АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

СПРАВОЧНИК

МГПУ им. И. П. Шамякина

ISBN 978-985-477-830-3
9 789854 778303

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Справочник
для студентов специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика»
специализации 1-31 04 08 03 «Компьютерное моделирование
физических процессов»

МГПУ им. И. П. Шамякина

Мозырь
МГПУ им. И. П. Шамякина
2022

УДК 514.12+512.64(078)
ББК 22.151.5я73
А64

Составитель
М. И. Ефремова, кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры физики и математики УО МГПУ им. И. П. Шамякина

Рецензенты:
кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора
по учебно-воспитательной и идеологической работе филиала
Российского государственного социального университета в г. Минске
В. В. Пакштайте;
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры
информационно-вычислительных систем УО «Белорусский торгово-
экономический университет потребительской кооперации»
Л. А. Воробей

А64 Аналитическая геометрия и линейная алгебра : справ. для студентов специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика» специализации 1-31 04 08 03 «Компьютерное моделирование физических процессов» / сост. М. И. Ефремова. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2022. – 66 с.
ISBN 978-985-477-830-3.

Справочник содержит определения основных понятий, формулы, свойства, теоремы без доказательств, примеры по основным вопросам дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра».

Предназначен для самостоятельной работы студентов специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика» специализации 1-31 04 08 03 «Компьютерное моделирование физических процессов».

УДК 514.12+512.64(078)
ББК 22.151.5я73

ISBN 978-985-477-830-3

© Ефремова М. И., составление, 2022
© УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2022

МГПУ им. И. П. Шамякина

ОГЛАВЛЕНИЕ

МГПУ им. И.П. Шамякина

ПРЕДИСЛОВИЕ

В издание включены материалы по дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» из разделов «Векторная алгебра», «Линейное пространство», «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Линейные операторы», «Евклидовы пространства», которые изучаются студентами специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика» специализации 1-31 04 08 03 «Компьютерное моделирование физических процессов». Предложенные определения понятий, формулы, свойства, теоремы без доказательств, примеры по основным вопросам курса «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» направлены на углубление и систематизацию знаний и умений, приобретенных в результате его изучения. Поясняющие рисунки способствуют доступности и наглядности предлагаемого материала. Для удобства использования издание снабжено предметным указателем.

Справочник будет полезен при самостоятельной подготовке к практическим занятиям по дисциплине, а также поможет студенту продемонстрировать на экзамене знание основных теорем и понятий, умение систематизировать информационные сведения программы экзамена, понимание взаимосвязей между ними, умение ими пользоваться.

МГПУ им. И.П. Шамякина

1. ВЕКТОР. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Понятие вектора

Связанным вектором называется отрезок AB, о котором однозначно известно, какая точка является его началом, а какая – концом. Если A является началом, а B концом, то пишут $\overrightarrow{AB}$. ***Длиной*** или ***модулем связанного вектора*** $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначается длина связанного вектора через $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Связанный вектор $\overrightarrow{AB}$ называется ***нулевым***, если его начало и конец совпадают. Связанный вектор, не являющийся нулевым, называется ***ненулевым***. Два ненулевых связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***эквивалентными*** (пишут $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$), если они сонаправлены и их длины равны.

Множество всех связанных векторов разбивается на непересекающиеся множества эквивалентных друг другу связанных векторов. Поэтому возможно следующее определение.

Свободным вектором или просто ***вектором*** называется множество всех эквивалентных друг другу связанных векторов. Для задания такого множества достаточно взять один из связанных векторов, который называют представителем вектора. Для обозначения свободных векторов используют малые буквы латинского алфавита, например, $\vec{a}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***, если множества их представителей совпадают. При этом пишут $\vec{a} = \vec{b}$. ***Длиной*** или ***модулем*** вектора $\vec{a}$ называется длина его любого представителя. Обозначается $|\vec{a}|$. Вектор называется ***нулевым***, если его представителем является нулевой связанный вектор. Вектор, который не является нулевым, называется ***ненулевым***. Обозначается нулевой вектор $\vec{0}$.

Углом φ ***между векторами*** и $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между их любыми двумя представителями, взятыми таким образом, что их началами является одна и та же точка (рисунок 1).

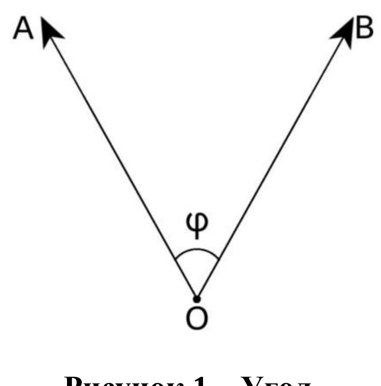

Рисунок 1 – Угол между векторами

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются ***коллинеарными***, если их представители параллельны одной и той же прямой.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***ортогональными***, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются ***компланарными***, если их представители параллельны одной и той же плоскости.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Сумма векторов

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ – представители соответственно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\overrightarrow{AC}$ – представитель вектора $\vec{c}$ (рисунок 2).

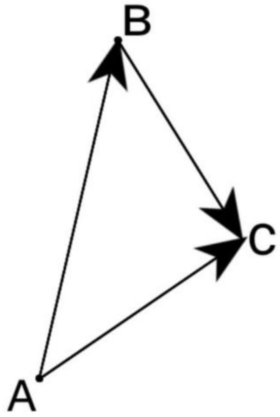

Рисунок 2 – Сумма векторов

Приведённое определение сложения векторов даёт так называемое ***правило параллелограмма***, так как сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представляет собой вектор, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (рисунок 3).

Вектор, равный вектору $\vec{a}$ по длине и противоположный ему по направлению, называется ***противоположным вектором к вектору*** $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Вектор, модуль которого равен единице, называется ***единичным вектором.***

Теорема 1.1. Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (коммутативность);

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (ассоциативность).

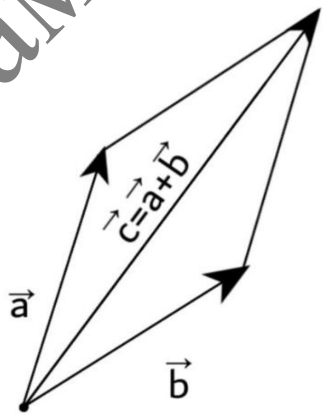

Рисунок 3 – Правило параллелограмма

Произведение вектора на действительное число и его свойства

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ ***на действительное ненулевое число*** α называется такой вектор $\vec{b}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$;
2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;
3) если $\alpha>0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и, если $\alpha<0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Будем также считать, что для любого вектора $\vec{a}$ $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ и для любого действительного числа α $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Теорема 1.2. Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Для любого коллинеарного ему вектора $\vec{b}$ существует единственное действительное число λ такое, что $\vec{b}=\overrightarrow{\lambda a}$.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Теорема 1.3. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых двух чисел α *и* β справедливо равенство $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Теорема 1.4. Для любых действительных чисел α и β и любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо утверждение

1) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов).

2) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

2. АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве дана некоторая прямая l и некоторый единичный вектор $\vec{e} \| \, l$. В качестве представителя вектора $\vec{e}$ возьмём связанный вектор $\overrightarrow{OE}$, где O – некоторая точка прямой l. Очевидно, что $\overrightarrow{OE}$ является единичным связанным вектором. Прямая l с единичным связанным вектором $\overrightarrow{OE}$ представляет собой ось с заданным направлением (рисунок 4).

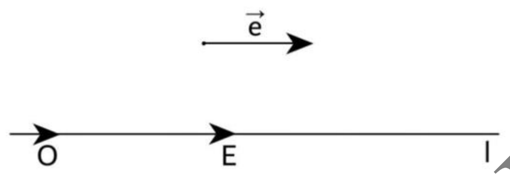

Рисунок 4 – Ось с заданным направлением

Определение 2.1. Пусть дана некоторая ось l и некоторый вектор $\vec{a}$, заданный представителем $\overrightarrow{AB}$ (рисунок 5). Через точки A и B проведём соответственно плоскости π_1 и π_2, перпендикулярные оси l. Ось l пересечёт плоскости π_1 и π_2 соответственно в точках A_1 и B_1. Связанный вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ является представителем некоторого вектора $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ называется ***векторной проекцией вектора*** $\vec{a}$ ***на ось*** l.

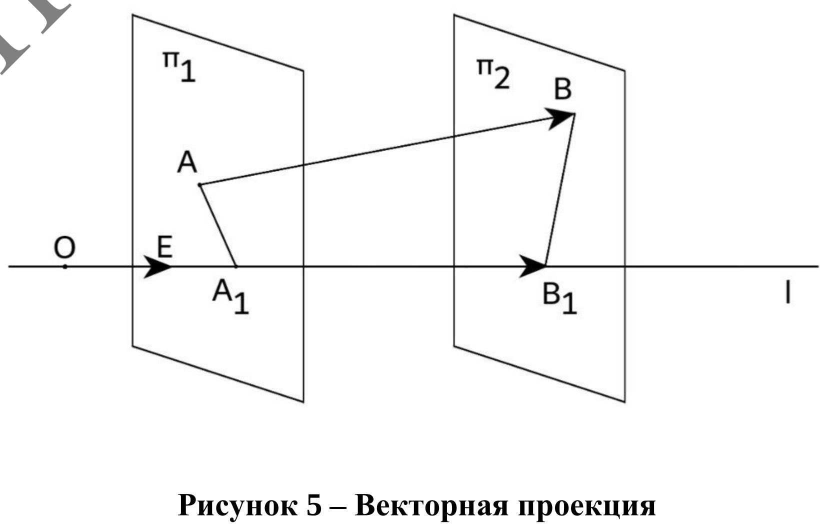

Рисунок 5 – Векторная проекция

МГПУ им. И. П. Шамякина

Определение 2.2. Пусть длина векторной проекции некоторого вектора $\vec{a}$ на ось l равна m. Число p такое, что $p = m$, если эта проекция сонаправлена с осью l и $p = -m$, если проекция с осью противоположно направлена, называется ***скалярной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l***. В случае, когда $\vec{a} \perp l$, точки A_1, B_1 совпадают и векторной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l будет нулевой вектор. Векторная проекция вектора на ось не зависит от выбора представителя этого вектора.

Теорема 2.1. Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

1) $Pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, l})$;

2) $Pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda Pr_l\vec{a}$ для любого действительного числа λ;

3) $Pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = Pr_l\vec{a} + Pr_l\vec{b}$.

Разложение векторов

Определение 2.3. Пусть дано некоторое множество векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$. Любой вектор $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа, называется ***линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$***. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются ***коэффициентами линейной комбинации.*** Про вектор $\vec{a}$ говорят еще, что он разложен по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются ***коэффициентами разложения $\vec{a}$***.

Теорема 2.2. Пусть на некоторой плоскости даны два ненулевых неколлинеарных вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. Любой вектор $\vec{a}$ этой плоскости может быть разложен по векторам $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, и причём такое разложение единственно.

Теорема 2.3. Пусть даны три ненулевых некомпланарных вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по векторам $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, и причём такое разложение единственно.

Определение 2.4. ***Базисом на плоскости*** называются два произвольных ненулевых неколлинеарных вектора, взятых в определённом порядке.

Определение 2.5. ***Базисом в пространстве*** называются три произвольных ненулевых некомпланарных вектора, взятых в определённом порядке.

Аффинная система координат

Определение 2.6. ***Аффинной системой координат на плоскости*** называется система, которая состоит из двух пересекающихся в некоторой точке O осей X и Y, на которых соответственно выбраны представители $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$ единичных векторов базиса $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ соответственно. Точка O называется ***началом координат***, ось OX называется ***осью абсцисс***, а ось OY –

МГПУ им. И. П. Шамякина

осью ординат. Угол φ между координатными осями должен удовлетворять условию $0 < \varphi < \pi$ (рисунок 6).

