А. В. ИВАШКЕВИЧ[1], **Е. М. ОВСИЮК**[1], **В. М. РЕДЬКОВ**[2]
[1]УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Институт физики НАН Беларуси (г. Минск, Беларусь)

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2

Волновое уравнение для частицы со спином 3/2, описываемой 16-компонентным вектор-биспинором, исследовано в сферической системе координат. В рамках подхода Паули–Фирца уравнение разбивается на основное и два дополнительных, алгебраическое и дифференциальное. Строятся решения, на которых диагонализируются четыре оператора: энергии, квадрата и третьей проекции полного момента, пространственного отражения, им соответствуют квантовые числа $\{\varepsilon, j, m, P\}$. После проведения разделения переменных выведена основная система из 8 зацепляющихся радиальных дифференциальных уравнений 1-го порядка и 4 условия связи: 2 алгебраических и 2 дифференциальных. Основная система приводится к виду 4 раздельных уравнений 2-го порядка, решения которых строятся в функциях Бесселя. С использованием свойств функций Бесселя вся система радиальных уравнений для частицы со спином 3/2 приведена к одному алгебраическому линейному уравнению $A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0$ относительно величин a_1, a_2, a_3, в котором коэффициенты A_i выражаются через квантовые числа ε, j. Выбраны наиболее симметричные решения $a_i^{(1)}$ и $a_i^{(2)}$, которые определяют два решения при фиксированных квантовых числах $\{\varepsilon, j, m, P\}$.

Исходим из радиальных уравнений, полученных после разделения переменных в сферических координатах в системе уравнений для частицы со спином 3/2 [1, 2]

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{a}{r}\right)F_0 = i(\varepsilon+m)G_0\,, \quad \left(\frac{d}{dr}-\frac{a}{r}\right)G_0 = i(\varepsilon-m)F_0\,, \quad \frac{d}{dr}G_1 + i(m-\varepsilon)F_1 = +\frac{b}{r}G_3\,,$$

$$\frac{d}{dr}F_1 - i(m+\varepsilon)G_1 = -\frac{b}{r}F_3, \qquad \left(\frac{d}{dr}-\frac{a}{r}\right)G_2 + i(m-\varepsilon)F_2 = +\frac{\sqrt{2}}{r}G_3\,,$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{a}{r}\right)F_2 - i(m+\varepsilon)G_2 = -\frac{\sqrt{2}}{r}F_3, \qquad \frac{d}{dr}G_3 - \frac{\sqrt{2}}{r}G_2 + i(m-\varepsilon)F_3 = +\frac{b}{r}G_1\,,$$

$$\frac{d}{dr}F_3 + \frac{\sqrt{2}}{r}F_2 - i(m+\varepsilon)G_3 = -\frac{b}{r}F_1\,, \qquad (1)$$

где $a = j+1/2, b = \sqrt{(j-1/2)(j+3/2)}, j = 3/2, 5/2, \ldots$, и четырех уравнений связи

$$F_2 + G_0 = \sqrt{2}F_3\,, \quad G_2 + F_0 = -\sqrt{2}G_3\,, \quad -i\varepsilon F_0 - \left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}r}[b\,F_1 + (a+1)\,F_3],$$

$$-i\varepsilon G_0 - \left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)G_2 = \frac{1}{\sqrt{2}r}[b\,G_1 + (a-1)\,G_3]. \qquad (2)$$

Первые два уравнения в (1) не зависят от остальных шести и решаются в функциях Бесселя:

$$F_0 = a_0\sqrt{x}Z_p(x), \quad G_0 = b_0\sqrt{x}\,Z_{p-1}(x), \quad p = j+1 = p, x = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}\,r. \qquad (3)$$

Оставшиеся 6 уравнений из (1) можно представить в расщепленной (3+3)-матричной форме так:

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{A}{r}\right)F = i(\varepsilon+m)G\,, \quad \left(\frac{d}{dr}-\frac{A}{r}\right)G = i(\varepsilon-m)F\,, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & a & \sqrt{2} \\ b & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

откуда следуют матрично-дифференциальные уравнения 2-го порядка:

$$r^2\left(\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2-m^2\right)\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & \sqrt{2}b & b \\ \sqrt{2}b & a^2+a+2 & \sqrt{2}(a+1) \\ b & \sqrt{2}(a+1) & b^2+2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

$$r^2\left(\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2-m^2\right)\begin{vmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & \sqrt{2}b & -b \\ \sqrt{2}b & a^2-a+2 & \sqrt{2}(a-1) \\ -b & \sqrt{2}(a-1) & b^2+2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Выполнив необходимые вычисления по диагонализации матриц смешивания в (5)–(6), получаем 6 раздельных уравнений второго порядка для новых функций, обозначаемых с чертой сверху (линейных комбинаций из исходных), которые все решаются в функциях Бесселя:

$$\bar{F}_1 = a_1\sqrt{x}Z_j\,, \quad \bar{F}_2 = a_2\sqrt{x}Z_{j+2}\,, \quad \bar{F}_3 = a_3\sqrt{x}Z_j\,,$$

$$\bar{G}_1 = b_1\sqrt{x}Z_{j+1}\,, \quad \bar{G}_2 = b_2\sqrt{x}Z_{j-1}\,, \bar{G}_3 = b_3\sqrt{x}Z_{j+1}\,; \qquad (7)$$

здесь введены не фиксированные числовые множители. Параметры a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 не могут рассматриваться как независимые друг от друга, поскольку существует матрично-дифференциальное условие 1-го порядка (см. (4)), связывающее две тройки функций F и G :

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{A}{r}\right)F = i(m+\varepsilon)G. \qquad (8)$$

После необходимых вычислений с использованием свойств функций Бесселя находим условия связи между параметрами a_j и b_j :

$$b_1 = i\sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m}}\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2j+1}{j+1}\frac{\sqrt{4j+6}}{\sqrt{4j-2}}a_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{j+1}a_2 - \frac{\sqrt{4j+6}}{\sqrt{4j-2}}\frac{1}{2(j+1)}a_3\right\},$$

$$b_3 = i\sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m}}\left\{\frac{1}{4}\frac{2j+1}{j+1}\frac{\sqrt{4j+6}}{\sqrt{4j-2}}a_1 - \frac{2j+1}{4(j+1)}a_2 - \sqrt{2}\frac{\sqrt{4j+6}}{\sqrt{4j-2}}\frac{1}{4(j+1)}a_3\right\}, \quad b_2 = i\sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m}}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\,a_1 - a_3\right\}. \qquad (9)$$

Учтем уравнения связи (2), в результате остается одно линейное условие связи для трех параметров a_i :

$$A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 = 0\,, \qquad (10)$$

где

$$A_1 = \frac{4(j+1)\varepsilon - (j+3/2)(\varepsilon-m)}{\varepsilon-m}, \quad A_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4(j+1)\varepsilon-(2j+1)(\varepsilon-m)}{\varepsilon-m}, \quad A_2 = \sqrt{(j-1/2)(j+3/2)}.$$

Соотношение (10) можно понимать как условие ортогональности двух векторов при фиксированном векторе A_j. Можно различными способами выбирать два решения этого условия $a_i^{(1)}$ и $a_i^{(2)}$; каждый такой выбор определяет два линейно независимых решения уравнений для частицы со спином 3/2 при фиксированных квантовых числах $\{\varepsilon, j, m, P\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 486 с.
2. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2011. – 339 с.