МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Раздел «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Ряды»

СПРАВОЧНИК

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Раздел «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Ряды»

Справочник

Мозырь
МГПУ им. И. П. Шамякина
2021

УДК 517(076)
ББК 22.161я73
М34

Составители:

Н. В. Гуцко, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и математики УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина»;

С. В. Игнатович, старший преподаватель кафедры физики и математики УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина»

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры алгебры и геометрии
УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»
Е. Н. Бородич;
кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора
по учебно-воспитательной и идеологической работе Российского
государственного социального университета (филиал РГСУ в г. Минске)
В. В. Пакштайте

Печатается по решению редакционно-издательского совета
УО «Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

М34 **Математический** анализ. Раздел «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Ряды» : справочник / сост.: Н. В. Гуцко, С. В. Игнатович. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2021. – 50 с.
ISBN 978-985-477-757-3.

Издание содержит основные определения, свойства, формулы, а также формулировки лемм и теорем по теории дифференциального исчисления функций нескольких переменных и рядов.

Предназначено для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной подготовкой по математике.

УДК 517(076)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-477-757-3

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для сокращения записи используются следующие обозначения:

$\forall$	«для каждого»; «для любого»; «для всех» (от английского All);
$\exists$	«существует»; «найдется» (от англ. Exists);
$!$	квантор единственности;
$:$	«такой, что»; «такие, что»;
$:=$	«по обозначению равно»;
$\rightarrow$	«соответствует», «поставлено в соответствие»;
$\Rightarrow$	«следует»;
$\Leftrightarrow$	тогда и только тогда, когда;
$\vee$	или;
$\wedge$	и;
$\langle a, b\rangle$	промежуток, то есть либо отрезок$[a, b]$, либо полуинтервал $[a, b)$; либо полуинтервал $(a, b]$; либо интервал(a, b). При этом полуинтервал и интервал могут быть как конечными, так и бесконечными;
A, B, …	множества;
a,b, ...	элементы множества.

ВВЕДЕНИЕ

В издание включены материалы по дисциплине «Математический анализ» из разделов «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» и «Ряды», которые изучаются студентами физико-инженерного факультета специальности 1-02 05 01 «Математика и информатика» в третьем и четвертом семестрах.

В качестве справочного материала предложены основные определения, свойства, формулы, а также формулировки лемм и теорем по темам теории рядов и дифференциального исчисления функции нескольких переменных. Изложенные вопросы разделов математического анализа могут быть использованы студентами как на лекционных и практических занятиях, так и для самостоятельной подготовки по данному предмету.

Данный справочник предназначен, с одной стороны, для использования в учебном процессе студентами дневной формы получения образования физико-инженерного факультета по специальности 1-02 05 01 «Математика и информатика», а также могут быть использованы в качестве учебно-методического обеспечения для специальностей 1-02 05 02 «Физика и информатика», 1-31 04 08 03 «Компьютерная физика», 1-08 01 01 «Профессиональное обучение (по направлениям)». С другой стороны, изложенные вопросы позволят студентам использовать аппарат математического анализа в решении задач из различных областей математики и физики.

1 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1 Многомерные евклидовы пространства

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. n *–мерным действительным числовым пространством* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, \dots, x_n)$ из n действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : \ x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть ***точкой*** и сокращенно обозначать через $x = (x_1, \dots, x_n)$. При этом числа $x_1, \dots, x_n$ называются ***координатами точки x***.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести ***расстояние*** между двумя точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (1)$$

Определение. n –мерное действительное числовое пространство $\mathbb{R}^n$ с введенным по формуле (1) расстоянием называется ***$\boldsymbol{n}$ -мерным евклидовым пространством***.

В дальнейшем символом $\mathbb{R}^n$ всегда будет обозначаться n -мерное евклидово пространство.

Свойства расстояния (1)

1. $\rho(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$; $\rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow x = y$.

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \ \rho(y, z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести операции сложения $x + y$ и умножения λx , $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{R}^n$ превращается в линейное (векторное) пространство, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также ***вектором***. Введем понятие суммы и разности:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm \ y_n) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

и понятие модуля x:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + \dots + \ {x_n}^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма (неравенство Коши-Буняковского).

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq |x||y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма (неравенство Минковского).

$$|x+y| \leq |x| + |y| \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Неравенство Минковского также называют ***неравенством треугольника***.

Определение. При $\varepsilon > 0$, ε-***окрестностью*** точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < \varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(a)$ называют еще ***шаром***, или ***открытым шаром*** *в* $\mathbb{R}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a.

Определение. Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют ***пределом последовательности*** $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ точек $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, если

$$\lim_{m\to\infty} |x^{(m)} - a| = 0,$$

или, иначе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left|x^{(m)} - a\right| < \varepsilon \; \forall m \geq m_\varepsilon.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$x^{(m)} \in U_\varepsilon(a) \; \forall \, m \geq m_\varepsilon.$$

Теорема. Последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ точек из $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $a \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда при каждом $k = 1,2, \dots, n$

$$\lim_{m\to\infty} {x^{(m)}}_k = a_k,$$

где ${x^{(m)}}_k$, a_k, – координаты точек соответственно $x^{(m)}$, a.

Определение. ***Множество*** $E \subset \mathbb{R}^n$ называется ***ограниченным***, если

$$\exists \, \mathrm{R} > 0 : \; E \subset U_R(0).$$

Определение. ***Последовательность*** $\left\{x^{(m)}\right\}$ называется ***ограниченной***, если множество ее значений ограничено, т. е.

$$\exists \, R > 0 : \left|x^{(m)}\right| < R \;\; \forall \; m \in \mathbb{N}.$$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса).

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

1.2 Открытые и замкнутые множества

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется ***внутренней точкой множества*** $E \subset \mathbb{R}^n$, *если*

$$\exists\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0 :\ U_\varepsilon(x)\ \subset E.$$

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется ***открытым***, если каждая его точка является внутренней.

Лемма. $U_\varepsilon(a), a \in \mathbb{R}^n$, является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Всякое открытое множество, содержащее точку *x*, называется ***окрестностью точки x*** и обозначается $U(x)$.

Определение. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется ***предельной точкой*** множества $E \subset \mathbb{R}^n$ если

$$\exists\ \{x^{(m)}\}_1^\infty : a \neq x^{(m)} \in E\ (\forall m \in \mathbb{N}), \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется ***предельной точкой*** множества $E \subset \mathbb{R}^n$ если

$$E \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset\ \forall \varepsilon > 0.$$

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Множество $\bar{E} = E \cup \{x : x$ – предельная точка множества $E\}$ называется ***замыканием множества*** E.

Лемма. Замыкание $\bar{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Определение. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется ***граничной точкой множества*** $E \subset \mathbb{R}^n$, если каждая -окрестность точки $U_\varepsilon(a)$ содержит точки как из множества E, так и точки не из E.

Определение. ***Границей*** $\boldsymbol{\partial E}$ ***множества*** $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество точек *E*.