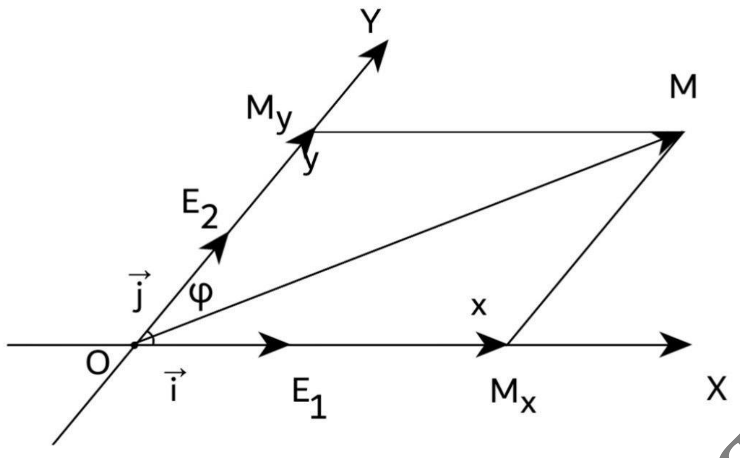

Рисунок 6 – Аффинная система координат

Обычно аффинная система координат на плоскости обозначается OXY, если речь идёт о конкретном начале координат и конкретных координатных осях. Пусть на некоторой плоскости дана некоторая аффинная система координат (рисунок 6). Пусть M – некоторая точка этой плоскости. Разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ (точки M_x и M_y лежат соответственно на осях OX и OY) следующим образом: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$.Тогда очевидно, что существуют единственные действительные числа x, y такие, что $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + \overline{y}\vec{\jmath}$.

Определение 2.7. ***Аффинной системой координат в пространстве*** называется система, которая состоит из трёх пересекающихся в некоторой одной точке O осей X, Y и Z на которых соответственно выбраны представители единичных векторов базиса $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ соответственно. Точка O называется ***началом координат***, ось OX называется ***осью абсцисс***, ось OY – ***осью ординат***, а ось OZ – ***осью аппликат***. Плоскости, проходящие через координатные оси, называются координатными плоскостями и обозначаются OXY, OYZ, OXZ. Значения углов между координатными осями должны принадлежать интервалу $(0, \pi)$.

Обычно аффинная система координат обозначается $OXYZ$, если речь идёт о конкретном начале координат и конкретных координатных осях.

Пусть в некотором пространстве дана некоторая аффинная система координат. Пусть M – некоторая точка этого пространства. Разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$ (где точки M_x, M_y, M_z лежат на координатных осях OX, OY, OZ соответственно) следующим образом: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$. Тогда очевидно, что существуют единственные действительные числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

МГПУ им. И.П. Шамякина

Координаты вектора в аффинной системе координат

Определение 2.8. ***Радиус-вектором точки*** M в некоторой аффинной системе координат на плоскости называется вектор $\overrightarrow{OM}$, векторы $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ называются ***векторными проекциями радиус-вектора*** $\overrightarrow{OM}$, а точки M_x и M_y – ***проекциями точки*** M ***на координатные оси*** OX и OY соответственно.

Определение 2.9. ***Координатами точки*** в некоторой аффинной системе координат на плоскости называются коэффициенты разложения радиус-вектора этой точки по векторам базиса.

Определение 2.10. ***Радиус-вектором точки*** M в некоторой аффинной системе координат в пространстве называется вектор $\overrightarrow{OM}$, векторы $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$, $\overrightarrow{OM_z}$ называются векторными проекциями радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, а точки M_x, M_y, M_z – проекциями точки M на координатные оси OX, OY, OZ соответственно.

Определение 2.11. ***Координатами точки*** в некоторой аффинной системе координат в пространстве называются коэффициенты разложения радиус-вектора этой точки по векторам базиса.

Определение 2.12. ***Координатами вектора*** в некоторой аффинной системе координат на плоскости называются координаты конца того его представителя, начало которого находится в начале координат.

Определение 2.13. ***Координатами вектора*** в некоторой аффинной системе координат в пространстве называются координаты конца того его представителя, начало которого находится в начале координат.

Декартова прямоугольная система координат

Определение 2.14. ***Прямоугольной декартовой системой координат на плоскости*** называется такая аффинная система координат на плоскости, координатные оси которой перпендикулярны.

Если x, y – координаты точки M (вектора $\vec{a}$), то пишут $M(x, y)$ ($\vec{a}(x, y)$) или $M = (x, y)$ ($\vec{a} = (x, y)$).

Определение 2.15. ***Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве*** называется такая аффинная система координат в пространстве, координатные оси которой попарно перпендикулярны.

Если x, y, z – координаты точки M (вектора $\vec{a}$), то пишут $M(x, y, z)$ ($\vec{a}(x, y, z)$) или $M = (x, y, z)$ ($\vec{a} = (x, y, z)$).

Деление отрезка в данном отношении

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – две различные точки, данные в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Поскольку ***расстояние между точками A и B*** равно модулю связанного вектора $\overrightarrow{AB}$, то получим

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Пусть нужно найти такую точку C, которая лежит на отрезке AB и делит его в заданном соотношении. Пусть $C(x, y, z)$. Тогда ***формулы деления отрезка*** в данном соотношении имеют вид:

$$x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{1+\lambda}; y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{1+\lambda}; z = \frac{\lambda z_2 + z_1}{1+\lambda}.$$

Если точка C – середина отрезка AB, то $\lambda = 1$, и тогда получаем ***формулы середины отрезка***

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}; y = \frac{y_2 + y_1}{2}; z = \frac{z_2 + z_1}{2}.$$

3. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение

Определение 3.1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, φ – угол между ними. Поставим в соответствие указанной паре векторов некоторое число, которое называется ***скалярным произведением векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначается $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Скалярное произведение можно вычислить и через скалярную проекцию одного из векторов-сомножителей на другой: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| Pr_{\vec{a}}\vec{b}$.

Используя понятие скалярного произведения, легко получить следующую формулу:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Определение 3.2. Выражение $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a}$ называется ***скалярным квадратом вектора***.

Теорема 3.1 (критерий ортогональности). Для того чтобы ненулевые векторы были перпендикулярны (ортогональны), необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Теорема 3.2. Скалярное произведение двух векторов обладает следующими свойствами.

1) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\vec{b} = \overrightarrow{\vec{b}\vec{a}}$;

2) $\forall \lambda \in R, \forall \vec{a}, \forall \vec{b}, (\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{b}\vec{a})$;

МГПУ им. И.П. Шамякина

3) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$

Из определения скалярного произведения легко получить следующую формулу:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Векторное произведение

Определение 3.3. Пусть дана упорядоченная тройка ненулевых некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Выберем их представителями связанные векторы соответственно $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Говорят,что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют ***правую тройку***, если из конца связанного вектора $\overrightarrow{OC}$ кратчайший поворот от первого связанного вектора $\overrightarrow{OA}$ ко второму связанному вектору $\overrightarrow{OB}$ виден в направлении против часовой стрелки (рисунок 7). Если же указанный поворот виден в направлении по часовой стрелке, то говорят, что эти векторы образуют ***левую тройку*** (рисунок 8).

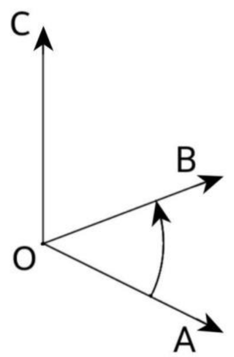

Рисунок 7 – Правая тройка векторов

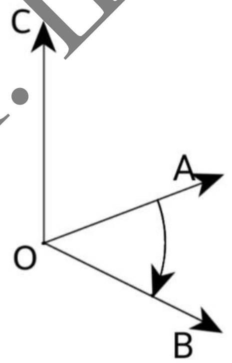

Рисунок 8 – Левая тройка векторов

Определение 3.4. Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ***Векторным произведением векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

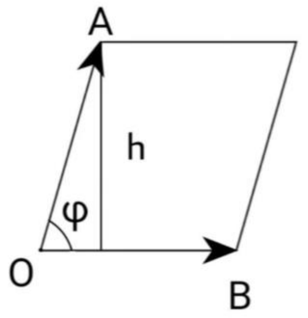

Рисунок 9 – Геометрический смысл векторного произведения

Обозначается векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a} \times \vec{b}$.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Теорема 3.3. Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на представителях этих векторов (рисунок 9).

Теорема 3.4 (критерий коллинеарности). Для того чтобы ненулевые векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Теорема 3.5. Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность);
2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (линейность);
3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивность).

Смешанное произведение

Определение 3.5. ***Смешанным произведением трёх ненулевых векторов*** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор.

Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Из определения смешанного произведения следует, что это число.

Теорема 3.6. Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на представителях векторов-сомножителей.

Теорема 3.7. Если смешанное произведение положительно, то векторы образуют правую тройку, если смешанное произведение отрицательно, то тройка левая.

Теорема 3.8 (критерий компланарности). Для того чтобы три ненулевые вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

Теорема 3.9. Смешанное произведение трёх ненулевых векторов обладает следующими свойствами:

1) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$;
2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;
3) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})\vec{b}\vec{c} = \overrightarrow{a_1}\vec{b}\vec{c} + \overrightarrow{a_2}\vec{b}\vec{c}$;
4) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Линейные операции над векторами, заданными прямоугольными координатами

Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул линейных операций над векторами, заданными прямоугольными координатами:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1);$$
$$-\vec{a} = (-x_1, -y_1, -z_1).$$

МГПУ им. И.П. Шамякина

1. $\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=(x_1+x_2)\vec{i}+$
$+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$.

2. $\lambda\vec{a}=\lambda\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}$.

3. $-\vec{a}=-x_1\vec{i}-y_1\vec{j}-z_1\vec{k}$.

Найдем сначала скалярные произведения векторов базиса:

$$\vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=\vec{k}\vec{k}=1;\ \vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{i}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\vec{j}=0.$$

Теперь легко получить следующие формулы:

- ***скалярного произведения для векторов, заданных прямоугольными координатами*** $\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$,
- ***модуля вектора, заданного прямоугольными координатами***

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

- ***угла между векторами, заданными прямоугольными координатами***

$$cos\propto=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Поскольку векторные произведения базисных векторов имеют следующие значения:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0;\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};$$

$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$ то ***векторное произведение векторов, заданных прямоугольными координатами*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Из этой формулы легко получается ***формула площади параллелограмма, построенного на векторах*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных прямоугольными координатами

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

и ***формула смешанного произведения***

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть V – непустое множество, элементы которого будем обозначать малыми буквами латинского алфавита $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ и пусть P – числовое поле, элементы которого будем обозначать малыми буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Будем говорить, что на множестве V определена операция умножения на числа из поля Р, если задано отображение $(P \times V) \to V$, т. е. всякому числу $\alpha \in P$ и всякому элементу $\vec{a} \in V$ ставится в соответствие, причем однозначно, некоторый элемент из множества V. Этот элемент будем называть произведением элемента $\vec{a}$ на число α и обозначать символом $\alpha\vec{a}$.

Определение 4.1. Непустое множество V называется **линейным (векторным) пространством *над полем*** P, а элементы из V векторами, если на V определена бинарная алгебраическая операция сложения и операция умножения на числа из поля P, причем выполняются следующие условия (аксиомы векторного пространства):

1. Множество V относительно операции сложения образует абелеву группу, т. е.

(а) операция сложения на множестве V ассоциативна:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V\ ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}));$$

(б) операция сложения на множестве V коммутативна:

$$\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in V\ (\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a});$$

(в) во множестве V существует нулевой элемент:

$$\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{a} \in V\ (\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}).$$

Нулевой элемент $\vec{0}$ называют нулевым вектором;

(г) для каждого элемента из множества V в этом множестве существует ему противоположный: $\forall \vec{a} \in V,\ \exists \vec{b} \in V(\vec{a} + \vec{b} = 0)$.

Элемент, противоположный $\vec{a}$, обозначают через $-\vec{a}$.

2. Операция умножения элементов из V на числа из P ассоциативна, т. е. $\forall \alpha, \beta \in P, \forall \vec{a} \in V\ ((\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}))$.

МГПУ им. И. П. Шамякина

3. Операция умножения элементов из V на числа из P дистрибутивна относительно операции сложения, определенной на V, т. е.

$$\forall\alpha \in P, \forall\vec{a},\vec{b} \in V\ (\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}).$$

4. Операция умножения элементов из V на числа из P дистрибутивна относительно операции сложения чисел, т. е.

$$\forall\alpha,\beta \in P, \vec{a} \in V\ ((\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}).$$

5. $\forall\vec{a} \in V\ (1 \cdot \vec{a} = \vec{a})$.

