**Е. М. ОВСИЮК**[1], **Н. В. ГУЦКО**[2], **В. М. РЕДЬКОВ**[3]
[1, 2]МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[3]Институт физики им. Б.И. Степанова (г. Минск, Беларусь)

## ТРАНЗИТИВНОСТЬ В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ И ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

В работах [1, 2] показано, что одно измерение с поляризованным светом дает возможность зафиксировать матрицу Мюллера лоренцевского типа только с точностью до четырех числовых параметров $x, u;\ z, w$, подчиняющихся квадратичному условию связи (в остальном эти 4 координаты произвольны)

$$x^2(A^2-\mathbf{B}^2)+2xyA(B^2-\mathbf{A}^2)+y^2[(\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2-B^2)\mathbf{A}^2-A^2B^2]=$$
$$=z^2(B^2-\mathbf{A}^2)+2zwB(A^2-\mathbf{B}^2)+w^2[(\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2-A^2)\mathbf{B}^2-A^2B^2]+1. \quad (1)$$

Начальный и конечный векторы Стокса задают величины $A,\ \mathbf{A},\ B,\ \mathbf{B}$:

$$A=S+S', \qquad B=S-S', \qquad \mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{S}', \qquad \mathbf{B}=\mathbf{S}-\mathbf{S}',$$
$$S>0, \qquad S'>0, \qquad S^2-\mathbf{S}^2=S'^2-\mathbf{S}'^2=\mathrm{inv}=+V^2\geq 0,$$
$$A^2=S_0^2+S_0'^2+2S_0S_0=s^2+s'^2+2ss',$$
$$B^2=S_0^2+S_0'^2-2S_0S_0=s^2+s'^2-2ss',$$
$$\mathbf{A}^2=s^2+s'^2-2V^2+2\sqrt{s^2-V^2}\sqrt{s'^2-V^2}\cos\phi,$$
$$\mathbf{B}^2=s^2+s'^2-2V^2-2\sqrt{s^2-V^2}\sqrt{s'^2-V^2}\cos\phi, \quad (2)$$

числовые параметры $x,u;z,w$ задают параметры возможных матриц Мюллера лоренцевского типа согласно

$$n_0=Ax-\mathbf{A}^2y, \qquad \mathbf{n}=z\mathbf{A}-wA\mathbf{B}+y\mathbf{A}\times\mathbf{B},$$
$$m_0=-Bz+\mathbf{B}^2w, \qquad \mathbf{m}=x\mathbf{B}-yB\mathbf{A}+w\mathbf{A}\times\mathbf{B}. \quad (3)$$

Обращаем внимание на различные размерности координат $x, y, z, w$:

$$[x]=[S]^{-1}, \qquad [y]=[S]^{-2}, \qquad [z]=[S]^{-1}, \qquad [w]=[S]^{-2}.$$

Все 6 квадратичных членов в (1) таковы, что размерности параметров $x,z$ и $y,w$ взаимно компенсируются с соответствующими размерностями $[S]$ и $[S]^2$ величин, образованными из начального и конечного 4-векторов Стокса; поэтому без ограничения общности все величины в уравнении (1) будем считать безразмерными.

Цель работы – исследовать геометрию поверхности (1) в 4-пространстве $(x, y, z, w)$. В уравнении (1) можно выделить две квадратичные формы $(x, y)$ и $(z, w)$, приведем их к диагональному виду:

$$\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}\begin{vmatrix}X\\Y\end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix}z\\w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\alpha' & \sin\alpha'\\ -\sin\alpha' & \cos\alpha'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}Z\\W\end{vmatrix}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), из требования диагонализации двух квадратичных форм приходим к следующим соотношениям:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2a}{c-b}, \qquad \mathrm{tg}\,2\alpha'=\frac{2a'}{c'-b'}, \quad (5)$$

$$X^2(b\cos^2\alpha-a\sin 2\alpha+c\sin^2\alpha)+Y^2(b\sin^2\alpha+a\sin 2\alpha+c\cos^2\alpha)=$$
$$=Z^2(b'\cos^2\alpha'-a'\sin 2\alpha'+c'\sin^2\alpha')+W^2(b'\sin^2\alpha'+a'\sin 2\alpha'+c'\cos^2\alpha')+1, \quad (6)$$

где использованы обозначения

$$(A^2-\mathbf{B}^2)=b, \qquad A(B^2-\mathbf{A}^2)=a, \qquad (\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2-B^2)\mathbf{A}^2-A^2B^2=c;$$
$$(B^2-\mathbf{A}^2)=b', \qquad B(A^2-\mathbf{B}^2)=a', \qquad (\mathbf{B}^2+\mathbf{A}^2-A^2)\mathbf{B}^2-A^2B^2=c'. \quad (7)$$