Граничная точка множества *E* может как принадлежать, так и не принадлежать множеству *E*.

Определение. ***Диаметром непустого множества*** $E \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$diam\, E := sup_{x,y\in E}|x - y|.$$

Определение. ***Расстоянием между двумя непустыми множествами*** $E, F \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$dist(E,F) = inf_{x\in E, y\in F}|x - y|.$$

Определение. Непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ называется ***компактом***.

Лемма. Пусть $E,\ F$ —компакты в $\mathbb{R}^n,\ E \cap F = \emptyset$. Тогда $dist(E,F) > 0$.

Определение. Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с конкретным его описанием

$$\Gamma = \{x(t), \alpha \le t \le \beta\} = \{(x_1(t), \dots, x_n(t)), \alpha \le t \le \beta\},$$

где x_i – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции $(i = 1, \dots, n)$, называется (***непрерывной***) ***кривой***.

При этом точка $x(\beta)$ называется ***началом кривой***, а точка $x(\beta)$ – ***концом кривой***.

Определение. ***Областью*** в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связанное множество, т. е. такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для любых двух точек a, b которого существует кривая Γ, лежащая в $G (\Gamma \subset G)$ и соединяющая точки a и b $(x(\alpha) = a, x(\beta) = b)$.

Определение. Замыкание $\bar{G}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется ***замкнутой областью***.

1.3 Предел функции нескольких переменных

Будем рассматривать функции $f : X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}^n$, т. е. числовые функции, определенные на множестве X точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$.

Определение. Если числовая функция $f\ (x)$, определенная на множестве X точек n-мерного евклидова пространства, то множество X называется ***областью определения функции*** $\boldsymbol{f(x)}$.

Через $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ обозначается функция $f\ (x)$ в точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$.

Определение. ***Графиком функции*** $f\ (x)$ называется множество точек

$$\{(x, x_{n+1}) \coloneqq (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x) \in X, x_{n+1} = f(x)\}.$$

Если функция $f(x)$:

1) определена в точке x, то $x \in X$;

2) не определена в точке x, то $x \notin X$;

3) определена на множестве E, то $E \subset X$.

Для задания функции необходимо:

– задать область определения D;
– задать область значений U;
– задать закон f, по которому в каждой точке области D ставится в соответствии некоторое действительное число U.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E и $x^{(0)}$ – предельная точка множества E. Число A называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x \to x^{(0)}}$ ***по множеству E*** (пишется $\lim_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = A$), если

1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon\ \ \forall\, x \in E,\ 0 < \left|x - x^{(0)}\right| < \delta$, или

2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U\left(x^{(0)}\right): |f(x) - A| < \varepsilon\ \ \forall\, x \in E \cap U\left(x^{(0)}\right)$, или

3) $\lim_{m\to\infty} f\left(x^{(m)}\right) = A\ \forall \left\{x^{(m)}\right\}: x^{(m)} \in E \setminus \left\{x^{(0)}\right\}, x^{(m)} \to x^{(0)}$ *при* $m \to \infty$.

Теорема (критерий Коши существования предела функции). Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E и $x^{(0)}$ – предельная точка множества E. Для существования конечного предела $\lim_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon\ \ \forall\ x', x'' \in E \cap U\left(x^{(0)}\right).$$

Определение. Функция $f(x)$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется ***ограниченной на множестве E***, если множество $f(E)$ ограничено, т. е. если существует число $B > 0$ такое, что

$$|f(x)| \le B\ \forall x \in E.$$

Аналогично вводятся понятия ограниченности сверху (снизу) функции $f(x)$ на E.

Теорема. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, x^{(0)}$ – предельная точка множества E и существует конечный $\lim_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$. Тогда при некотором $\delta > 0$ функция $f(x)$ ограничена на $E \cap U_\delta$.

Определение. Если в определении предела функции $f : X \to \mathbb{R}$ по множеству $E \subset X$ в качестве множества E взято пересечение X с некоторой кривой Г, либо прямой L, либо с лучом l (с вершиной в $x^{(0)}$), то $\lim_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ называется ***пределом*** $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $x^{(0)}$ соответственно ***по кривой*** **Г**, ***по прямой L, по направлению*** $\boldsymbol{l}$ (если луч $l = \left\{x = x^{(0)} + te, t \ge 0\right\}$, где $te = t(e_1, \dots, e_n) \coloneqq (te_1, \dots, te_n)$).

Если $X \supset U_{\delta_0}(x^{(0)})$ при некотором $\delta_0 > 0$, то $\lim_{l \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ совпадает с $\lim_{t\to 0+0} f(x_1 + te_1, \dots., x_n + te_n)$.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, значения которых совпадают с пределом, обратное неверно.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $(x_0, y_0) \in D$.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x;y)$ в точке (x_0, y_0), если для $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$ $(x \neq x_0, y \neq y_0)$ будет выполняться неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки (x_0, y_0). ***Повторными пределами*** функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0) называются пределы

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right), \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right).$$

1.4 Функции, непрерывные в точке

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}, \mathrm{X} \subset \mathbb{R}^n$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ *и* $x^{(0)} \in E$.

Определение. Говорят, что $f(x)$ ***непрерывна в точке*** $\boldsymbol{x^{(0)}}$ ***по множеству E***, если

1) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left|f(x) - f\left(x^{(0)}\right)\right| < \varepsilon$
$x \in E, \left|x - x^{(0)}\right| < \delta$, или

2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U\left(x^{(0)}\right) : \left|f(x) - f\left(x^{(0)}\right)\right| < \varepsilon$
$\forall\, x \in E \cap U\left(x^{(0)}\right)$, или

3) $\lim_{m \to \infty} f\left(x^{(m)}\right) = f\left(x^{(0)}\right)\ \forall\ \left\{x^{(m)}\right\}: x^{(m)} \in E$,
$x^{(m)} \to x^{(0)}$ *при* $m \to \infty$.

Замечание.

1. Если $x^{(0)} -$ *предельная точка множества E,* то непрерывность функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ по множеству *E* равносильно тому, что $\lim_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = f\left(x^{(0)}\right)$.

2. Если $x^{(0)} -$ *изолированная точка множества E,* то $f(x)$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству *E*, а понятие предела в точке $x^{(0)}$ по множеству *E* не определено.

Лемма (о сохранении знака).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, $f(x^{(0)}) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f\left(x^{(0)}\right) \ \forall \ x \in \ E \cap U_{\delta}\left(x^{(0)}\right).$$

Теорема. Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$, и каждая из m функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E. Пусть $y^{(0)} = (f_1\left(x^{(0)}\right), \dots, f_m(x^{(0)})) \in F \subset \mathbb{R}^m$, и функция $g(x)$ непрерывна в точке $y^{(0)}$ по множеству F. Пусть еще $(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in F \ \forall x \in E$. Тогда определенная на E сложная функция

$$h(x) := g\left(f_1(x), \dots, f_m(x)\right), h : E \to \mathbb{R}$$

непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Определение. Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, определенная на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, называется ***непрерывной на множестве G***, если в каждой точке этого множества она непрерывна.