Приведем ***основные свойства векторных пространств***, вытекающие из определения.

Свойство 4.1. В пространстве V существует единственный нулевой вектор $\vec{0}$.

Свойство 4.2. Для всякого вектора $\vec{a} \in V$ в V существует единственный ему противоположный вектор.

Свойство 4.3. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в пространстве V разрешимо уравнение вида $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$. Решение этого уравнения записывается $\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$ и называется ***разностью векторов*** $\vec{b}$ и $\vec{a}$. Говорят также, что в V ***операция сложения обратима***, т. е. определена операция, обратная сложению – вычитание.

Свойство 4.4. Сумма произвольного конечного числа векторов пространства V не зависит от того, в каком порядке выполняется сложение.

Приведенные выше свойства следуют из того, что V образует группу относительно сложения.

Свойство 4.5. $\forall\vec{a} \in V\ (0 \cdot \vec{a} = \vec{0})$.

Свойство 4.6. $\forall\alpha \in P\ (\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0})$.

Свойство 4.7. $\forall\ \alpha \in P,\ \forall\vec{a} \in V\ (\alpha\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ либо $\vec{a} = 0)$.

Свойство 4.8. $\forall\alpha \in P,\ \forall\vec{a} \in V\ ((-\alpha)\vec{a} = -\alpha\vec{a})$.

Свойство 4.9. $\forall\alpha \in P,\ \forall\vec{a} \in V\ (\alpha(-\vec{a}) = -\alpha\vec{a})$.

Свойство 4.10. $\forall\alpha \in P,\ \forall\vec{a},\vec{b} \in V\ (\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b})$ (дистрибутивность операции умножения векторов на числа относительно операции вычитания векторов).

Свойство 4.11. $\forall\alpha,\beta \in P,\ \forall\vec{a} \in V\ ((\alpha - \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{a})$.

Если поле P является полем действительных чисел, то пространство V называется действительным векторным пространством. Если же P есть поле C комплексных чисел, то V называют комплексным векторным пространством.

Примеры векторных пространств

o Множество всех комплексных чисел относительно операций сложения чисел и умножения комплексных чисел на действительные числа образует действительное векторное пространство.

МГПУ им. И. П. Шамякина

○ Множество всех свободных векторов W_3 обычного геометрического пространства образует действительное пространство относительно операций сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.

○ Множество *R[x]* всех многочленов с действительными коэффициентами образует действительное векторное пространство относительно операций сложения многочленов и умножения многочленов на действительные числа. Здесь операция сложения многочленов рассматривается как сложение векторов, а операция умножения многочленов на числа – как умножение векторов на числа.

Важным примером векторных пространств является арифметическое векторное пространство.

Определение 4.2. Совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ поля P, расположенных в определенном порядке, называется ***n*-мерным числовым вектором над полем *P***.

Для обозначения *n*-мерных числовых векторов используют записи

$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ либо $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называют ***координатами*** или ***компонентами вектора*** $\vec{a}$.

Определение 4.3. Два числовых вектора $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ называются *равными*, если равны их соответствующие координаты, т. е. если $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Множество всех *n*-мерных числовых векторов над полем P будем обозначать через P^n. Введем на этом множестве операции сложения векторов и умножения векторов на числа из поля P.

Определение 4.4. ***Суммой числовых векторов*** $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ называется вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

Определение 4.5. ***Произведением вектора*** $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *на число* $\lambda \in P$ называется вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$.

Теорема 4.1. Множество P^n образует векторное пространство над полем P относительно операций сложения числовых векторов и умножения векторов на числа из поля P.

Определение 4.6. Пространство P^n *n*-мерных числовых векторов называется ***арифметическим n-мерным векторным пространством над полем P***.

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Пусть V – векторное пространство над числовым полем P. Будем полагать, что все векторы, о которых идет речь ниже, принадлежат V.

МГПУ им. И.П. Шамякина

Определение 4.7. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется ***линейно зависимой***, если можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из поля P, среди которых есть отличные от нуля, что будет выполняться равенство:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}. \qquad (4.1)$$

Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется ***линейно независимой***, если равенство (4.1) выполняется только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Теорема 4.2. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ тогда и только тогда линейно зависима, когда хотя бы один из векторов системы линейно выражается через остальные.

Приведенная теорема дает возможность иначе определить понятие линейной зависимости векторов.

Определение 4.8. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется ***линейно зависимой***, если хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через остальные. Если же ни один из векторов системы линейно не выражается через остальные векторы, то система называется линейно независимой.

Приведем ***свойства линейной зависимости векторов***.

1) Всякая система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2) Если система векторов линейно независима, то линейно независима и любая подсистема этой системы векторов. Данное свойство равносильно следующему.

3) Если линейно зависима некоторая подсистема системы векторов, то линейно зависима и сама система.

4) Если система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ линейно независима, а система $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}, \vec{b}$ линейно зависима, то вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$.

5) Система n-мерных числовых векторов

$$\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \overrightarrow{a_2} = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{a_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{matrix}, \qquad (4.2),$$

в которой число векторов больше их размерности $(m > n)$, линейно зависима.

Определение 4.9. Говорят, что система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$ (4.3) ***линейно выражается через систему векторов*** $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$ (4.4), если всякий вектор системы (4.3) линейно выражается через векторы системы (4.4).

Отношение линейной выражаемости на множестве систем векторов пространства V рефлексивно и транзитивно (предлагается убедиться в этом самостоятельно).

МГПУ им. И. П. Шамякина

Определение 4.10. Две системы векторов называются ***эквивалентными***, если каждая из них линейно выражается через другую.

Теорема 4.3 (основная теорема о линейной зависимости векторов). Пусть система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$ линейно независима и линейно выражается через систему $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$, тогда число векторов в первой системе не больше, чем во второй, т. е. $m \le n$.

Следствие 1. Если система $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$ линейно выражается через систему $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$ и $m \le n$, то система $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$ линейно зависима.

Следствие 2. В n-мерном арифметическом пространстве P^n линейно зависима любая система, состоящая из более чем *n* векторов.

5. БАЗИС И КООРДИНАТЫ

Базис и ранг системы векторов

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство линейной зависимости числовых векторов.

Определение 5.1. ***Базисом системы векторов*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется линейно независимая подсистема данной системы, через которую линейно выражается любой вектор системы.

Теорема 5.1. Любые два базиса системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

Определение 5.2. ***Рангом системы векторов*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется число векторов в базисе этой системы.

Заметим, что базис системы векторов можно рассматривать как максимальную линейно независимую подсистему этой системы, т. е. такую линейно независимую подсистему, при добавлении к которой произвольного вектора системы она становится линейно зависимой. Действительно, согласно свойству линейной зависимости векторов, любой вектор системы линейно выражается через максимальную линейно независимую систему, и, следовательно, она образует базис системы. Соответственно ранг системы векторов можно рассматривать как максимальное число линейно независимых векторов в этой системе.

Теорема 5.2. Ранги эквивалентных систем векторов равны.

Связь между размерностью и базисом пространства

Под V мы будем понимать векторное пространство над числовым полем P.

Определение 5.3. Векторное пространство V называется ***n-мерным***, если в нём существует линейно независимая система, состоящая из n векторов, а всякая система из $n + 1$ векторов пространства уже линейно зависима. Число n в этом случае называют размерностью пространства V.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Пример 5.1. Арифметическое n-мерное векторное пространство P^n является n-мерным в смысле приведенного определения. Действительно, оно содержит в себе линейно независимую систему, состоящую из n векторов. Таковой, например, является система единичных векторов

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \overrightarrow{e_2} &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overrightarrow{e_n} &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{5.1}$$

В то же время всякая система из $n + 1$ векторов пространства P^n уже линейно зависима, так как число векторов в ней больше их размерности.
В дальнейшем n-мерное векторное пространство над полем P будем обозначать через V_n.

Определение 5.4. ***Базисом векторного пространства*** V называется линейно независимая система векторов этого пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства.

Например, базис пространства P^n образует система единичных векторов (5.1). Действительно, она линейно независима, и всякий вектор $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ пространства P^n линейно выражается через неё, а именно:

$$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}.$$

Теорема 5.3. Всякий базис пространства $\mathrm{V_n}$ состоит из n векторов.

Теорема 5.4. Если базис пространства V состоит из n векторов, то его размерность равна n.

На основании приведенных теорем можно дать другое определение размерности пространства.

Определение 5.5. ***Размерностью пространства*** V называется число векторов в базисе этого пространства.

Координаты вектора в данном базисе

Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ – базис пространства V_n и $\vec{a}$ – произвольный вектор этого пространства. Тогда существуют такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из поля P, что $\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}$.

Такое представление вектора $\vec{a}$ называется ***разложением этого вектора по векторам базиса***. Коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этого разложения называют ***координатами вектора*** $\vec{a}$ ***в базисе***.

Теорема 5.5. Координаты всякого вектора $\vec{a}$ пространства V_n в заданном базисе пространства определяются однозначно.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Подпространства

Определение 5.6. Подмножество L векторов пространства V называется ***подпространством*** из V, если оно само образует пространство над полем P относительно операций сложения векторов и умножения векторов на числа, определенных в V.

Теорема 5.6 (критерий подпространства). Непустое подмножество L векторов из V тогда и только тогда образует подпространство пространства V, когда L замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения векторов на числа из поля P, т. е. когда выполняются следующие условия:

1) $\forall \vec{a}, b \in V \,|\, \vec{a} + \vec{b} \in V$;

2) $\forall \alpha \in P, \forall \vec{a} \in V \,|\, \alpha\vec{a} \in V$.

Отметим, что условия 1) и 2) в приведенной теореме равносильны следующему:

$$\forall \alpha, \beta \in P, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V \,|\, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in L.$$

Линейная оболочка векторов

Определение 5.7. Множество $L(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$ всех линейных комбинаций векторов системы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ называется ***линейной оболочкой векторов*** этой системы. Таким образом,

$$L(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}) = \{\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k\overrightarrow{a_k} \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in P\}.$$

Теорема 5.7. Линейная оболочка $L(a_1, a_2, \dots, a_k)$ является подпространством пространства V.

Пересечение подпространств

Пусть L_1и L_2 – подпространства векторного пространства V.

Определение 5.8. ***Пересечением подпространств*** L_1 и L_2 называется множество всех векторов пространства V, принадлежащих как L_1, так и L_2, то есть $L_1 \cap L_2 = \{\vec{a} | \vec{a} \in L_1 \text{ и } \vec{a} \in L_2\}$.

Теорема 5.8. Пересечение подпространств L_1 и L_2 также является подпространством пространства V.

Сумма подпространств

Определение 5.9. ***Суммой подпространств*** L_1 и L_2 пространства V называется множество всех векторов пространства V, представимых в виде $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$, где $\overrightarrow{a_1} \in L_1$ и $\overrightarrow{a_2} \in L_2$ Сумма подпространств L_1 и L_2 обозначается через $L_1 + L_2$. Таким образом,

$$L_1 + L_2 = \{\vec{a} | \vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \quad \overrightarrow{a_1} \in L_1, \overrightarrow{a_2} \in L_2\}.$$

Теорема 5.9. Сумма подпространств L_1 и L_2 также является подпространством из V.

МГПУ им. И. П. Шамякина

6. МАТРИЦЫ

Определение 6.1. ***Матрицей размера*** $m \times n$ над полем P называется прямоугольная таблица, составленная из чисел поля P и содержащая в себе m строк и n столбцов.

Матрицы в дальнейшем будем обозначать большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$. Матрица A размера $m \times n$ записывается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (6.1)$$

Числа, из которых составлена матрица, называют ***элементами этой матрицы***. Первый индекс элемента матрицы указывает номер строки, а второй − номер столбца, в котором он стоит.

Матрицу (6.1) размера $m \times n$ будем также записывать в более компактной форме: $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Определение 6.2. Две матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *и* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ одинакового размера называются ***равными***, если равны их соответствующие элементы, т. е. $a_{ij} = b_{ij} (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Согласно этому определению, равенство матриц размера $m \times n$ равносильно системе mn числовых равенств

$$a_{ij} = b_{ij} (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}).$$

Определение 6.3. Матрица А называется ***квадратной матрицей порядка*** n, если число строк в ней равно числу столбцов и равно n.