Далее с учетом выражений

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{(c-b)}{\sqrt{(c-b)^2+4a^2}}, \qquad \sin 2\alpha = \pm \frac{2a}{\sqrt{(c-b)^2+4a^2}},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{(c-b)^2+4a^2} \pm (c-b)}{2\sqrt{(c-b)^2+4a^2}}, \ \sin^2\alpha = \frac{\sqrt{(c-b)^2+4a^2} \mp (c-b)}{2\sqrt{(c-b)^2+4a^2}}$$

приходим к соотношению (для определенности выберем $\delta, \delta' = +1$)

$$X^2\left(\frac{b+c}{2} - \delta\,\frac{\sqrt{(b+c)^2-4(bc-a^2)}}{2}\right) + Y^2\left(\frac{b+c}{2} + \delta\,\frac{\sqrt{(b+c)^2-4(bc-a^2)}}{2}\right) -$$

$$-Z^2\left(\frac{b'+c'}{2} - \delta'\,\frac{\sqrt{(b'+c')^2-4(b'c'-a'^2)}}{2}\right) - W^2\left(\frac{b'+c'}{2} + \delta'\,\frac{\sqrt{(b'+c')^2-4(b'c'-a'^2)}}{2}\right) = 1. \qquad (8)$$

Сначала предположим изотропность векторов Стокса $V^2 = 0$, что соответствует полностью поляризованному свету:

$$A^2 = s^2 + s'^2 + 2ss', \qquad B^2 = s^2 + s'^2 - 2ss',$$

$$\mathbf{A}^2 = s^2 + s'^2 + 2ss'\cos\phi, \qquad \mathbf{B}^2 = s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\phi.$$

Вычисляем

$$b = 2ss'(1+\cos\phi), \qquad c = (s+s')^2\,2ss'(1+\cos\phi).$$

$$b + c = 2ss'(1+\cos\phi) + (s+s')^2\,2ss'(1+\cos\phi) \geq 0.$$

$$a^2 = (s^2 + s'^2 + 2ss')(2ss')^2\,(1+\cos\phi)^2, \qquad bc - a^2 = 0. \qquad (9a)$$

Это означает, что в (8) коэффициент при $X^2$ равен нулю, а коэффициент при $Y^2$ равен $(b+c) > 0$, при этом

$$\cos^2\alpha = \frac{c}{c+b} = \frac{(s+s')^2}{1+(s+s')^2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{b}{c+b} = \frac{1}{1+(s+s')^2}. \qquad (9b)$$

Анализируем коэффициенты при $Z^2$, $W^2$. Вычисляем

$$b' = -2ss'(1+\cos\phi) < 0, \qquad c' = -(s-s')^2\,2ss'(1+\cos\phi) < 0,$$

$$b' + c' = -2ss'(1+\cos\phi) - (s-s')^2\,2ss'(1+\cos\phi) \leq 0.$$

$$a'^2 = (s-s')^2\,(2ss')^2\,(1+\cos\phi)^2, \qquad b'c' - a'^2 = 0. \qquad (10a)$$

Это означает что в (8) коэффициент при $Z^2$ равен нулю, а коэффициент при $W^2$ равен $b' + c' \leq 0$, при этом

$$\cos^2\alpha' = \frac{c'}{c'+b'} = \frac{(s-s')^2}{1+(s-s')^2}, \qquad \sin^2\alpha' = \frac{b'}{c'+b'} = \frac{1}{1+(s-s')^2}. \qquad (10b)$$

Таким образом, множество матриц Мюллера, связывающих два состояния полностью поляризованного света, описывается соотношением

$$0\,X^2 + (b+c)Y^2 - 0\,Z^2 - (b'+c')W^2 = +1. \qquad (11a)$$

Это означает, что все множество матриц Мюллера, определяемое выбранной парой изотропных векторов Стокса, может быть задано следующими тремя независимыми координатами:

$$X, Z - \text{ëþ áû å}, Y = \frac{\cos\Gamma}{\sqrt{+(b+c)}}, W = \frac{\sin\Gamma}{\sqrt{-(b'+c')}}, \Gamma \in [0, 2\pi]. \qquad (11b)$$

Рассмотрим еще один простой случай: начальный пучок является естественным светом. Тогда

$$S_0 = s, \qquad \mathbf{S} = 0, \qquad V^2 = s^2, \qquad s' > s,$$

$$A^2 = s^2 + s'^2 + 2ss', \qquad B^2 = s^2 + s'^2 - 2ss',$$

$$\mathbf{A}^2 = s'^2 - s^2, \qquad \mathbf{B}^2 = s'^2 - s^2. \qquad (12a)$$

Вычисляем

$$b = 2s^2 + 2ss' = 2s(s'+s) > 0, \qquad c = 2s(s'+s)(s'-s)^2 > 0,$$
$$a^2 = 4s^2(s'+s)^2(s'-s)^2, \qquad bc - a^2 = 0, \tag{12b}$$

т. е. коэффициент при $X^2$ равен нулю, а при $Y^2$ равен $(b+c)$:

$$b + c = +2s(s'+s)[1+(s'-s)^2], \tag{12c}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{c}{c+b} = \frac{(s'-s)^2}{1+(s'-s)^2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{b}{c+b} = \frac{1}{1+(s'-s)^2}. \tag{12d}$$