Теорема (*Вейерштрасса*). Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывная на компакте $G \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения.

Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними. Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.

Определение. Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, называется ***равномерно-непрерывной на множестве G***, $G \subset \mathbb{R}^n$, если для любого $\forall \ \varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ и $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ множества G, находящихся на расстоянии, меньшем δ, выполняется неравенство $\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon$:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \ x', x'' \in G \ \rho(x', x'') < \delta$$
$$\Rightarrow \ \left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon.$$

Функция, непрерывная на множестве, не обязательно будет равномерно непрерывной на этом множестве.

Теорема (*Кантора*) Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывная на компакте G, $G \subset \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывна на этом компакте.

Определение. ***Колебанием*** $\omega(f, G)$ функции $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$, называется верхняя грань всевозможных разностей значений функции $f(x)$:

$$\omega(f, G) = sup_{x,x' \in G} \left| f(x') - f(x) \right|, x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in G.$$

Определение. ***Диаметром*** множества G называется верхняя грань расстояний между точками множества $G \in \mathbb{R}^n$.

Обозначается: $diam\, G = sup_{x,x' \in G}\, \rho(x', x'')$ или $d(G) = sup_{x,x' \in G} \rho(x', x'')$.

Равномерная непрерывность функции $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, на множестве $G \in \mathbb{R}^n$ означает, что колебание функции на любом множестве достаточного малого диаметра сколь угодно мало.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $(x_0, y_0) \epsilon D$.

Определение. Функция $z = f(x; y)$ называется ***непрерывной в точке*** $(x_0; y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке области D, называется ***непрерывной в данной области***; если в некоторой точке $N(x;\, y)$ не выполняются условия непрерывности функции, то эта точка называется ***точкой разрыва функции***.

Нарушение условий непрерывности функции $z = f(x;\, y)$ может происходить как в отдельных точках, так и в точках, образующих некоторую функцию, которая называется ***линией разрыва***.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1 Частные производные и дифференцируемость функций многих переменных

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in R^n$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Зафиксировав $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$, … ,

$x_n = x_n^{(0)}$, получим функцию одной переменной $f(x_1\, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Если она имеет производную в точку $x_1^{(0)}$, то эта производная называется ***частной производной по x_1 функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$*** и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}),\ f'_{x_1}(x^{(0)}) \text{ или } f_{x_1}(x^{(0)}).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1\, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)\Big|_{x_1 = x_1^{(0)}}.$$

Частные производные функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ по другим переменным $\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x^{(0)}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} x^{(0)}\right)$ определяются аналогичным образом.

Сравнивая значения функций в точке x и в точке $x^{(0)}$, символом $\Delta\, x$ обозначают ***приращение аргумента***: $\Delta\, x = x - x^{(0)}$. Таким образом,

$$\Delta\, x =: (\Delta\, x, \ldots, \Delta x_n) = \left(x_1 - x_1^{(0)}, \ldots, x_n - x_n^{(0)}\right),$$

$$|\Delta\, x\,| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Приращением функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$, соответствующим приращению аргумента $\Delta\, x$, называют

$$\Delta f\left(x^{(0)}\right) = f\left(x^{(0)} + \Delta\, x\right) - f\left(x^{(0)}\right) =$$
$$= f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right).$$

Определение. Функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x^{(0)}$, если приращение функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ можно представить в виде

$$\Delta f\left(x^{(0)}\right) = f\left(x^{(0)} + \Delta\, x\right) - f\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, \Delta x_i + o(|\Delta\, x|) \text{ при } \Delta\, x \to \vec{0},$$

где $A_1, \ldots, A_n$ – некоторые числа. В правой части символ «о малое» имеет тот же смысл, что и в случае функций одной переменной, так что вместо $o(|\Delta\, x|)$ можно написать $\varepsilon(\Delta\, x)|\Delta\, x|$, где функция ε определена в $U(0)$, $\varepsilon(\Delta\, x) \to 0$ при $\Delta\, x \to \vec{0}$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда в этой точке существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ и $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$ для всех *i= 1,2,…, n.*

Определение. Линейная функция

$$df\left(x^{(0)}\right) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)\Delta x_i \ , \Delta x_i \in R \ (i = 1,2,\dots,n)$$

называется ***дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$*** и

$$\Delta f\left(x^{(0)}\right) = df\left(x^{(0)}\right) + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}\,.$$

Теорема. Пусть функция дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда она непрерывна в точке $x^{(0)}$.

Теорема (*достаточные условия дифференцируемости функции в точке в терминах ее частных производных*).

Пусть в точке $x^{(0)}$ непрерывны все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1,2,\dots,n)$ функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$.

Определение. Функцию $f(x)$, имеющую в точке на множестве непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ при всех $(i = 1,\dots,n)$, называют ***непрерывно дифференцируемой*** соответственно *в этой точке* или *на этом множестве*.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $(x_0, y_0) \in D$.

Введя обозначения $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, имеем $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, тогда $f(x;y) = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ и приращение функции $z = f\ (x;\ y)$ будет вычислено по формуле

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$

и называется ***полным приращением функции $f(x;y)$ в точке*** $(x_0; y_0)$. В связи с этим определением *непрерывность функции $z = f\ (x;\ y)$ в точке* $(x_0; y_0)$ можно записать в виде:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Дадим x_0 приращение Δx, а y_0 оставим без изменений, то есть будем иметь точку $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$. Составим приращение функции z:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Это приращение называется ***частным приращением функции*** z по перемещению x. Составим отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Определение. Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то его называют ***частной производной функции*** $z = f(x;\ y)$ в точке (x_0, y_0) по переменной x.

Обозначаем: $z'_x(x_0, y_0)$; $z'_x \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial f(x_0;\, y_0)}{\partial x} \Longrightarrow f'_x(x_0;\ y_0)$.

По определению имеем

$$z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x;\ y)$ по переменной y, то есть производная

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Функция $z = f(x;\ y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $(x_0;\ y_0)$ если её полное приращение Δz представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где A и B – не зависят от Δx и Δy, а зависят только от точки $(x_0;\ y_0)$; α, β – стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Если функция $z = f\ (x;\ y)$ дифференцируется в каждой точке области D, то её называют дифференцируемой в области D.

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования. Чтобы на практике найти частную производную z'_x функции $z = f(x;\ y)$, нужно считать y постоянным, тогда функция $z = f(x;\ y)$ является функцией переменной x.

2.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, заданную на некоторой окрестности точки (x_0, y_0) $f: U_\delta\ (x_0, y_0) \to R$.

Тогда $S = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in U_\delta\ (x_0, y_0), z = f(x, y)\}$ – ее график.

Определение. ***Касательной плоскостью к поверхности*** в точке M называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведённым на поверхности через точку M.