Определение 6.4. Квадратная матрица порядка n называется ***матрицей треугольного вида***, если все ее элементы, расположенные ниже или выше главной диагонали (диагональ от a_{11} к a_{nn}), равны 0.

Определение 6.5. Квадратная матрица называется ***матрицей диагонального вида***, если все ее элементы, расположенные не на главной диагонали, равны 0.

Строки (столбцы) матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ будем рассматривать в дальнейшем как n-мерные (m-мерные) числовые векторы.

Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинакового размера.

Определение 6.6. ***Суммой матриц*** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Согласно определению, элементы суммы $A + B$ равны суммам соответствующих элементов слагаемых матриц. Очевидно, что операция сложения является алгебраической операцией на множестве матриц одинаковой размерности $m \times n$. Приведем далее свойства операции сложения на этом множестве.

Свойство 6.1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность).

Свойство 6.2. $A + B = B + A$ (коммутативность).

Свойство 6.3. $A + O = A$, где O − нулевая матрица размерности $m \times n$, т. е. матрица, все элементы которой равны нулю.

Свойство 6.4. Для всякой матрицы A существует противоположная ей матрица – А, такая, что $A + (-A) = O$. Очевидно, что противоположной матрице A является матрица, все элементы которой противоположны соответствующим элементам матрицы A.

Согласно приведенным свойствам, множество матриц одного и того же размера $m \times n$ образует абелеву группу относительно операции сложения. В частности, отсюда следует, что на этом множестве определена операция, обратная сложению, − вычитание.

Произведение матрицы на число

Определение 6.7. ***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ***на число*** $\alpha \in P$ называется матрица $\alpha A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Согласно определению, при умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.
Приведем некоторые свойства операции умножения матриц на числа.

Свойство 6.5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (ассоциативность).

Свойство 6.6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Свойство 6.7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).

Свойство 6.8. $1 \cdot A = A$ и $-1 \cdot A = -A$.

Из приведенных выше свойств операции сложения матриц и операции умножения матриц на числа из поля P вытекает, что множество матриц одного и того же размера $m \times n$ образует векторное пространство над полем P.

Произведение матриц

Произведение матрицы A на матрицу B определяется только для случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Определение 6.8. ***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B = (b_{lk})_{n\times s}$ называется матрица $AB = (c_{pq})_{m\times s}$, элементы которой определяются равенствами

$$c_{pq} = a_{p1} \times b_{1q} + a_{p2} \times b_{2q} + \cdots + a_{pn} \times b_{nq}. \qquad (6.2)$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

Согласно этой формуле, элемент c_{pq}, стоящий в p-ой строке и q-ом столбце матрицы AB, равен сумме произведений элементов p-й строки матрицы A на соответствующие элементы q-го столбца матрицы B. Элемент c_{pq} можно рассматривать как скалярное произведение p-ой строки матрицы A на q-ый столбец матрицы B.

В произведении AB матрицу A называют ***левым множителем***, а матрицу B – ***правым***. Говорят также, что произведено умножение матрицы В на матрицу А слева.

Очевидно, что $AB \neq BA$.

Продолжим перечисление свойств операций над матрицами. Будем полагать при этом, что выражение в одной из частей равенства имеет смысл. Тогда выражение в другой части равенства также будет иметь смысл.

Свойство 6.9. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность).

Свойство 6.10. $AB \neq BA$ (некоммутативность в общем случае).

Свойство 6.11. $A(B + C) = AB + AC$ и $(B + C)A = BA + CA$ (дистрибутивность относительно операции сложения).

Свойство 6.12. $AE = EA = A$, где E – единичная матрица.

Свойство 6.13. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$, где $\alpha \in P$.

Обозначим через M_n множество всех квадратных матриц порядка n. Из приведенных свойств операций сложения и умножения матриц следует, что это множество образует кольцо с единицей относительно указанных операций. Это кольцо содержит делители нуля. Это значит, что существуют матрицы A и B, отличные от нулевой, произведение которых равно нулевой матрице. Например, делителями нуля в кольце M_2 являются матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Действительно, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$.

Определение 6.9. Матрицы $A, B \in M_n$ называют ***перестановочными***, если $AB = BA$.

Легко убедиться, что скалярная матрица перестановочна с любой матрицей.

Определение 6.10. Диагональная матрица порядка n, все элементы главной диагонали которой равны между собой, называется ***скалярной матрицей порядка n***.

Частными случаями скалярных матриц являются:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ – } \textbf{\textit{единичная матрица}};$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ – } \textbf{\textit{нулевая матрица}}.$$

МГПУ им. И.П. Шамякина

Транспонирование матриц

Определение 6.11. Матрица $A^T_{n\times m} = (a'_{ji})$ называется ***транспонированной к матрице*** $A_{m\times n} = (a_{ij})$, если

$$\forall\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\quad a'_{ji} = a_{ij}\,.$$

Таким образом, из определения видим, что при транспонировании матрицы строки становятся столбцами и наоборот.

Свойства операции транспонирования

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

7. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть дана квадратная матрица порядка n: $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Определение 7.1. ***Определителем квадратной матрицы*** А n-го порядка называется алгебраическая сумма n! членов, каждый из которых представляет собой произведение n элементов матрицы А, взятых по одному от каждой строки и каждого столбца этой матрицы, причем произведение входит в определитель со знаком +, если соответствующая ему подстановка индексов четная и со знаком – в противном случае.

Определитель квадратной матрицы A порядка n будем называть определителем n-го порядка и обозначать

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы, строки и столбцы матрицы A будем называть при этом соответственно элементами, строками и столбцами определителя $|A|$.

Таким образом, согласно определению

$$|A| = \sum\nolimits_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^t\, a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

где t − число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и сумма состоит из всех слагаемых, для которых перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ различны.

МГПУ им. И.П. Шамякина

Свойства определителей

Свойство 7.1. Определитель квадратной матрицы А равен определителю транспонированной к ней матрицы, т. е. $|A| = |A^T|$.

Данное свойство устанавливает равноправие строк и столбцов определителя. Это значит, что все свойства, касающиеся строк определителя, справедливы и для его столбцов.

Свойство 7.2. Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю.

Свойство 7.3. Если все элементы строки определителя Δ умножить на число k, то на число k умножится определитель Δ.

Свойство 7.4. При перемене местами двух строк определителя Δ меняется его знак, абсолютная величина определителя не меняется.

Перемену местами двух строк (столбцов) определителя будем также называть транспозицией строк (столбцов).

Свойство 7.5. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

Свойство 7.6. Определитель, имеющий две пропорциональные строки, равен нулю.

Свойство 7.7. Определитель, у которого все элементы одной из строк, например, i-ой строки, представимы в виде суммы двух слагаемых, равен сумме двух определителей, все строки которых, кроме отмеченной i-ой строки, совпадают с соответствующими строками исходного определителя; i-я же строка первого определителя составлена из первых слагаемых, а i-я строка второго определителя составлена из вторых слагаемых элементов i-ой строки исходного определителя, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Это свойство распространяется и на случай, когда все элементы одной из строк представимы в виде суммы m элементов $(m > 2)$. Такой определитель равен сумме m соответствующих определителей.

Свойство 7.8. Определитель не изменится, если к одной из его строк прибавить другую строку, умноженную на произвольное число.

Свойство 7.9. Если одна из строк определителя является линейной комбинацией других его строк, то он равен нулю.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Определение 7.2. ***Определителем треугольного вида*** называется определитель, все элементы которого, расположенные ниже или выше главной диагонали (диагональ от верхнего левого к нижнему правому углу), равны нулю.

Свойство 7.10. Определитель треугольного вида равен произведению диагональных элементов.

Миноры и алгебраические дополнения

Пусть дан определитель *n*-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 7.3. ***Минором элемента*** a_{ij} определителя Δ называется определитель порядка $n-1$, полученный из определителя Δ вычеркиванием в нем *i*-ой строки *и j*-го столбца.

Минор элемента a_{ij} определителя Δ обозначается через M_{ij}.

Определение 7.4. ***Алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} определителя Δ называется минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$.Обозначается через A_{ij}.

Согласно определению, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 7.1. Определитель равен сумме произведений элементов одной из его строк (одного из столбцов) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \tag{7.1}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \tag{7.2}$$

Равенство (7.1) называется ***разложением определителя*** Δ **по *i*-ой строке**, а равенство (7.2) называется ***разложением определителя*** Δ **по *j*-ому столбцу**.

Теорема 7.2. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

8. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение 8.1. Матрица *A* называется ***обратимой***, если существует обратная ей матрица, т. е. такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

Определение 8.2. Квадратная матрица *A* называется ***невырожденной (неособенной)***, если ее определитель отличен от нуля, и ***вырожденной (особенной)***, если определитель матрицы равен нулю.

МГПУ им. И.П. Шамякина

Приведем достаточное условие обратимости матрицы.

Теорема 8.1. Всякая невырожденная матрица обратима.

При вычислении обратной матрицы A^{-1} способом, основанном на элементарных преобразованиях строк, справа к матрице A приписывается единичная матрица E. Получают так называемую комбинированную матрицу $A|E$. Затем над строками комбинированной матрицы проводятся элементарные преобразования с тем, чтобы на месте матрицы A получить единичную матрицу E. Тогда на месте матрицы E будет расположена матрица A^{-1}.

Пусть $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица порядка n.

Определение 8.3. ***Присоединенной для матрицы*** A называется матрица $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы.

Отметим, что алгебраические дополнения элементов строк матрицы А в матрице A^* располагаются в столбцах.

Теорема 8.2. Пусть A − обратимая матрица, тогда $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

9. РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть дана матрица $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$. Строки и столбцы этой матрицы рассматриваются как соответственно n-мерные и m-мерные числовые векторы. Поэтому можно говорить о системе строк (столбцов) матрицы как о системе n-мерных (m-мерных) числовых векторов.

Определение 9.1. ***Элементарными преобразованиями матрицы*** называются:

1) умножение строк и столбцов на число, отличное от 0;

2) прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число;

3) перестановка строк или столбцов.

Определение 9.2. ***Строчечным (столбцовым) рангом*** матрицы A называется ранг системы ее строк (столбцов).

Теорема 9.1 (о ранге матрицы). Строчечный ранг матрицы равен ее столбцовому рангу.

Согласно этой теореме, имеет смысл говорить просто о ранге матрицы, не употребляя слова «строчечный» и «столбцовый». Таким образом, *ранг матрицы* – это максимальное число линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Теорема 9.2. Всякое элементарное преобразование матрицы не меняет ранга матрицы.

Теорема 9.3. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк в ней.

Последние теоремы дают один из способов вычисления ранга матрицы, который заключается в приведении матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, а затем подсчете ненулевых строк полученной матрицы.

Существует и второе определение ранга матрицы.

Определение 9.3. ***Рангом матрицы*** называется наивысший порядок отличных от нуля ее миноров. ***Ранг нулевой матрицы*** по определению равен нулю. Ранг матрицы будем обозначать так: rang A.

Если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то все ее миноры (k + 1)-го порядка тоже равны нулю. Таким образом, если $rang\ A = r$, это значит, что у матрицы A есть отличный от нуля минор r-го порядка, а все ее миноры (r + 1)-го порядка равны нулю.

Свойства ранга матрицы

1. Ранг матрицы не превосходит ни количества ее строк, ни количества столбцов.
2. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
3. Если $rang\ A = 0$, то A – нулевая матрица.
4. Если у матрицы вычеркнуть столбец или строку, полностью состоящую из нулей, то ее ранг при этом не изменится.
5. Если у матрицы вычеркнуть одну из двух пропорциональных строк (столбцов), то ее ранг при этом не изменится.
6. Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. При этом, если один из сомножителей – невырожденная матрица, то ранг произведения равен рангу второго сомножителя.

Критерий совместности

Определение 9.4. ***Системой линейных уравнений*** с n неизвестными над полем P называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9.1}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные, b_i, a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ – числа из поля P. Числа a_{ij} называют коэффициентами, а b_i – свободными членами системы.

