

Н. В. ГУЦКО¹, Ю. В. ЛУЦЕНКО², А. Э. ШМИГИРЕВ³

^{1,3}МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

²БГУ им. акад. И. Г. Петровского (г. Брянск, Россия)

О СТРОЕНИИ ГРУПП ШМИДТА С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПЕРВЫМИ И ЧЕТВЕРТЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Все группы в данной статье являются конечными. Напомним ряд понятий, используемых в данной работе. Подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее. *Группа Шмидта* – это конечная нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Связь между n -максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Один из ранних результатов в данном направлении был получен Хуппертом в работе [1], который установил некоторые свойства групп с нормальными вторыми и третьими максимальными подгруппами. Эта работа стимулировала многие другие исследования в данном направлении. В частности, развивая результаты Хупперта, Янко в работе [2] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны.

Среди ранних работ можно отметить также работу Агравала [3], в которой было начато исследование групп с S -квазинормальными 2-максимальными подгруппами (подгруппа H группы G называется S -квазинормальной или S -перестановочной в G , если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). Ясно, что в нильпотентной группе каждая подгруппа является S -квазинормальной. Еще одним естественным развитием упомянутых выше результатов Хупперта и Янко стала работа А. Манна [4], в которой автор проанализировал строение групп с субнормальными n -максимальными подгруппами. В более поздней работе [5] М. Асаду удалось усилить отмеченные выше результаты Хупперта и Янко, рассматривая лишь строго n -максимальные подгруппы для $n = 2, 3, 4$.

Нами в данном направлении получена следующая теорема, в которой приводится описание структуры групп Шмидта, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

Теорема. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p -подгруппа и q -подгруппа группы G соответственно. В том и только в том случае в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами из G , когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta$ для $\alpha + \beta \leq 4$, либо G является группой одного из следующих типов:

- (1) G – сверхразрешимая группа Шмидта;
- (2) $G = [P]Q$, где $|Q| = q^2$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P ;
- (3) $G = [P]Q$, где $|Q| = q$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $P_3 \subseteq \Phi(P)$ для каждой 3-максимальной подгруппы P_3 из P .

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Z. – 1954. – V. 60. – P. 409–434.
2. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups // Math. Z. – 1963. – V. 82. – P. 82–89.
3. Agrawal, R. K. Generalized center and hypercenter of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 54. – P. 13–21.
4. Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 132. – P. 395–409.
5. Asaad, M. Finite groups some whose n -maximal subgroups are normal // Acta Math. Hung. – 1989. – V. 54, № 1–2. – P. 9–27.