Пусть уравнение поверхности задано в явном виде $z = f(x; y)$, тогда уравнение касательной плоскости к графику функции z в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y - y_0).$$

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0),$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ — значение частных производных функции $F(x, y, z)$, вычисленные в точке $M(x, y, z)$ – координаты текущей точки касательной плоскости.

Определение. ***Нормалью к поверхности*** называется прямая, проходящая через точку касания M и перпендикуляр к касательной плоскости.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение нормали к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Если же уравнение поверхности задано в явном виде $z = f(x; y)$, то уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

2.3 Геометрический смысл дифференциала функции и частных производных

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, заданную на некоторой окрестности точки (x_0, y_0) $f: U_\delta\,(x_0, y_0) \to R$.

Дифференциал функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0) совпадает с приращением аппликаты касательной плоскости к графику $f(x)$ в точке $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$. В этом состоит **геометрический смысл дифференциала функции**.

Рассмотрим сечение $\Gamma \coloneqq S|_{y=y_0}$ графика функции S плоскостью $y = y_0$. Можно считать для простоты, что функция $f(x)$ непрерывна в $\overline{U_\delta}$ (x_0, y_0).

Тогда

$$\Gamma = \{(x, y_0, f(x, y_0)) : \ |x - x_0| \le \delta\}$$

является кривой, лежащей в плоскости $y = y_0$, а

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \alpha.$$

где α – угол между (лежащей в плоскости $y = y_0$) касательной к Г в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и положительным направлением оси *Ox*. В этом состоит **геометрический смысл частной производной** $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

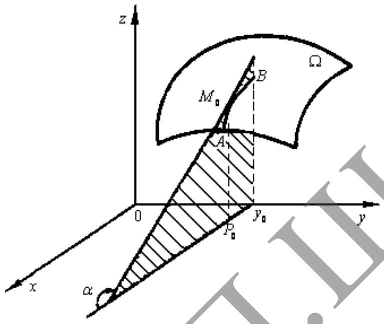

Рисунок 1. – Геометрический смысл $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

Аналогично выявляется геометрический смысл частной производной $\frac{df}{dy}(x_0, y_0)$.

2.4 Дифференцируемость сложной функции

Теорема. Пусть каждая из m функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$ от n переменных дифференцируема в точке $x^{(0)} \in R^n$. Пусть функция $g(x)$ от m переменных дифференцируема в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))$. Тогда сложная функция

$$h(x) := g(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и для ее частных производных справедливы равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{dg}{\partial y_k}(y^{(0)}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)}), i = 1, \dots, m\,.$$

Следствие. Пусть каждая из m функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$ от n переменных имеет непрерывные в точке $x^{(0)}$ частные производные

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \ (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m).$$

Пусть функция $g(x)$ от m переменных имеет непрерывные в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(y^{(0)})(k = 1, \dots, m)$. Тогда сложная функция $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x))$ имеет непрерывные в точке $x^{(0)}$ производные $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)})$, для которых справедливы равенства теоремы.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $(x_0, y_0) \in D$.

Пусть имеем функцию $z = f\ (x;\ y)$, где x и y являются функциями переменной t, то есть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. С учётом этого функцию z перепишем в виде:

$$z = f(\varphi(t), \psi(t)) = F(t).$$

Теорема. Пусть функции $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ имеют производные по переменной t на некотором промежутке числовой прямой, а функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в некоторой точке $(x;\ y) = (\varphi(t), \psi(t))$, тогда производная функции $z = f\ (x;\ y)$ по переменной t находится по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Здесь $\frac{dz}{dt}$ называется ***полной производной функцией*** $z = f(x;\ y)$ по переменной t.

Если функция $z = f(x;\ y)$ и $y = f(x)$, то полная производная функции z по переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Пусть имеем функцию $z = f(x; y)$, где $x = \varphi(t;\ \tau)$, $y = \psi\ (t;\ \tau)$, то есть имеем сложную функцию $z = f\big(\varphi(t;\ \tau);\ \psi\ (t;\ \tau)\big) = F(t; \tau)$. Тогда частные производные этой функции по переменным t и τ находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}.$$

2.5 Производная по направлению и градиент

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in R^n$.

Пусть $e = (cos\alpha_1, \dots, cos\alpha_n)$ – «единичный вектор», т. е. $|e|$=1. Его координаты называют ***направляющими косинусами вектора e***,

$$\sum_{i=1}^{n} cos^2 \alpha_i = 1.$$

Из точки $x^{(0)}$ проведем луч с направлением e:

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \left(x_1^{(0)} + tcos\alpha_1, \dots, x_n^{(0)} + tcos\alpha_n\right), t \geq 0,$$

$$x = x^{(0)} + te, t \geq 0.$$

Определение. ***Производной функции f в точке*** $x^{(0)}$ ***по направлению e*** называется

$$\frac{\partial f}{\partial e}\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right) cos\alpha_i.$$

В случае $n = 3 e = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$, где α, β, γ – углы между направлением вектора e и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Для дифференцируемой в точке (x_0, y_0, z_0) функции $f(x)$ трех переменных x, y, z.

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) cos\alpha +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) cos\gamma .$$

Введем вектор

$$grad\, f(x_0, y_0, z_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right),$$

который называется ***градиентом*** функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Тогда, используя скалярное произведение, можно написать

$$\frac{\partial f}{\partial e} = (grad\, f(x), e),$$

т. е. что *производная функции* $f(x)$ *по направлению вектора e совпадает с проекцией* grad $f(x)$ *на это направление*.

Из свойств скалярного произведения следует, что в точке (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{\partial f}{\partial e} \le |grad\, f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Если вектор grad $f(x)$ ненулевой, то существует единственное направление e, производная по которому $\frac{\partial f}{\partial e} = |grad\, f|$. Это направление $e = \frac{grad\, f}{|grad\, f|}$.

Отсюда вытекает *геометрическая характеристика градиента* – это вектор, по направлению которого производная имеет максимальное значение.

На этом основании условно можно сказать, что направление градиента – это ***направление быстрейшего роста функции***.

2.6 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in R^n$ функция $f(x)$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то в точке $x^{(0)}$ у этой производной может существовать частная производная $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Если $k \ne i$, то эту производную называют ***смешанной частной производной второго порядка*** функции $f(x)$ переменным x_i и x_k и обозначают символом $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_k}(x^{(0)})$, а если $k = i$, то эту производную называют (***чистой***) ***частной производной второго порядка*** функции $f(x)$ по переменной x_i и обозначают символом $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_i}\left(x^{(0)}\right)$.

Аналогично вводятся частные производные третьего, четвертого и вообще любого порядка, смешанные и чистые.

Теорема. Пусть для функции f двух переменных x, y частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Теорема. Пусть функции n переменных в точке $x^{(0)} \in R^n$ непрерывны все смешанные производные в этой точке, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***m раз непрерывно дифференцируемой*** в точке (на множестве), если все ее частные производные порядка m непрерывны в точке (на множестве). Заметим, что эта точка (каждая точка этого множества) должна быть внутренней точкой области определения функции $f(x)$.