Определение 9.5. Числовой n-мерный вектор $\vec{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется ***решением системы*** (9.1), если при подстановке в систему вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ соответственно все уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

МГПУ им. И.П. Шамякина

Определение 9.6. Система линейных уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система называется ***несовместной***. Совместная система, имеющая только одно решение, называется ***определенной***. Система, имеющая более одного решения, называется ***неопределенной***. Неопределенная система линейных уравнений над числовым полем P имеет бесконечное множество решений.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и в случае совместности найти все ее решения.

Определение 9.7. ***Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений*** называются следующие преобразования:

1) перемена местами двух уравнений системы.

2) умножение уравнения системы на числа, отличные от нуля.

3) прибавление к одному из уравнений системы другого ее уравнения, умноженного на произвольное число.

Теорема 9.4 (Кронекера–Капелли или критерий совместности системы линейных уравнений). Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы.

10. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Матричный способ решения систем линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (10.1)$$

Обозначим: A − матрица системы;

X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных; B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Тогда систему (10.1) можно представить в матричной форме

$$AX = B. \qquad (10.2)$$

Если в системе (10.1) число уравнений равно числу неизвестных ($n = m$), причем матрица A системы обратима, то, умножив обе части равенства (10.2) слева на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1}B. \qquad (10.3)$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

На формуле (10.3) основан так называемый ***матричный способ решения систем линейных уравнений***. Этот способ применим для систем, в которых число уравнений равно числу неизвестных и матрицы которых обратимы. Решение системы будет единственным.

Правило Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{10.4}$$

$A = (a_{ij})$ – матрица этой системы. Определитель матрицы A будем называть определителем системы (10.4) и обозначать через Δ.

Теорема 10.1 (правило Крамера). Система (10.4) n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, имеет решение, причем единственное. Это решение определяется формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots; \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{10.5}$$

где Δ_j ($j=\overrightarrow{1,n}$) определитель, полученный из определителя Δ системы (10.4) заменой в нем j-го столбца столбцом свободных членов.

Теорема о базисном миноре

Определение 10.1. Строки матрицы A

$$A^1, A^2, \dots, A^k \tag{10.6}$$

называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю такие, что

$$\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_k A^k = O. \tag{10.7}$$

Строки (10.6) называются ***линейно независимыми***, если равенство (10.7) выполняется только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Определение 10.2. ***Базисным минором матрицы*** называется любой отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу этой матрицы. Строки (столбцы), проходящие через базисный минор, называются базисными.

Теорема 10.2 (о базисном миноре). Справедливы следующие утверждения:

1) базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы;

2) каждая из небазисных строк (столбцов) может быть представлена в виде линейной комбинации базисных.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Теорема 10.3 (о линейной независимости строк и столбцов). Для того чтобы строки (столбцы) матрицы были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ее ранг равнялся количеству строк (столбцов).

Следствия.

1. Для того чтобы строки (столбцы) матрицы были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы ее ранг был меньше количества строк (столбцов).

2. Для того чтобы строки (столбцы) определителя были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы он был отличен от 0.

3. Для того чтобы строки (столбцы) определителя были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы он был равен 0.

Матричные уравнения

Матричными уравнениями называются уравнения вида $AX = B$, $XA = B$, $AXB = C$, где A, B, C – известные матрицы; X – искомая.

Матрица X_0 называется ***решением матричного уравнения***, если при подстановке в это уравнение она обращает его в верное равенство.

МГПУ им. И.П. Шамякина

11. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Теорема 11.1. Всякая последовательность элементарных преобразований системы линейных уравнений приводит к системе, равносильной исходной.

Одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, называемый также методом Гаусса. Он состоит в том, что данная система линейных уравнений с помощью элементарных преобразований преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пусть дана система линейных уравнений (11.1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{11.1}$$

В ходе элементарных преобразований системы могут встретиться уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b \tag{11.2}$$

При этом возможны два случая:

а) в уравнении (11.2) свободный член отличен от нуля, т. е. $b \neq 0$. Такому уравнению не удовлетворяют никакие значения неизвестных;

б) в уравнении (11.2) $b = 0$. В таком случае этому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, т. е. уравнение является тождеством вида $0 = 0$. Такие уравнения удаляют из системы.

В системе (11.1) среди коэффициентов перед каждой из неизвестных x_j есть отличные от нуля. В противном случае эта система была бы системой с меньшим числом неизвестных, чем n. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$. В противном случае этого можно было бы добиться перестановкой уравнений в системе, либо перенумерацией переменных (перестановкой слагаемых в уравнениях системы). На первом шаге исключим переменную x_1, из всех уравнений системы начиная со второго. Для этого из второго уравнения вычтем первое, умноженное на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, затем из третьего уравнения вычтем первое, умноженное на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и т. д.

В результате получим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \quad a'_{l2}x_2 + \cdots + a'_{ln}x_n = b'_l. \end{cases} \tag{11.3}$$

Без ограничения общности можно считать, что в системе (11.3) коэффициент $a_{22} \neq 0$. Этого можно добиться перестановкой уравнений в системе либо изменением нумерации неизвестных в системе.

На втором шаге исключаем неизвестную x_2 из всех уравнений системы (11.3) начиная с третьего. Для этого из третьего уравнения вычитаем второе, умноженное на $\frac{a_{32}}{a_{22}}$, затем из четвертого уравнения вычитаем второе, умноженное на число $\frac{a_{42}}{a_{22}}$ и т. д. В результате на этом шаге получим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \quad a''_{s2}x_2 + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s. \end{cases} \tag{11.4}$$

Продолжая этот процесс, мы обязательно придем к одному из двух случаев:

1. После некоторого шага получена система, содержащая уравнение вида

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b$, где $b \neq 0$ (случай (а)). Тогда исходная система несовместна.

МГПУ им. И. П. Шамякина

2. После всех преобразований получена система вида

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r \ldots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{21}x_1 + \cdots + b_{2r}x_r + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{rr}x_r + \cdots + b_{m}x_n = c_r, \end{cases} \tag{11.5}$$

где коэффициенты $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ отличны от нуля.

Отметим, что в процессе преобразований мы можем получить тождества вида $0=0$ (случай (b)), которые удаляются из системы. Поэтому $m \geq l \geq s \geq \cdots \geq r$.

Для системы (11.5) также возможны два случая (A) $r = n$. Тогда из последнего уравнения находим $x_r = \frac{c_r}{b_{rr}}$.

Очевидно, это значение x_r будет единственным. Далее найденное значение x_r подставляем в предпоследнее уравнение системы (11.5) и находим единственное значение неизвестной x_{r-1} и т. д.

Итак, в случае $r = n$, т. е. когда в системе (11.5) число уравнений равно числу неизвестных, система (11.5), а следовательно, и система (11.1) имеет единственное решение, т. е. является определенной.

Пусть $r < n$. Тогда из последнего уравнения выражаем неизвестную x_r через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

$$x_r = c_r - x_{r,r+1} - \cdots - b_{rn}x_n.$$

Подставляя это выражение для x_r в предпоследнее уравнение системы (11.5), выражаем аналогично неизвестную x_{r-1} через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ и т. д. Наконец, подставляя найденные выражения для неизвестных $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2$ в первое уравнение, получаем выражение x_1, через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Неизвестные $x_1, \ldots, x_r$, которые выражаются через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, называют ***базисными неизвестными***, в свою очередь, неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ называют ***свободными неизвестными системы***.

Свободным неизвестным можно придавать произвольные значения. При этом будем получать различные решения системы.

Таким образом, в случае $r < n$, т. е. когда в системе (11.5) число уравнений меньше числа неизвестных, система имеет бесконечное множество решений и следовательно, является неопределенной.

На практике обычно элементарные преобразования проводят не над самой системой линейных уравнений, а над расширенной матрицей этой системы.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса обычно выписывается расширенная матрица этой системы, из которой затем с помощью элементарных преобразований получают ступенчатую матрицу.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Очевидно, что всякому элементарному преобразованию матрицы B соответствует некоторое элементарное преобразование системы. Поэтому полученная ступенчатая матрица определяет систему, равносильную исходной. Записав эту систему, находим ее решения, как это описано для системы (11.5).

12. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМОЙ

Вектор $\vec{a} \,||\, l$ называется ***направляющим вектором прямой*** (рисунок 11), а вектор $\vec{n} \perp l$ называется ***вектором нормали к прямой*** (рисунок 10).

Теорема 12.1. Прямая l, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$ и имеющая направляющий вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$, задается уравнением

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2}, \tag{12.1}$$

которое называется ***каноническим уравнением прямой*** или ***параметрическими уравнениями***:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t,\ t \in \mathrm{R}, \end{cases} \tag{12.1}$$

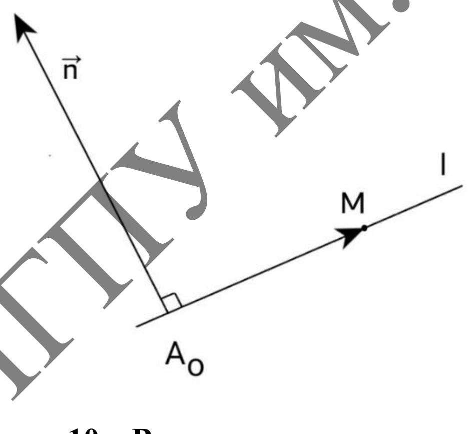

Рисунок 10 – Вектор нормали прямой

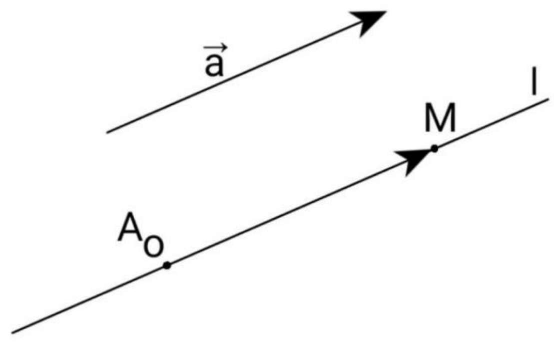

Рисунок 11 – Направляющий вектор прямой

Теорема 12.2. Прямая, проходящая через две точки $A_o(x_o, y_o)$ и $A_1(x_1, y_1)$, задается уравнением

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o}, \tag{12.3}$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

Теорема 12.3. Прямая, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$ *и* имеющая вектор нормали $\vec{n}(A, B)$, задается в декартовой системе координат уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (12.4)$$

Теорема 12.4. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \qquad (12.5)$$

которое называется ***общим уравнением прямой***. И обратно, любое уравнение вида (12.5) на плоскости задает прямую.

Геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении прямой: это координаты вектора нормали к прямой: $\vec{n}(A, B)$.

Рассмотрим различные ***частные случаи общего уравнения прямой***.

1. $C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l\colon\ Ax + By = 0$. Тогда уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0, 0)$, т.е. прямая проходит через начало координат.

2. $A = 0 \Leftrightarrow By + C = 0 \Leftrightarrow y = -C/B$. Прямая $l \| Ox$.

3. $B = 0 \Leftrightarrow Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -C/A$. Прямая $l \| Oy$.

4. $B \neq 0$, тогда (12.5) можно переписать так: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$.

Обозначим $k = -A/B$, $q = -C/B$ и получим уравнение

$$y = kx + q, \qquad (12.6)$$

которое называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***. ***Угловым*** называется ***коэффициент*** k.

Теорема 12.5. Прямая, отсекающая на координатных осях отрезки длины $a \neq 0$, $b \neq 0$, задается уравнением (***уравнение прямой в отрезках***)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (12.7)$$

Основные виды уравнений прямой в пространстве

Теорема 12.6.

1. Прямая l, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, задается уравнением

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, \qquad (12.9)$$

(***каноническое уравнение***), или ***параметрическими уравнениями***

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases} \qquad (12.10)$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

которые можно записать в векторном виде: $\vec{r} = \vec{r_o} + t\vec{a},\ t \in R$,
где $\vec{r_o} = \overrightarrow{OA_o}$ – радиус-вектор точки A_o.