Аналогично исследуем коэффициенты при $Z^2$, $W^2$:

$$b' = -2s(s'-s) < 0, \qquad c' = -2s(s+s')(s'^2 - s^2) < 0,$$
$$a'^2 = 4s^2(s'-s)^2(s'+s)^2, \qquad b'c' - a'^2 = 0, \tag{13a}$$

т. е. коэффициент при $Z^2$ равен нулю, а при $W^2$ равен $(b'+c')$:

$$b' + c' = -2s(s'-s)[1+(s'+s)^2], \tag{13b}$$

$$\cos^2\alpha' = \frac{c'}{c'+b'} = \frac{(s'+s)^2}{1+(s'+s)^2}, \qquad \sin^2\alpha' = \frac{b'}{c'+b'} = \frac{1}{1+(s'+s)^2}. \tag{13c}$$

Таким образом, основное квадратичное уравнение принимает здесь вид

$$0\,X^2 + (b+c)Y^2 - 0\,Z^2 - (b'+c')W^2 = +1, \tag{14a}$$

$$+(b+c) = 2s(s'+s)[1+(s'-s)^2], \qquad -(b'+c') = 2s(s'-s)[1+(s'+s)^2]. \tag{14b}$$

Рассмотрим еще один простой случай, когда начальный пучок света частично поляризован, а конечный пучок является естественным светом:

$$s' = V, \qquad s > s', \qquad \mathbf{A}^2 = s^2 - s'^2, \qquad \mathbf{B}^2 = s^2 - s'^2,$$
$$A^2 = s^2 + s'^2 + 2ss', \qquad B^2 = s^2 + s'^2 - 2ss'.$$
$$b = +2s'(s+s') > 0, \qquad b' = 2s'^2 - 2ss' = -2s'(s-s') < 0,$$
$$c = 2s'(s-s')(s^2 - s'^2) > 0, \qquad c' = -2s'(s+s')(s^2 - s'^2) < 0,$$
$$a^2 = 4s'^2(s+s')^2(s'-s)^2, \qquad a'^2 = 4s'^2(s-s')^2(s'+s)^2. \tag{15a}$$

Убеждаемся в выполнении равенств $bc - a^2 = 0$, $b'c' - a'^2 = 0$. Таким образом, основное квадратичное уравнение принимает здесь вид

$$0\,X^2 + (b+c)Y^2 - 0\,Z^2 - (b'+c')W^2 = +1. \tag{15b}$$

Отметим в заключение еще один простой случай: множество матриц Мюллера, под действием которых интенсивность света не меняется $s' = s$; при этом

$$A^2 = 4s^2,\ B^2 = 0, \quad \mathbf{A}^2 = 2(s^2 - V^2)(1+\cos\phi),\ \mathbf{B}^2 = 2(s^2 - V^2)(1-\cos\phi). \tag{16a}$$

Основное квадратичное уравнение принимает вид

$$x^2(A^2 - \mathbf{B}^2) - 2xyA\mathbf{A}^2 + y^2(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2)\mathbf{A}^2 +$$
$$+2(s^2 - V^2)(1+\cos\phi)\,Z^2 + 8V^2(s^2 - V^2)(1-\cos\phi)\,W^2 = +1. \tag{16b}$$

Диагонализировать предстоит только первую квадратичную форму. Вычисляем

$$b = 2\Big[V^2(1-\cos\phi) + s^2(1+\cos\phi)\Big] > 0,\ c = 8(s^2 - V^2)^2(1+\cos\phi) > 0,$$
$$a^2 = 16s^2(s^2 - V^2)^2(1+\cos\phi)^2,\ bc - a^2 = 16V^2\sin^2\phi(s^2 - V^2)^2 > 0. \tag{16c}$$

Отсюда следует, что первая квадратичная форма также приводится к диагональному виду с положительными коэффициентами.

Ситуация, когда начальный и конечный пучки света являются частично поляризованными, является наиболее сложной. Коэффициенты диагонализованного квадратичного условия вычисляются в явном виде и являются положительными. Детальный анализ этого случая будет рассмотрен в отдельной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Red'kov, V.M. Transitivity of the c theory of the Lorentz group and the Stokes–Mueller formalism in polarization optics / V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk // Foundation & Advances in Nonlinear Science: Proceedings of the 15-th International Conference-School, Minsk, Belarus, September 20–23, 2010 / eds.: by V.I. Kuvshinov, G.G. Krylov. – Minsk: Publishing Center of BSU, 2010. – P. 1–27.

2. Редьков, В.М. О нахождении матрицы Мюллера оптического элемента по результатам поляризационных экспериментов, теоретико-групповой анализ / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Оптика неоднородных структур – 2011: материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 16–17 февраля 2011 г. / УО «МГУ им. А.А. Кулешова»; редкол.: В.А. Карпенко (отв. редактор) [и др.]. – Могилев, 2011. – С. 32–35.