С помощью предыдущих теорем получаем, что m раз непрерывно дифференцируемая в точке (на открытом множестве) функция имеет непрерывные в точке (на открытом множестве) все частные производные порядком не выше m.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на открытом множестве $G \subset R^n$. Ее дифференциал, называемый также ***первым дифференциалом*** и ***дифференциалом первого порядка***, имеет вид

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i, x \in G.$$

Если все частные производные первого порядка функции $f(x)$ дифференцируемы на G, то существует дифференциал δ от первого дифференциала $\delta(df(x))$, при вычислении которого dx_i считаются постоянными. Имеем тогда

$$\delta\big(df(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\delta x_j\right)dx_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)dx_i\delta x_j.$$

Значение дифференциала в точке x от первого дифференциала функции $f(x)$ при $\delta x_j = dx_j$ ($j = 1, \dots, n$) называется ***вторым дифференциалом*** функции $f(x)$ в точке x и обозначается $d^2 f(x)$. Итак

$$d^2 f \coloneqq \delta(df)\Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i = 1,\dots,n}} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Если все частные производные порядка $m-1$ функции $f(x)$ дифференцируемы в точке x, то дифференциал порядка m функции $f(x)$ в точке x определяется как

$$d^m f(x) \coloneqq \delta\big(d^{m-1} f(x)\big)\Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i = 1,\dots,n}}.$$

Следовательно,

$$d^m f(x) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1} \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_{i_1} x_{i_m}.$$

Упорядоченный набор n целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in N_0$ ($i = 1, \dots, n$) называется ***мультииндексом***, а $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ – его ***длиной***.

Пусть еще

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, dx^a = {dx_1}^{a_1} \dots\ {dx_n}^{a_n}, D^a f = \frac{\partial^{|a|}}{{\partial x_1}^{a_1} \dots {\partial x_n}^{a_n}} f.$$

В этих обозначениях для m раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ n переменных

$$d^m f(x) = \sum_{|a|=m} \frac{m!}{a!} D^a f(x) dx^a.$$

В частности, для функции f двух переменных x, y

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k}\ dx^{m-k} dy^k.$$

Если же при этом $m = 2$, то

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

3 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1 Неявные функции, определяемые одним уравнением

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$. Под ***прямым*** (или ***декартовым***) ***произведением*** множеств X и Y понимают множество пар точек (x, y):

$$X \times Y := \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Кубической ε-окрестностью точки $x^{(0)}, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ называют множество

$$Q_\varepsilon\left(x^{(0)}\right) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|x_i - x_i^{(0)}\right| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\right\}.$$

При $n = 1$ $Q_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)$.

Прямоугольной* $(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon})$*-окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$, где $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, y^{(0)} \in \mathbb{R}^m$, назовем множество

$$Q_{\delta,\varepsilon}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = Q_\delta\left(x^{(0)}\right) \times Q_\varepsilon\left(y^{(0)}\right).$$

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где F – функция двух переменных x, y, которые можно считать координатами точки плоскости.

Определение. Функция f: $X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$ называется ***неявной*** (или ***неявно заданной***) ***функцией***, определяемой уравнением (1), если

$$F\big(x, f(x)\big) = 0 \; \forall x \in X.$$

Если же на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ уравнение (1) и $y = f(x)$ эквивалентны

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

(т. е. их множества решений, принадлежащих E, совпадают), то говорят, что уравнение (1) разрешимо на E относительно переменной y.

Теорема. Пусть функция F двух переменных удовлетворяет следующим условиям:

1) F непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0);
2) $F(x_0, y_0) = 0$;
3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке (x_0, y_0).

Тогда существует прямоугольная окрестность точки (x_0, y_0) $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\varepsilon(y_0)$, такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x),$$

где функция $f: Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$, $f(x_0) = y_0$. Если дополнительно считать, что

4) F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Если же при этом частные производные F'_x, F'_y непрерывны на $U(x_0, y_0)$, то производная $f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$.

Данная теорема обобщается и на случай неявной функции, заданной уравнением $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.

3.2 Система неявных функций

Для системы m функций $\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$ переменных $t = (t_1, \dots, t_m)$ определитель

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_m)}{\partial(t_1, \dots, t_m)}(t) := \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial t_m}(t) \end{vmatrix}$$

называется ***якобианом.***

Будем использовать обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m) = (\tilde{y}, y_m), \tilde{y} = (y_1, \dots, y_{m-1}),$$

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

$$(x, y_m) = (x_1, \dots, x_n, y_m),$$

$$F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Теорема. Пусть

1. Функции $\mathrm{F}_j(x, y) = \mathrm{F}_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ $(i = 1, \dots, m)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$;
2. $F_j\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$;
3. $J = \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$

Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_\delta\left(x^{(0)}\right) \times Q_\varepsilon\left(y^{(0)}\right)$, в которой

$$\left\{F_j(x, y) = 0\right\}_{j=1}^{m} \Leftrightarrow \left\{y_j = f_j(x) = 0\right\}_{j=1}^{m},$$

где $(f_1, \dots, f_m): Q_\delta(x^{(0)}) \to Q_\varepsilon\left(y^{(0)}\right)$, функции f_j непрерывно дифференцируемы на $Q_\delta\left(x^{(0)}\right), f_j\left(x^{(0)}\right) = {y_j}^{(0)}$ $(j = 1,2, \dots m)$.

Замечание. В качестве следствия теоремы получаем тождества

$$F_j\left(x, f_1(x), \dots, f_m(x)\right) = 0 \ \forall x \in Q_\delta\left(x^{(0)}\right), i = 1, \dots, m.$$

Дифференцируя эти тождества по x_k, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, j = 1, \dots, m,$$

с отличным от нуля определителем, из которой можно найти

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}.$$

3.3 Дифференцируемые отображения

Определение. Функция

$$f : G \to \mathbb{R}^m, G \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

называется ***отображением множества G в*** $\mathbb{R}^m$.

Представляя $f(x) \in \mathbb{R}^m$ через координаты

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \text{ при } x \in G,$$

видим, что задание отображения $f(x)$ равносильно заданию на G m числовых функций

$$f_1(x), \dots, f_m(x) : G \to \mathbb{R},$$

называемых ***координатными функциями***.

Множество

$$f(E) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = f(x), x \in E\}, E \subset G$$

называется ***образом множества E***, множество $f(G)$ – ***областью значений*** $f(x)$, а множество $f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in D\}, D \subset \mathbb{R}^m$ – ***прообразом множества*** *D*.

Определение. Отображение (1) называется ***непрерывным в точке*** $x^{(0)} \in G$, если для

$$\forall\, U\Big(f\big(x^{(0)}\big)\Big)\ \exists\, U\big(x^{(0)}\big) \subset \mathrm{G} : f\Big(U\big(x^{(0)}\big)\Big) \subset U\Big(f\big(x^{(0)}\big)\Big).$$

Лемма. Отображение (1) непрерывно в точке $x^{(0)} \in G$ тогда и только тогда, когда в точке $x^{(0)}$ непрерывны все координатные функции.