2. Прямая, проходящая через две точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и $A_1(x_1, y_1, z_1)$, задается уравнением

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}, \qquad (12.11)$$

3. Прямая, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o, z_o)$ перпендикулярно двум векторам нормали $\vec{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n_2}(A_2, B_2, C_2)$

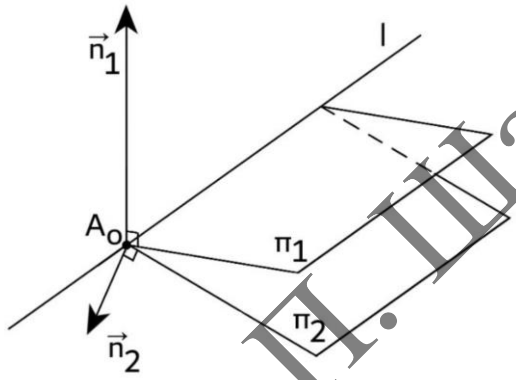

Рисунок 12 – Прямая, проходящая перпендикулярно двум векторам нормали

задается в декартовой системе координат уравнений

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0. \end{cases} \qquad (12.12)$$

13. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Теорема 13.1.

1. Плоскость π, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$, задается в декартовой системе координат уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (13.1)$$

2. Плоскость π, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задается уравнением

МГПУ им. И. П. Шамякина

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.2)$$

3. Плоскость π, проходящая через три точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой задается уравнением (рисунок 13).

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.3)$$

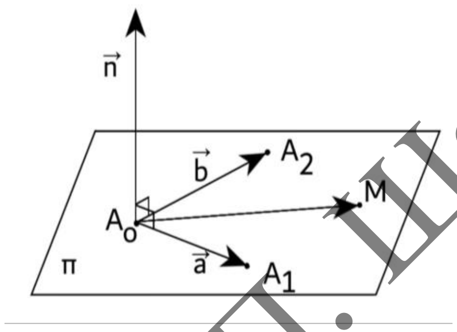

Рисунок 13 – Прямая, проходящая через три точки

4. Плоскость π, отсекающая на координатных осях ненулевые отрезки a, b, c, задается уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (13.4)$$

(предполагается, что a, b, с могут быть отрицательными).

Следствие. Любая плоскость определяется уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (13.5)$$

которое называется ***общим уравнением плоскости***. И обратно, всякое уравнение вида (13.5) определяет плоскость.

Рассмотрим различные ***частные случаи плоскостей***, задаваемых уравнениями вида (13.5).

1. $D = 0$. Тогда уравнению

$$Ax + By + Cz = 0$$

удовлетворяют координаты точки О (0, 0, 0).

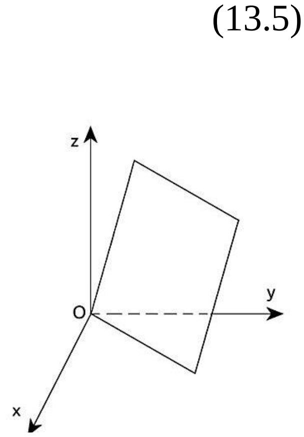

Рисунок 14 – Плоскость проходит через начало координат

МГПУ им. И. П. Шамякина

Плоскость проходит через начало координат (рисунок 14).

2. $C = 0$. Имеем уравнение

$$Ax + By + D = 0.$$

Тогда вектор нормали к плоскости $\vec{n}(A, B, 0)$ и $\vec{n} \perp Oz$, а значит, $\pi || Oz$ (рисунок 15).

Аналогично, при $B = 0$ получим Oy, а при $A = 0$ – $\pi || Ox$.

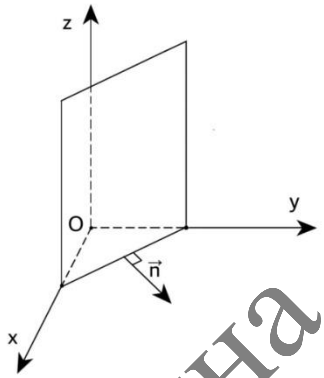

Рисунок 15 – Плоскость параллельна одной из осей координат

3. $A = B = 0$. Имеем уравнение

$$Cz + D = 0,$$

которое равносильно $z = -\frac{D}{C}$. Тогда $\pi \perp Oz$ (рисунок 16).

Аналогично, при $A = C = 0$ будет $\pi \perp Oy$, а при $B = C = 0$ – $\pi \perp Ox$.

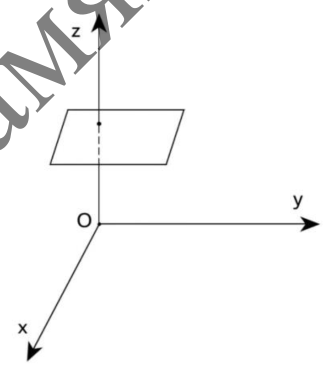

Рисунок 16 – Плоскость перпендикулярна одной из осей

Расстояние от точки до прямой на плоскости и плоскостей в пространстве

Определение 13.1. Говорим, что общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{13.7}$$

имеет нормальную форму, если $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Это равносильно тому, что вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – единичный.

Если уравнение (13.7) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\mu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Тогда будет выполнено $(A/\mu)^2 + (B/\mu)^2 + (C/\mu)^2 = 1$.

Теорема 13.2. Пусть плоскость π определяется уравнением (13.7) в нормальной форме. Тогда расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости вычисляется по формуле

$$h = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|. \tag{13.8}$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

Следствие. Если плоскость определяется произвольным уравнением вида (13.7), то

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (13.9)$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости в пространстве заданы общими уравнениями:

$$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – это векторы нормали к π_1 и π_2.

Теорема 13.3.

1. $\pi_1 || \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
2. $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
3. $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.
4. угол между π_1 и π_2 вычисляется по формуле

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть плоскость π задана общим уравнением, а прямая l – каноническим уравнением:

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0, \qquad l: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Тогда сразу можем отметить, что $\vec{n}(A, B, C)$ – это вектор нормали к плоскости π, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой l и точка $A_0(x_0, y_0, z_0) \in l$.

Для удобства изложения в этом параграфе будем считать, что $l \in \pi$ – это частный случай $l || \pi$.

Теорема 13.4.

1. $l \in \pi \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$

2. $l \parallel \pi$ и $l \notin \pi \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$

3. $l \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$.

МГПУ им. И.П. Шамякина

4. Угол между плоскостями l и π вычисляется по формуле

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\ \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

14. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипс

Определение 14.1. ***Эллипсом*** называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение эллипса, обозначим через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. Пусть F_1, F_2 – ***фокусы эллипса.*** Выберем систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через точки F_1, F_2, а начало координат находилось на середине отрезка F_1F_2. Тогда очевидно, что $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Определение 14.2. ***Фокальными радиусами точки*** *M(x, y)* эллипса называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Теорема 14.1. Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала эллипсу, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Теорема 14.2. Если координаты точки $\mathrm{M}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, то эта точка принадлежит некоторому эллипсу.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Определение 14.3. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (14.1)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$ называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Свойство 14.1. Координатные оси являются осями симметрии эллипса. Начало координат является центром симметрии эллипса.

Пусть $M(x_0, y_0)$ – некоторая точка эллипса. Поскольку в уравнении эллипса все неизвестные возведены в квадрат, то эллипсу принадлежат так

МГПУ им. И. П. Шамякина

же: точка $M_1(-x_0, y_0)$, симметричная относительно оси ординат; точка $M_2(x_0, -y_0)$, симметричная относительно оси абсцисс; точка $M_3(-x_0, -y_0)$, симметричная относительно начала координат.

Свойство 14.2. Эллипс пересекает координатные оси в точках

$$A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b).$$

Поскольку точки A_1, A_2 принадлежат оси абсцисс, а точки B_1, B_2 – оси ординат, то достаточно просто подставить их координаты в уравнения эллипса.

Свойство 14.3. Для любой точки эллипса $M(x, y)$ выполняются соотношения: $-a \le x \le a, -b \le y \le b$.

Свойство 14.4. Для любых точек эллипса, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината убывает.

Это следует из того, что

$$y_1{}^2 = b^2\left(1 - \frac{x_1{}^2}{a^2}\right).$$

Определение 14.4. Отрезок $A_1 A_2$ и его длина $2a$ называется ***большей осью***, а отрезок OA_2 и его длина a называется ***большей полуосью***.

Определение 14.5. Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называется ***меньшей осью***, а отрезок OB_2 и его длина b называется ***меньшей полуосью***.

Определение 14.6. Отрезок F_1F_2 и его длина $2c$ называется ***фокусным расстоянием***.

Определение 14.7. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$ называются ***вершинами эллипса***.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим эллипс (рисунок 17).

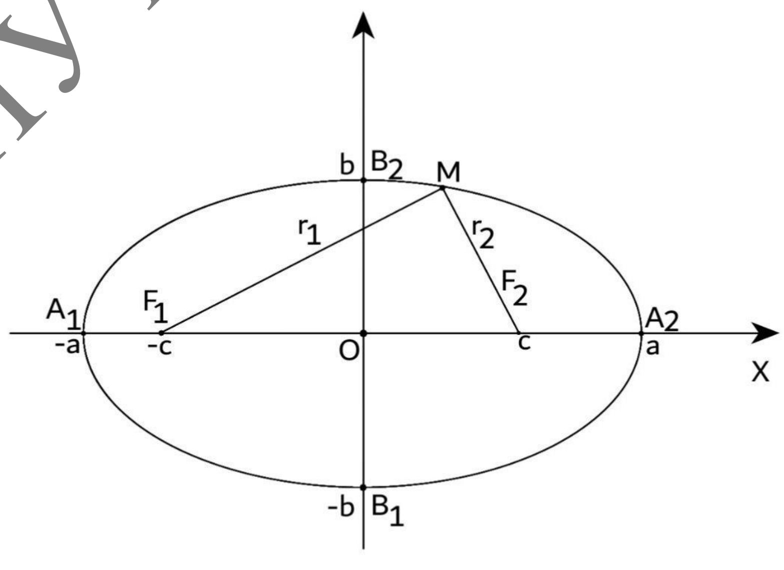

Рисунок 17 – Эллипс

МГПУ им. И. П. Шамякина

Гипербола

Определение 14.8. ***Гиперболой*** называется множество точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение гиперболы обозначим через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. Пусть F_1, F_2 – ***фокусы***. Систему координат выберем таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы, а начало координат находилось на середине отрезка F_1F_2. Очевидно, что $F_1\ (-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть M – произвольная точка гиперболы. Из определения следует, что $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Определение 14.9. ***Фокальными радиусами точки*** $M(x, y)$ гиперболы называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Теорема 14.3. Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала гиперболе, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{14.2}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Теорема 14.4. Если координаты точки $M(x_1, y_1)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, то эта точка принадлежит некоторой гиперболе.

Определение 14.10. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ ,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ называется ***каноническим уравнением гиперболы***.

Свойство 14.5. Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Начало координат является центром симметрии гиперболы.

Свойство 14.6. Гипербола пересекает координатную ось OX *в* точках $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ и не пересекает ось OY.

Свойство 14.7. Для любой точки гиперболы $M(x, y)$ выполняется: $|x| \geq a$. Из уравнения гиперболы:

$$x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Отсюда $x^2 \geq a^2$ и поэтому $|x| \geq a$.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Свойство 14.8. Для любых точек гиперболы, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы их ордината возрастает. Из уравнения гиперболы получаем: $y^2 = -b^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2$. Поэтому, чем больше значение x, тем больше значение y.

Определение 14.11. Отрезок $A_1 A_2$ и его длина $2a$ называется ***действительной осью***, а отрезок OA_2 и его длина a называется ***действительной полуосью***.

Определение 14.12. Отрезок $B_1 B_2$ и его длина $2b$ называется ***мнимой осью***, а отрезок OB_2 и его длина b называется ***мнимой полуосью***.

Определение 14.13. Отрезок $\mathrm{F}_1 \mathrm{F}_2$ и его длина 2c называется ***фокусным расстоянием***.

Определение 14.14. Точки $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ называются ***вершинами гиперболы***.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим гиперболу (рисунок 18).

