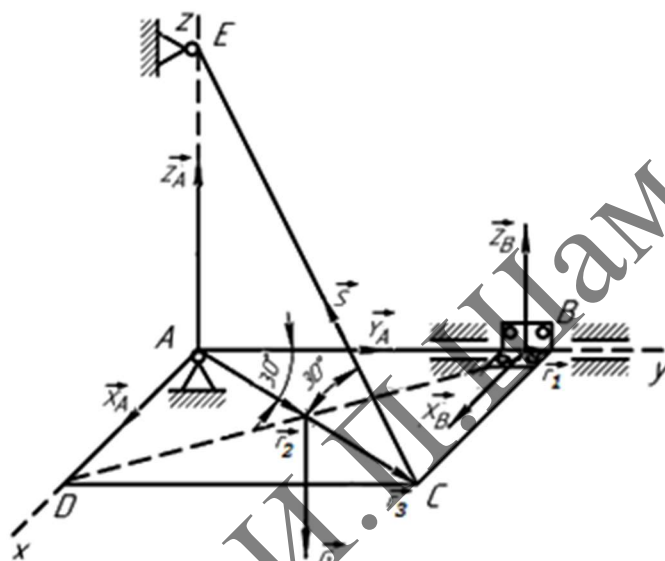


Рисунок 1. – Расчетная схема

При составлении уравнения моментов за центр приведения выбираем точку A , где пересекаются линии действия большего количества неизвестных.

При классическом решении данной задачи необходимо составить шесть уравнений проекций сил и моментов на соответствующие оси.

В системе компьютерной математики Mathcad шаблон решения данной задачи следующий:

- задаются векторы действующих сил и реакций связей в виде матрицы-столбцов;
- задаются векторы радиусов-векторов;
- задается система векторных уравнений (2) в виде конструкции *Given, Find*(X_A, Y_A, Z_A, X_B, S).

Листинг решения в системе Mathcad представлен на рисунке 2.

Некоторые переменные в листинге (рисунок 2) индицируются красным цветом, это свидетельствует о том, что данная переменная ещё не определена, но это никак не повлияет на решение задачи.

Достоинство метода по сравнению с классическим заключается в следующем:

1. Нет необходимости составлять систему шести линейных уравнений.
2. Для нахождения моментов не требуется дополнительных построений.
3. Для определения знаков моментов сил не требуется дополнительный анализ направления вращения.
4. Вышеизложенные достоинства уменьшают количество ошибок, т. к. количество операций становится меньше.
5. Данный подход применим не только к пространственным задачам произвольно расположенных сил, но и к задачам на плоскости, а также подходит для системы сходящихся сил, в этом случае уравнение моментов уже не требуется.

Векторы сил и реакций связей:

$$R_a := \begin{pmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{pmatrix} \quad R_b := \begin{pmatrix} X_b \\ 0 \\ Z_b \end{pmatrix} \quad G := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \quad S_c := \begin{pmatrix} -S \cdot \sin(30 \cdot \text{deg}) \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \\ -S \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \\ S \cdot \sin(30 \cdot \text{deg}) \end{pmatrix}$$

Радиусы-вектора сил и реакций связей:

$$r_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ AC \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_2 := \begin{pmatrix} \frac{AC}{2} \cdot \sin(30 \cdot \text{deg}) \\ \frac{AC}{2} \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_3 := \begin{pmatrix} AC \cdot \sin(30 \cdot \text{deg}) \\ AC \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$R_a + R_b + S_c + G = 0$$

$$r_1 \times R_b + r_2 \times G + r_3 \times S_c = 0$$

Find $(X_a, Y_a, Z_a, X_b, Z_b, S) \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \\ \frac{10 \cdot \cos(30 \cdot \text{deg})^2}{\sin(30 \cdot \text{deg})} \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ \frac{10}{\sin(30 \cdot \text{deg})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.66 \\ 15 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2. – Листинг решения в системе Mathcad

ЛИТЕРАТУРА

1. Статика. Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов : учеб.-метод. пособие / Н. В. Кузнецова [и др.]. – СПб. : ГОУ ВПО СПбТГУРП, 2009. – 27 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2010. – 416 с.