Определение. Отображение (1) называется ***непрерывным на открытом множестве*** *G*, если оно непрерывно в каждой точке множества G.

Теорема. Пусть отображение (1) непрерывно на открытом множестве G. Тогда (и только тогда) прообраз всякого открытого множества является открытым множеством.

Определение. Отображение (1) будем называть ***непрерывно дифференцируемым в точке*** $x^{(0)} \in G$ (на G), если все его координатные функции непрерывно дифференцируемы в точке $x^{(0)}$ (на G).

Будем считать далее $m = n$. Якобианом отображения (1) при $m = n$ назовем

$$J(x) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема. Пусть открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, отображение $f: G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на G и якобиан его $J \neq 0$ на G. Тогда $f(G)$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Теорема (о локальной обратимости отображения).

Пусть в условиях предыдущей теоремы $x^{(0)} \in G, y^{(0)} \in f\left(x^{(0)}\right)$. Тогда существуют окрестности $U\left(x^{(0)}\right)$, $U\left(y^{(0)}\right)$, для которых:

1) $f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение $U\left(x^{(0)}\right) \leftrightarrow U\left(y^{(0)}\right)$;
2) якобиан отображения, обратного к f: $U\left(x^{(0)}\right) \to U\left(y^{(0)}\right)$, отличен от нуля на $U\left(y^{(0)}\right)$.

Замечание. Если отображение $f: G \to D$ является взаимно однозначным, $G \leftrightarrow D$, то обратное отображение $f^{-1}: D \leftrightarrow G$ определяется следующим образом $f^{-1}(y) = x$, если $f(x) = y$ $(y \in D$, $x \in G)$.

Теорема (принцип сохранения области).

Образ области в $\mathbb{R}^n$ при непрерывно дифференцируемом отображении с отличным от нуля якобианом является областью.

4 ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Будем рассматривать числовые функции нескольких переменных, определенные в некоторой окрестности $U\left(x^{(0)}\right) \subset \mathbb{R}^n$.

4.1 Локальный экстремум

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Точка $x^{(0)}$ называется ***точкой (локального) минимума функции*** $f(x)$, если

$$\exists U\left(x^{(0)}\right): f\left(x^{(0)}\right) \le f(x)\ \forall x \in \dot{U}\left(x^{(0)}\right).$$

Если же вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, то $x^{(0)}$ называется точкой ***строгого (локального) минимума*** функции $f(x)$.

Аналогично определяются и точки (локального) максимума и строгого (локального) максимума функции f.

Точки минимума и точки максимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Аналогично определяются точки строгого экстремума функции.

Теорема (необходимые условия экстремума). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке экстремума $x^{(0)}$ частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right) = 0$.

Определение. Точка $x^{(0)}$ называется стационарной точкой функции $f(x)$, если $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и $df\left(x^{(0)}\right) = 0$.

Теорема (необходимые условия экстремума). Пусть функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x^{(0)}$. Если она дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ – стационарная точка функции $f(x)$.

Определение. Квадратичная форма

$$A(\xi) = A(\xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{1}$$

($a_{ij} = a_{ji}$ при $i, j = 1, \dots, n$) называется

а) ***положительно определенной***, если $A(\xi) > 0\ \forall \xi \ne \vec{0}$, б) ***отрицательно определенной***, если $A(\xi) < 0 \; \forall \xi \neq \vec{0}$,

в) ***определенной***, если она положительно определённа, или отрицательно определённа,

г) ***неопределенной***, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Лемма. Пусть квадратичная форма $A(\xi)$ (1) положительно определённа. Тогда при некотором $\mu > 0$

$$A(\xi) \geq \mu|\xi|^2 \quad \forall \; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема (достаточные условия строгого экстремума). Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Пусть второй дифференциал $d^2f\left(x^{(0)}\right)$ функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной формой. Тогда $x^{(0)}$ – точка строгого минимума (строгого максимума) функции $f(x)$. Если же квадратичная форма $d^2f\left(x^{(0)}\right)$ является неопределенной, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.

Следствие (необходимые условия экстремума). Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x^{(0)}$, то либо

$$d^2f\left(x^{(0)}\right) \geq 0 \; \forall dx \in \mathbb{R}^n, \text{ либо } d^2f\left(x^{(0)}\right) \leq 0 \; \forall dx \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание. Если квадратичная форма $d^2f\left(x^{(0)}\right)$ (3) в стационарной точке $x^{(0)}$ функции $f(x)$ является полуопределенной (т. е. $d^2f\left(x^{(0)}\right) \geq 0$ либо $d^2f\left(x^{(0)}\right) \leq 0$), но не является определенной, то для изучения вопроса об экстремуме функции в точке $x^{(0)}$ можно использовать ее разложение по формуле Тейлора более высокой точности, как это делалось в случае функции одной переменной.

Теорема (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы). Квадратичная форма (1) положительно определённа тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Критерием отрицательной определенности формы (1) является условие

$$(-1)^k \Delta_k > 0\ \forall k = 1,2,\dots,n.$$

Теорема. Пусть функция $f(x)$ двух переменных дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки (x_0, y_0), так что $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

а) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0,$$

то точка (x_0, y_0) является точкой строгого экстремума (строгого минимума при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, строгого максимума при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$).

б) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0,$$

то экстремума в точке (x_0, y_0) нет.

в) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 0,$$

то экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, а может и не быть.

4.2 Условный локальный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы функции $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ $(1 \le m < n)$. Уравнения $\{\varphi_j(x) = 0\}_{j=1}^{m}$ будем называть ***уравнениями связи***. Пусть $E := \{x: x \in G,\ \ \varphi_j(x) = 0,\ \ 1 \le j < m\}$.

Определение. Точка $x^{(0)} \in E$ называется ***точкой условного минимума*** [***строгого условного минимума***] функции $f(x)$ при уравнениях связи, если $\exists \delta > 0$, при котором

$$f(x^{(0)}) \le f(x) \qquad [f(x^{(0)}) < f(x)]$$

для $\forall x \in E \cap \dot{U}_\delta(x^{(0)})$.

Аналогично определяется точка условного максимума (строго условного максимума), условного экстремума (строго условного экстремума).