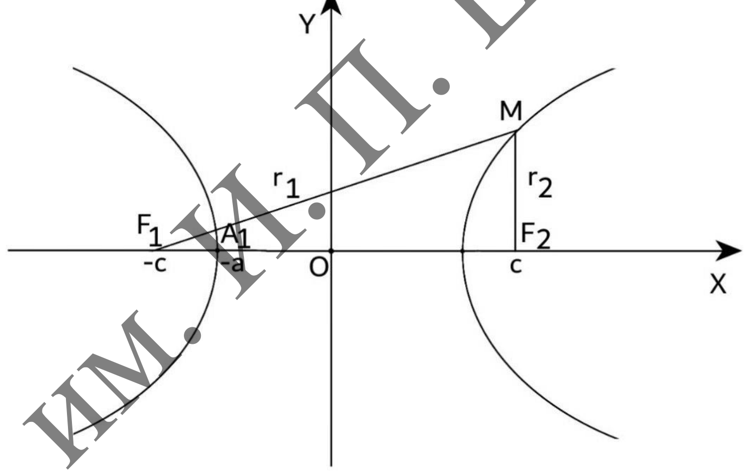

Рисунок 18 – Гипербола

Парабола

Определение 14.15. ***Параболой*** называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой ***директрисой***.

Обозначим фокус параболы через F, а директрису – через d. Систему координат выберем таким образом, чтобы фокус лежал на положительном направлении оси абсцисс, директриса была параллельна оси ординат и начало координат находилось посередине между фокусом и директрисой. Расстояние между фокусом и директрисой обозначим через p. Тогда очевидно, что $F(\frac{p}{2}, 0)$ и директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

МГПУ им. И.П. Шамякина

Теорема 14.5. Для того чтобы точка M принадлежала параболе, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$y^2 = 2px, \tag{14.3}$$

где p – некоторое действительное положительное число.

Теорема 14.6. Если координаты некоторой точки M удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где p – некоторое действительное положительное число, то эта точка принадлежит некоторой параболе.

Определение 14.16. Уравнение

$$y^2 = 2px,$$

где p – некоторое действительное положительное число называется ***каноническим уравнением параболы***.

Свойство 14.9. Абсцисса любой точки параболы неотрицательна.

Свойство 14.10. Парабола проходит через начало координат.

Свойство 14.11. Парабола симметрична относительно оси абсцисс.

Определение 14.17. Отрезок FM называется фокальным радиусом, а величина p – параметром параболы.

Определение 14.18. Ось абсцисс называется ***осью симметрии параболы***, а точка пересечения параболы с осью абсцисс, которая совпадает с началом координат, – ***вершиной параболы***.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим параболу (рисунок 19).

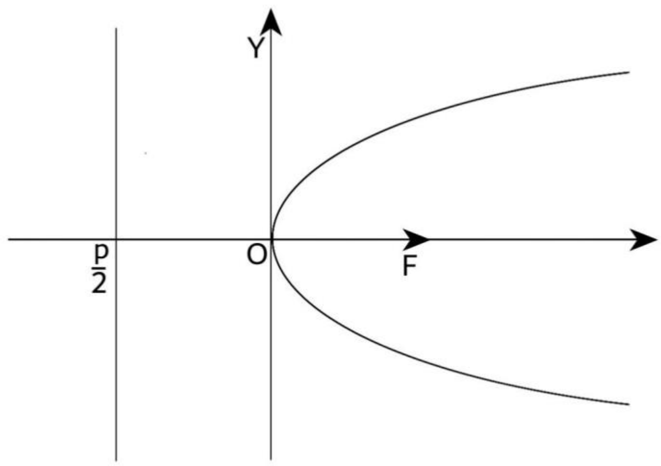

Рисунок 19 – Парабола

МГПУ им. И. П. Шамякина

15. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Под V мы будем понимать ниже векторное пространство над числовым полем P.

Определение 15.1. Говорят, что в векторном пространстве V задан ***оператор***, если указано правило (закон), согласно которому, всякому вектору пространства V ставится в соответствие другой, причем единственный, вектор того же пространства.

Как следует из определения, оператор пространства есть функция, область определения которой совпадает с V, а область значения – подмножество из V. Операторы пространства называют также преобразованиями этого пространства. В дальнейшем операторы пространства будем обозначать символами φ, ψ, τ…

Если оператор φ пространства V вектору $\vec{a}$ ставит в соответствие вектор $\vec{b}$, то будем писать $\varphi(\vec{a}) = \vec{b}$. При этом $\vec{b}$ будем называть образом вектора $\vec{a}$, а вектор $\vec{a}$ – прообразом вектора $\vec{b}$ при действии оператора φ.

Определение 15.2. Оператор φ пространства V называется ***линейным оператором*** этого пространства, если выполняются следующие два условия:

$$1)\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V \ \big|\ \varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}),$$
$$2)\ \forall \vec{a} \in V, \forall \alpha \in P \ \big|\ \varphi(\alpha\vec{a}) = \alpha\varphi(\vec{a}).$$

Условия 1 и 2 приведенного определения равносильны одному следующему:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \alpha, \beta \in P \ \big|\ \varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{b}).$$

Приведем примеры линейных операторов пространств.

Пример 15.1. Поставим в соответствие каждому вектору $\vec{a}$ пространства V нулевой вектор 0 этого пространства. Тем самым мы зададим оператор пространства, который обозначим через θ. Этот оператор является линейным оператором пространства V. Действительно:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \alpha, \beta \in P \ \big|\ \varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = 0$$
$$\alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{b}) = \alpha 0 - \beta 0 = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{b}).$$

Оператор θ, который каждый вектор пространства V переводит в нулевой вектор 0, называется нулевым оператором пространства V.

Пример 15.2. Поставим в соответствие всякому вектору $\vec{a}$ пространства V этот же вектор $\vec{a}$. Заданный оператор φ является линейным оператором пространства, так как

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \alpha, \beta \in P \ \big|\ \varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{b}).$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

Оператор пространства V, который всякий вектор пространства оставляет на месте, называется единичным или тождественным оператором и обозначается символом ε.

Пример 15.3. Пусть φ – оператор ортогонального проектирования пространства W_3 свободных векторов на плоскость XOY. Известно, что проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов и проекция произведения вектора на число равна произведению проекции этого вектора на число. Это значит, что для оператора φ в данном случае выполняются условия 1 и 2 из определения 2. Следовательно, φ является линейным оператором пространства W_3.

Пример 15.4. Пусть $R[x]$ – множество многочленов с действительными коэффициентами степени не больше натурального числа n. Как известно, это множество образует векторное пространство над полем действительных чисел R размерности $n+1$, относительно операций сложения многочленов и умножения многочленов на действительные числа. Пусть φ – оператор пространства $R(x)$, который всякому многочлену $f(x)$ ставит в соответствие производную этого многочлена (оператор дифференцирования), т. е. $\varphi(f(x)) = f'(x)$. Этот оператор является линейным оператором пространства $R(x)$, так как

$$1)\ \forall f(x), g(x) \in R(x) \,\big|\, \varphi\big(f(x) + g(x)\big) = \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x) = \varphi\big(f(x)\big) + \varphi\big(g(x)\big).$$

$$2)\ \forall f(x) \in R(x), \forall \alpha \in P \,\big|\, \varphi\big(\alpha f(x)\big) = \big(\alpha f(x)\big)' = \alpha f'(x) = \alpha\varphi\big(f(x)\big).$$

Приведем свойства линейных операторов пространства.

Свойство 15.1. При действии линейного оператора φ пространства V нулевой вектор 0 отображается в себя, т. е. $\varphi(0) = 0$.

Свойство 15.2. При действии линейного оператора φ пространства V образ вектора противоположного вектору $\vec{a}$ равен противоположному образа этого вектора, т. е.

$$\forall \vec{a} \in V \,\big|\, \varphi(-\vec{a}) = -\varphi\vec{a}.$$

Свойство 15.3. При действии линейного оператора φ пространства V всякая линейная комбинация векторов из V отображается в линейную комбинацию образов этих векторов с теми же коэффициентами, т. е.

$$\forall \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k} \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in P$$
$$\varphi(\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k\overrightarrow{a_k}) = \alpha_1\varphi(\overrightarrow{a_1}) + \alpha_2\varphi(\overrightarrow{a_2}) + \dots + \alpha_k\varphi(\overrightarrow{a_k}).$$

Под V_n ниже мы будем понимать n-мерное векторное пространство над полем P.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Задать линейный оператор пространства – это значит указать при необходимости образ любого вектора пространства при действии этого оператора. Оказывается, чтобы найти образ любого вектора пространства, достаточно знать образы векторов произвольного базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ пространства V_n при действии оператора φ.

Теорема 15.1. Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – базис пространства V_n. Какова бы ни была система векторов $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$, существует, причем единственный, линейный оператор φ пространства V_n, такой, что

$$\varphi(\overrightarrow{a_1}) = \overrightarrow{b_1}; \varphi(\overrightarrow{a_2}) = \overrightarrow{b_2}; \dots; \varphi(\overrightarrow{a_n}) = \overrightarrow{b_n}.$$

Следствие. Всякий линейный оператор φ пространства V_n вполне определяется отображением произвольного, но фиксированного базиса пространства, т. е. зная образы векторов фиксированного базиса можно указать образ любого вектора пространства при действии оператора φ.

Матрица линейного оператора

Пусть φ — линейный оператор пространства V_n и $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – базис этого пространства. Разложим образы $\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \dots, \varphi(\overrightarrow{e_n})$ по векторам заданного базиса:

$$\begin{aligned} \varphi(\overrightarrow{e_1}) &= a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + \dots + a_{n1}\overrightarrow{e_n} \\ \varphi(\overrightarrow{e_2}) &= a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + \dots + a_{n2}\overrightarrow{e_n} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\overrightarrow{e_n}) &= a_{1n}\overrightarrow{e_1} + a_{2n}\overrightarrow{e_2} + \dots + a_{nn}\overrightarrow{e_n}. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Из координат полученных разложений составим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица A называется ***матрицей оператора φ в базисе*** $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$. Столбцы матрицы представляют собой координатные столбцы образов базисных векторов в этом же базисе. Так как координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно, то каждому линейному оператору φ пространства V_n однозначно соответствует матрица этого оператора в заданном базисе.

Обратно. Всякая квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n над полем P равенствами системы (1) однозначно определяет образы векторов базиса, и, следовательно, согласно теореме о единственности линейного оператора

МГПУ им. И. П. Шамякина

однозначно задает некоторый линейный оператор φ пространства V_n. Таким образом, между множеством линейных операторов пространства V_n и множеством квадратных матриц порядка n над полем P можно установить взаимно однозначное соответствие.

Пусть φ – линейный оператор пространства V_n, который в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, как связаны между собой вектора $\vec{a}$ и $\varphi(a)$. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\varphi(a)$ имеют следующие разложения по векторам базиса

$$\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n} \tag{15.2}$$

$$\varphi(a) = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \dots + y_n\overrightarrow{e_n}\,. \tag{15.3}$$

Подействуем оператором φ на обе части равенства (15.1)

$$\varphi(\vec{a}) = x_1\varphi(\overrightarrow{e_1}) + x_2\varphi(\overrightarrow{e_2}) + \dots + x_n\varphi(\overrightarrow{e_n}). \tag{15.4}$$

Получим

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{15.5}$$

Система (15.5) выражает связь между векторами $\vec{a}$ и $\varphi(a)$. В матричной форме это запишется

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{или } [\varphi(\vec{a})] = A[\vec{a}], \tag{15.6}$$

где $[\varphi(a)]$ и $[\vec{a}]$ – координатные столбцы векторов $\varphi(a)$ и $\vec{a}$.

