О. В. СТАРОВОЙТОВА, К. В. ВОРОНЕНКО
УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ ПРИ РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Решение задач олимпиадного характера требует особого подхода, наличия способности к интенсивному творческому труду. Такие задачи, как правило, сформулированы так, что они не принадлежат ни к одному из стандартных типов задач. Умение решать нестандартные задачи свидетельствует о глубоком владении математическим аппаратом и развитой культуре математического мышления, а владение предметом гораздо важнее, чем просто «чистые знания», которые всегда можно пополнить с помощью хороших справочников.

Олимпиадные задачи отличаются от обычных тем, что здесь способ решения, как правило, нельзя найти из числа тех, что ранее уже были освоены. Приходится комбинировать различные имеющиеся знания и способы, а порой и изобретать совершенно новые, нетривиальные.

Рассмотрим различные подходы к решению олимпиадных задач на примере диофантовых уравнений.

Диофантовы уравнения – это один из видов алгебраических уравнений с двумя или более неизвестными переменными и целыми коэффициентами. Решениями такого уравнения являются все целочисленные наборы значений неизвестных переменных, удовлетворяющих этому уравнению.

При решении таких уравнений можно выделить несколько подходов:

- способ перебора вариантов;
- применение алгоритма Евклида;
- применение цепных дробей;
- разложения на множители;
- решение уравнений в целых числах как квадратных относительно какой-либо переменной;
- метод остатков;
- метод бесконечного спуска;
- оценка выражений, входящих в уравнение.

Ежегодно мы успешно участвуем в Международной олимпиаде по элементарной математике и по высшей математике среди студентов педагогических вузов, осуществляющих подготовку учителей математики. Олимпиада проводиться в режиме он-лайн Уральским государственным педагогическим университетом (г. Екатеринбург).

Рассмотрим более подробно подходы к решению на примере одной олимпиадной задачи, которая была среди заданий на Международной олимпиаде по элементарной математике среди студентов педагогических вузов, осуществляющих подготовку учителей математики в 2018/2019 учебном году:

Укажите все целочисленные решения уравнения $673 \cdot x + 3 \cdot y = xy$.

При решении данного уравнения целесообразно рассмотреть методы перебора и разложения на множители. Для его решения представим данное уравнение таким образом, чтобы было более рационально анализировать его целочисленные решения. Самый оптимальный подход – это использовать разложение обеих частей уравнения на множители. Например, представим в виде $3y = x(y - 673)$ или $(x - 3)(y - 673) = 3 * 673\ (1 * 2019)$. Анализируя разложения данного уравнения, не трудно заметить, что самым наглядным при решении является второе разложение, при котором правая часть представлена уже произведением простых чисел. Поэтому перебор всех возможностей для целочисленных сомножителей будет самым рациональным.

Рассмотрим уравнение в виде $(x - 3)(y - 673) = 3 * 673\ (1 * 2019)$. Данное уравнение равносильно следующим 8 системам:

1. $\begin{cases} x - 3 = 3, \\ y - 673 = 673; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6, \\ y = 1346; \end{cases}$ получаем решение (6; 1346).

2. $\begin{cases} x - 3 = 673, \\ y - 673 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 676, \\ y = 676; \end{cases}$ получаем решение (676; 676).

3. $\begin{cases} x - 3 = -3, \\ y - 673 = -673; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ получаем решение (0, 0).

4. $\begin{cases} x - 3 = -673, \\ y - 673 = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -670, \\ y = 670; \end{cases}$ получаем решение (-670; 670).

5. $\begin{cases} x - 3 = 1, \\ y - 673 = 2019; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2692; \end{cases}$ получаем решение (4; 2692).

6. $\begin{cases} x - 3 = 2019, \\ y - 673 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2022, \\ y = 674; \end{cases}$ получаем решение (2022; 674).

7. $\begin{cases} x - 3 = -1, \\ y - 673 = -2019; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1346; \end{cases}$ получаем решение (2; -1346).

8. $\begin{cases} x - 3 = -2019, \\ y - 673 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2016, \\ y = 672; \end{cases}$ получаем решение (-2016; 672).

Таким образом, получили восемь целочисленных решений.

Перебор всех возможностей для целочисленных сомножителей удобно организовать в виде таблицы:

x-3	**y-673**	**x**	**y**	**x-3**	**y-673**	**x**	**y**
1	2019	4	2692	3	673	6	1346
-1	-2019	2	-1346	-3	-673	0	0
2019	1	2022	674	673	3	676	676
-2019	-1	-2016	672	-673	-3	-670	670

Как видно из примера, олимпиадные задачи – это нестандартные задания. Это значит, что для них нет общих правил решения в математике. Поэтому решение таких нестандартных задач – это один из способов для развития математических способностей.