В дальнейшем будем считать, что $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ – непрерывно дифференцируемы на G, $rang\ \left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\| = m$ на G, $x^{(0)} \in E$,

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right|_{x^{(0)}} \not\equiv 0.$$

Тогда по теореме о системе неявных функций в некоторой окрестности $U\left(x^{(0)}\right)$ для $\left\{x_j=\mu_j(x_{m+1},\dots,x_n)\right\}_{j=1}^{m}$, причем μ_j – непрерывно дифференцируемы, имеет место эквивалентное задание уравнений связи

$$\left\{\varphi_j\left(\mu_1(x_{m+1},\dots,x_n),\mu_2(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\mu_m(x_{m+1},\dots,x_n)\right)=0\right\}_{j=1}^{m}.$$

Введем функцию

$$\Phi(x_{m+1},\dots,x_n)=f\left(\mu_1(x_{m+1},\dots,x_n),\mu_2(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\mu_m(x_{m+1},\dots,x_n)\right).$$

Определение. Через $\widehat{dx_1},\dots,\widehat{dx_n}$ будем обозначать дифференциалы, удовлетворяющие системам

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx_i=0\right\}_{j=1}^{m},$$

$$\left\{dx_j=\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial\mu_j}{\partial x_i}dx_i\right\}_{j=1}^{m}.$$

Определение. Точка $x^{(0)}\in E$ называется ***условно стационарной точкой*** функции $f(x)$ при уравнениях связи, если

$$\widehat{df}:=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\widehat{dx_i}=0.$$

Теорема (необходимое условие экстремума).

Точка $x^{(0)}$ условного экстремума $f(x)$ при уравнениях связи $\{\varphi_j(x)=0\}_{j=1}^{m}$ является условно стационарной точкой $f(x)$ при уравнениях связи $\{\varphi_j(x)=0\}_{j=1}^{m}$.

Теорема (метод множителей Лагранжа).

Точка $x^{(0)}\in E$ является условно стационарной точкой функции $f(x)$ при уравнениях связи $\{\varphi_j(x)=0\}_{j=1}^{m}$ тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ такие, что $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции Лагранжа:

$$L(x):=f(x)-\sum_{1}^{m}\lambda_j\,\varphi_j(x).$$

При этом числа λ_j определяются однозначно.

Следствие (необходимое условие условного экстремума).

Точка $x^{(0)}$ условного экстремума $f(x)$ при уравнениях связи $f(x)$**,** при уравнениях связи $\{\varphi_j(x)=0\}_{j=1}^{m}$ является стационарной точкой функции Лагранжа L.

Теорема (достаточные условия строгого условного экстремума).

Пусть $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)}$ функции Лагранжа L. Тогда:

1) $d^2L > 0$ $[< 0]$ при $|dx| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ – точка строгого условного минимума (максимума) $f(x)$ при уравнениях связи;

2) $\widehat{d^2L} > 0$ (< 0) при $\left|\widehat{dx}\right| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ – точка строгого условного минимума (максимума) $f(x)$ при уравнениях связи;

3) d^2L – неопределенная квадратичная форма $\Rightarrow$ сделать вывод нельзя;

4) $\widehat{d^2L}$ – неопределенная квадратичная форма $\Rightarrow$ в точке $x^{(0)}$ нет условного экстремума.

5 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

5.1 Сходимость числового ряда

Определение. Символ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ или $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k \epsilon \mathrm{R}$, называется ***числовым рядом***, a_k — его ***членом***, а $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ – ***n-й частичной* (или *частной*) *суммой*** этого ***ряда.***

Ряд называется ***сходящимся*** (к S), если последовательность $\{S_n\}_1^{\infty}$ его частичных сумм сходится (к S).

В этом случае число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называют ***суммой ряда*** и пишут

$$a_1 + a_2 + \cdots = S \text{ или } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Таким образом, в этом случае под

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

понимают также число.

Если последовательность $\{S_n\}_1^{\infty}$ расходится, то ряд называют ***расходящимся***. Пишут также

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty, \text{ если } S_n \to +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty, \text{ если } S_n \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема. Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема (критерий Коши).

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in N: \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon\ \forall\ n \geq n_\varepsilon, \forall\ p \in N.$$

Определение. Числовой ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right)$$

называется ***остатком ряда*** (1) *после n-го члена.*

Сходимость ряда равносильна сходимости какого-либо из его остатков, что сразу следует из критерия Коши.

Теорема. Пусть сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Тогда при $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ и сумма его равна

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

5.2 Числовые ряды с неотрицательными членами

Рассмотрим числовые ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, a_k \geq 0.$$

Теорема. Для сходимости ряда необходима и достаточна ограниченность последовательности его частичных сумм.

Теорема. Пусть при некотором k_0 $0 \leq a_k \leq b_k \ \forall \ \ k \geq k_0$. Тогда

1°сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ влечёт сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;

2°расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ влечёт расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Следствие. Пусть $a_k > 0, \ \ b_k > 0, \ \exists \ \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in (0, \infty)$.

Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k , \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема (***интегральный признак сходимости ряда***).

Пусть $f(x)$ непрерывна и убывает к нулю на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно временно.

Теорем (*признак Даламбера*).

Пусть $a_k > 0 \ \ \forall \ k \in \mathbb{N}$ и существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

1) если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
2) если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;
3) если $q = 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Теорема (*признак Коши*).

Пусть $a_k \geq 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$ и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

1) если $q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится*;*
2) если $q > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, и даже его общий член не стремится к нулю*;*
3) если $q = 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Следствие. Утверждение теоремы сохранится, если в ней условие $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$ заменить на условие

$$\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

5.3 Сходящиеся знакопеременные ряды

Теорема (*признак Лейбница*).
Пусть $a_k \geq a_{k+1}$ $\forall\ k \in \mathbb{N}, a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

сходится.

При этом остаток ряда $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_n$ по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого из его членов:

$$|r_n| \leq a_{n+1}.$$

Переходим к признакам сходимости рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Теорема (*признак Дирихле*).
Пусть числа a_k монотонно стремятся к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничена. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ сходится.

Теорема (*признак Абеля*).
Пусть последовательность чисел $\{a_k\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Замечание. Признак Абеля можно сформулировать так: *ряд, получаемый почленным умножением сходящегося ряда на члены монотонной ограниченной последовательности, сходится.*

5.4 Абсолютно сходящиеся ряды

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение. Пусть задан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и отображение $k \to n_k$, являющееся взаимно однозначным соответствием $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ называют ***рядом с переставленными членами*** (по отношению к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$).

Теорема. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный перестановкой членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Теорема. Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно. Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} b_{mj},$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и сумма его

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} b_{kj} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Теорема (*Римана*).
Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, но не абсолютно. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}$ можно так переставить его члены, что полученный ряд будет сходиться к A.

6 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

6.1 Сходимость функциональных последовательностей

Пусть на множестве X задана последовательность функций

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} = (f_1(x), f_2(x), f_3(x) \dots),$$

принимающих числовые значения в точках $x \in X$.

Определение. Последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ во всех точках $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \le M$.

Определение. Последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется ***поточечно сходящейся*** к функции $f(x)$ на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$, т. е.

$$\forall\, x \in X \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x):$$

$$\forall\, x \in X\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon): \forall\, n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty$.

Определение. Функциональная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется

равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех точек $x \in X$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon): \forall\ n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall\ x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ n \to \infty$.

Для того чтобы последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} sup_X|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Обозначим $r_n = sup_X|f_n(x) - f(x)|$.

Тогда последовательность $(r_n)_{n=1}^{\infty} = (sup_X|f_n(x) - f(x)|)_{n=1}^{\infty}$ является числовой последовательностью.

Теорема (*критерий Коши равномерной сходимости последовательности*). Для того чтобы последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех точек $x \in X$, всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon): \forall\ x \in X, \forall\ n > N(\varepsilon)\ \forall\ p \in \mathbb{N}\ \ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon.$$

6.2 Функциональные ряды и их сходимость

Пусть $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Определение. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

членами которого являются функции $u_k(x)$, называется ***функциональным***.

Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Определение. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится, то x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Определение. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его ***областью сходимости***. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D \subseteq X$.

Если множество D пусто, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ расходится в каждой точке множества X.

Определение. Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ конечная сумма $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ называется ***n-й частичной суммой*** и обозначается $S_n(x)$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ называется ***n-м остатком*** и обозначается $r_n(x)$.

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***сходящимся поточечно*** к функции $S(x)$ на множестве X, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $S(x)$ на X, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \Leftrightarrow \forall\, x \in X \ \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Определение. Функция $S(x)$ называется ***суммой*** ряда.

Для поточечно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ его остаток $r_n(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$\forall\, x \in X \ \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $D_1 \subset D$, где D – ***область сходимости функционального ряда***.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows S(x) \ \Leftrightarrow S_n(x) \rightrightarrows S(x) \ \forall \ x \in X.$$

Для равномерно сходящегося ряда остаток удовлетворяет соотношению: $r_n(x) \rightrightarrows 0 \ \forall\, x \in X$.

Различие определений *поточечной* и *равномерной* сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер

$N(\varepsilon)$ зависит от ε и $x \in X$, т. е. $N = N(\varepsilon, x)$, а во втором – только от ε, т. е. $N = N(\varepsilon)$. *Поточечн*ая сходимость называется также ***неравномерной***.

Теорема (*критерий Коши равномерной сходимости ряда*) Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$, для всех $p \in \mathbb{N}$ и для всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство

$$\left|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

6.3 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема (*признак Вейерштрасса*) Пусть

1) члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ удовлетворяют неравенствам:
$$|u_k(x)| \leq a_k(x)\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x \in X;$$
2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, $a_k \geq 0$, сходится.

Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Определение. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого удовлетворяют неравенствам $|u_k(x)| \leq a_k(x)\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x \in X$, называется ***мажорантным*** рядом или ***мажорантой*** для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а сам функциональный ряд в этом случае называется ***мажорируемым*** на множестве X.

Теорема (*признак Дирихле*). Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ равномерно сходится к нулю на множестве X;
2) $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ монотонна;
3) последовательность частичных сумм $(B_n(x))$, $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$, ограничена на X.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Теорема (*признак Абеля*). Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ ограничена на множестве X и в каждой точке $x \in X$ монотонна;
2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на X.

6.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

– непрерывность

Если на множестве X функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма непрерывна на X и возможен предельный переход:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x) \ \forall\, x_0 \in X;$$

– почленное интегрирование

Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке $[a; b]$, то его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0; x] \subset [a; b]$ и справедливо равенство:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(x)\, dt,$$

причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(x)\, dt$ сходится равномерно на $[a; b]$;

– почленное дифференцирование

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a; b]$ членами сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$ и справедливо равенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

7 СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

7.1 Определение степенного ряда, теорема Абеля

Определение. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

называется ***степенным рядом*** по степеням $(x - x_0)$. Здесь a_k, x_0 – заданные действительные числа, x – переменная. Числа a_k называются ***коэффициентами*** степенного ряда.

При $x_0 = 0$ имеем ***степенной ряд по степеням*** x:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (*Абеля*).

Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интервале $-|x_0| < x < |x_0|$ и сходится равномерно на отрезке $-q \leq x \leq q$, где $0 < q < |x_0|$. Если в точке $x_1 \neq 0$ степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ расходится, то он расходится во всех точках x, таких, что $|x| > |x_1|$.

7.2 Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля вытекает, что если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R; R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

Определение. Число $R \geq 0$ называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, если степенной ряд сходится в каждой точке интервала $(-R; R)$ и расходится при $|x| > R$.

Определение. Интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости.***

При $x = \pm R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если ряд хотя бы в одной точке $x_1 = R$ или $x_2 = -R$ сходится, то эти точки вместе с интервалом сходимости образуют ***область сходимости***.

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

Теорема. Пусть для коэффициентов ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \neq 0.$$

Тогда радиус сходимости находится по формуле *Коши-Адамара*:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, то

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_k\ +1}\right|.$$

Для степенного ряда общего вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ существует $R \in \mathbb{R}$, $R \geq 0$, такое, что данный ряд абсолютно сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Здесь число $R \geq 0$ называют ***радиусом сходимости***, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

7.3 Свойства сходящихся степенных рядов

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то его сумма непрерывна на интервале сходимости $(-R; R)$;

– операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0; x] \subset (-R; R)$ степенного ряда не изменяют его радиуса сходимости;

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости;

– степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0; x]$, принадлежащем интервалу сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов, О. В. Методические указания по математическому анализу. Курс лекций по математическому анализу : в 2 ч. / О. В. Бесов. − М., 2004. Ч. 1 (для студентов 1-го курса). МФТИ − 327 с.
2. Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу / Ю. С. Богданов. – Минск : Изд-во БГУ, 1974. – Ч. 1. – 176 с.
3. Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу / Ю. С. Богданов. – Минск : Изд-во БГУ, 1978. – Ч. 2. – 182 с.
4. Богданов, Ю. С. Математический анализ / Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица, Ю. Б. Сыроид. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 351с.
5. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : «ТетраСистем», 2011. – 416 с.
6. Воднев, В. Т. Основные математические формулы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск : Вышэйшая шк., 1995. – 380 с.
7. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. − М. : МЦНМО, 2018. – Ч. 1. − 564 с.
8. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. − М. : МЦНМО, 2017. –Ч. 2. − 676 с.
9. Ильин, В. А. Математический анализ : учебник для бакалавров / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – Люберцы : Юрайт, 2016. − Ч. 1. − 660 с.
10. Ильин, В. А. Математический анализ : учебник для бакалавров / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – Люберцы : Юрайт, 2016. − Ч. 2. − 357 с.
11. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2003. – Т. 1. – 704 с.
12. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2004. – Т. 2. – 720 с.
13. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2006. – Т. 3. – 351 с.
14. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л. Д. Кудрявцев [и др.]. – М. : Наука, 1986. – 528с.
15. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1997. – 720 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Справочное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Раздел «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Ряды»

Справочник

Составители:
Гуцко Наталия Викторовна,
Игнатович Снежана Владимировна

Корректор *Е. В. Сузько*
Оригинал-макет *Л. Н. Добрянская*

Подписано в печать 03.06.2021. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 4,0.
Тираж 95 экз. Заказ 9.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1 /306 от 22 апреля 2014 г.
ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская обл.
Тел. (0236) 24-61-29.