Матрица перехода от одного базиса пространства к другому

Пусть даны два базиса пространства V_n.

$$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n} \tag{15.7}$$

$$\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n}. \tag{15.8}$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

Разложим векторы базиса (15.8) по векторам базиса (15.7)

$$\begin{gathered}\overrightarrow{f_1} = t_{11}\overrightarrow{e_1} + t_{21}\overrightarrow{e_2} + \ \dots + t_{n1}\overrightarrow{e_n} \\ \overrightarrow{f_2} = t_{12}\overrightarrow{e_1} + t_{22}\overrightarrow{e_2} + \ \dots + t_{n2}\overrightarrow{e_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{f_n} = t_{1n}\overrightarrow{e_1} + t_{2n}\overrightarrow{e_2} + \ \dots + t_{nn}\overrightarrow{e_n}.\end{gathered} \tag{15.9}$$

Из координат полученных разложений составим матрицу

$$T_{ef} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}. \tag{15.10}$$

Полученная матрица называется ***матрицей перехода от базиса*** (15.7) ***к базису*** (15.8). Столбцы матрицы T_{ef} представляют собой координатные столбцы векторов базиса (15.8) в базисе (15.7). Так как всякий базис пространства является линейно независимой системой векторов, то и координатные столбцы векторов базиса линейно независимы. Таким образом, столбцы матрицы T_{ef}, а следовательно, и ее строки линейно независимы. Это значит, что матрица T_{ef} невырожденная. Обратно, всякая невырожденная матрица порядка n над полем P может служить матрицей перехода от одного базиса к некоторому другому базису пространства. Так как T_{ef} – невырожденная матрица, то она обратима, т. е. существует обратная ей матрица T_{ef}^{-1}. Систему (15.9) можно представить в матричной форме следующим образом

$$\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n}\right) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})T_{ef}.$$

Умножив обе части этого равенства справа на T_{ef}^{-1}, получим

$$\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n}\right)T_{ef}^{-1} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}).$$

Откуда следует, что T_{ef}^{-1} является матрицей перехода от базиса (15.8) к базису (15.7).

Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса пространства к другому

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет следующие разложения по векторам базисов (15.7) и (15.8)

$$\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ \dots + x_n\overrightarrow{e_n} \tag{15.11}$$

$$\vec{a} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + \ \dots + y_n\overrightarrow{f_n}. \tag{15.12}$$

МГПУ им. И. П. Шамякина

Координатные столбцы вектора а в базисах (15.7) и (15.8) будем обозначать соответственно через $[\vec{a}]_e$и $[\vec{a}]_f$ т. е.

$$[\vec{a}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [\vec{a}]_f = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 15.2. Координатные столбцы вектора a в базисах (15.7) и (15.8) связаны соотношением

$$[\vec{a}]_e = T_{ef}[\vec{a}]_f. \tag{15.13}$$

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть φ – линейный оператор пространства V_n, который в базисах (15.7) и (15.8) имеет соответственно матрицы A_e и A_f.

Теорема 15.3. Матрицы A_e и A_f оператора φ в базисах (15.7) и (15.8) связаны соотношением

$$A_f = T_{ef}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{ef}, \tag{15.14}$$

где T_{ef} – матрица перехода от базиса (15.7) к базису (15.8).

16. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Изоморфизм линейных пространств

Определение 16.1. Векторные пространства V и V'над одним и тем же полем P называются ***изоморфными***, если между множествами V и V' можно установить такое взаимооднозначное соответствие φ, при котором будут выполняться условия:

1) $\forall\vec{a},\vec{b} \in V \,|\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$;

2) $\forall\vec{a} \in V \,|\varphi(\overline{\alpha\vec{a}}) = \alpha\varphi(\vec{a})$.

Если пространства V и V' изоморфны, то пишут $V \cong V'$. Взаимооднозначное соответствие φ между V и V', удовлетворяющее условиям 1 и 2 приведенного определения, называется ***изоморфизмом пространств*** V и V'.

Приведем ***свойства изоморфизмов пространств***.

Свойство 16.1. При изоморфизме φ пространств Vи V' нулевой вектор пространства V отображается в нулевой вектор пространства V', то есть $\varphi(0) = 0'$.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Свойство 16.2. При изоморфизме φ пространств V и V' всякая линейно независимая система векторов пространства V переходит в линейно независимую систему векторов пространства V'.

Свойство 16.3. $\forall \vec{a} \in V \, | \varphi(-\vec{a}) = -\varphi(\vec{a})$.

Свойство 16.4. При изоморфизме пространств V и V' базис пространства V отображается в базис пространства V'.

Теорема 16.1. Векторные пространства V и V' над одним и тем же полем P изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Согласно приведенной теореме, наиболее существенной характеристикой векторного пространства является его размерность. В частности, все n-мерные векторные пространства над полем P изоморфны арифметическому n-мерному векторному пространству P^n. Это значит, что, изучая пространство P^n, мы можем иметь полную информацию о свойствах других n-мерных векторных пространств над полем P относительно определенных в них операций.

Собственные значения и собственные векторы

Определение 16.2. Ненулевой вектор $\vec{a} \in V_n$ называется ***собственным вектором оператора*** φ, если имеет место равенство $\varphi(\vec{a}) \in \lambda\vec{a}$ при некотором $\lambda \in C$. В этом случае λ называют собственным значением оператора φ, соответствующим собственному вектору a.

Свойства собственных векторов линейных операторов:

1. Всякий собственный вектор a оператора φ соответствует только одному собственному значению.

2. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – собственные векторы оператора φ, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, тогда сумма этих векторов $\vec{a} + \vec{b}$ также является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ.

3. Пусть $\vec{a}$ является собственным вектором оператора φ, соответствующим собственному значению λ, тогда $\forall \alpha \in P, \alpha \neq 0 \; \alpha a$ также является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ.

Следствие. Всякая ненулевая линейная комбинация собственных векторов оператора φ, соответствующих одному и тому же собственному значению λ, также является собственным вектором оператора, соответствующим собственному значению λ.

Теорема 16.2. Собственные векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ (16.1), соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, образуют линейно независимую систему.

Характеристический многочлен линейного оператора

Собственные векторы и собственные значения играют весьма существенную роль при исследовании структуры линейного отображения.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Поэтому естественным является вопрос о способе их нахождения. Такой способ будет указан ниже.

Предположим, что зафиксирован некоторый базис $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ пространства V_n и что отображение φ задано в этом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если, как обычно, координаты вектора $\vec{x}$ обозначить $x_1, x_2, \dots, x_n$, то векторное равенство $\varphi(\vec{a}) = \lambda x$ будет равносильно следующим x соотношениям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + \ a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + \ a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + \ a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \quad (16.2)$$

После приведения подобных членов получаем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + \ a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + \ a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + \ a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \quad (16.3)$$

Рассматривая данную систему равенств как систему из n линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$, мы можем теперь сказать, что координаты любого собственного вектора, отвечающего собственному значению λ, удовлетворяют системе (16.2). Следовательно, для всякого собственного значения λ система (16.2) должна допускать ненулевое решение. Отсюда вытекает, что определитель этой системы должен быть равен нулю. Таким образом, любое собственное значение λ должно удовлетворять условию

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (16.4)$$

Обратно, если какое-то число λ из поля P удовлетворяет этому условию, то это число является собственным значением: действительно, тогда система (16.2) будет иметь ненулевое решение $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. найдется ненулевой вектор $\vec{x}$, такой, что $\varphi(\vec{x}) = \lambda x$.

Раскрывая определитель, стоящий в левой части равенства (3), мы получим, очевидно, многочлен n-й степени относительно λ. Его называют характеристическим многочленом линейного оператора φ, а также матрицы A.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Следовательно, условие (16.3) представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени относительно λ. Это уравнение называется ***характеристическим уравнением матрицы*** $\boldsymbol{A}$.

Итак, собственными значениями отображения φ являются те и только те числа λ из поля P, которые служат корнями характеристического уравнения (16.3). Для любого собственного значения λ соответствующие ему собственные векторы $\vec{x}$ составляют множество всех ненулевых решений системы (16.2).

Возвращаясь к характеристическому уравнению (16.3), заметим, что определитель в левой части (16.3) является определителем матрицы $A - \lambda E$, где E – единичная матрица порядка n. Поэтому характеристическое уравнение можно представить в следующей матричной записи:

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad (16.5)$$

Пользуясь формой (16.4) характеристического уравнения, легко доказать следующее предложение: если матрицы A и A' подобны, то их характеристические уравнения совпадают. Действительно, по определению подобия матриц, найдется такая невырожденная матрица T, что $A' = T^{-1}AT$. Отсюда получаем

$$|A' - \lambda E| = |T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda E)T| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| =$$
$$= |T^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T| = |A - \lambda E|.$$

Мы воспользовались в процессе преобразований теоремой об определителе произведения нескольких матриц, из которой, в частности, следует, что

$$|T^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T| = |E| = 1.$$

Так как при переходе от данного базиса к другому матрица отображения задается подобной матрицей, то из только что доказанного предложения вытекает, что характеристическое уравнение матрицы линейного отображения не меняется при переходе к новому базису. В связи с этим мы можем просто говорить о характеристическом уравнении отображения, не указывая конкретно матрицы, которой это отображение задается в том или ином базисе.

Линейные операторы с простым спектром

Линейное отображение может быть задано разными способами. Одна из возможных форм задания – с помощью матрицы, отвечающей отображению в том или другом базисе. Все свойства отображения можно в принципе «извлечь» из его матрицы. Естественно ожидать, что, чем проще матрица данного отображения, тем легче изучать свойства этого отображения.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Один из наиболее простых классов матриц составляют так называемые диагональные матрицы, т. е. квадратные матрицы вида:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

Представляет интерес следующая задача: охарактеризовать линейные отображения, матрицы которых при некотором выборе базиса являются диагональными. Относительно таких отображений принято говорить, что их матрицы приводятся к диагональной форме. В этом пункте мы выясним, при каких условиях матрица отображения приводится к диагональной форме.

Пусть отображение φ имеет в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots., \overrightarrow{a_n}$ диагональную матрицу (16.6). По определению матрицы отображения имеем

$$(\varphi(a_1)\ \varphi(a_2)\ \ \dots.\varphi(a_n)) = (a_1, a_2, \dots., a_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}, \tag{16.7}$$

что равносильно равенствам:

$$\varphi(a_1) = \lambda_1 a_1, \varphi(a_2) = \lambda_2 a_2, \dots, \varphi(a_n) = \lambda_n a_n. \tag{16.8}$$

Но равенства (16.8) означают, что базис $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots., \overrightarrow{a_n}$ состоит из собственных векторов отображения φ.

Обратно, если какой-либо базис $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots., \overrightarrow{a_n}$ состоит из собственных векторов отображения φ, то выполняются равенства (16.8), а значит, и равенство (16.7). Следовательно, матрица отображения φ в этом базисе диагональная.

Итак, матрица отображения φ в некотором базисе тогда и только тогда является диагональной, когда этот базис состоит из собственных векторов отображения φ.

Определение 16.3. Линейный оператор φ векторного пространства V_n над полем P называется ***оператором с простым спектром***, если он имеет n попарно различных собственных значений; набор всех собственных значений оператора называется ***спектром оператора***.

Теорема 16.3. Если φ – оператор с простым спектром пространства V_n, то существует базис пространства, составленный из собственных векторов оператора. В этом базисе матрица оператора φ имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора φ.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Определение 16.4. Говорят, что квадратная матрица A над полем P приводится к диагональному виду, если она подобна некоторой диагональной матрице над этим полем.

Теорема 16.4. Квадратная матрица A порядка n над полем P тогда и только тогда приводится к диагональному виду, когда существует базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ пространства V_n, составленный из собственных векторов матрицы A.

Теорема 16.5. Если матрица A порядка n над полем P имеет n попарно различных собственных значений, то она приводится к диагональному виду.

17. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Мы будем рассматривать действительные векторные пространства, т. е. пространства над полем действительных чисел R. В действительном векторном пространстве аксиоматически вводится понятие скалярного произведения векторов, которое, в свою очередь, дает возможность определить понятия длины вектора и угла между векторами. В качестве аксиом скалярного произведения векторов выступают известные свойства скалярного произведения геометрических векторов.

Определение 17.1. Действительное векторное пространства E называется ***евклидовым***, если всякой паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из Е поставлено в соответствие действительное число $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, называемое ***скалярным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и при этом выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

1) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in E \ \middle|\ \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = (\vec{b}, \vec{a})$;

2) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in E, \forall \alpha \in R \ \middle|\ \left(\alpha\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$;

3) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E \ \middle|\ \left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

4) $\forall \vec{a} \in E \ \middle|\ \vec{a} \neq 0 \ \Rightarrow (\vec{a}, \vec{a}) > 0$.

Евклидово пространство размерности n будем обозначать символом E_n.

Приведем простейшие ***свойства скалярного произведения векторов***, вытекающие из определения.

Свойство 17.1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in E, \forall \alpha, \beta \in R \ \middle|\ \left(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right) = \alpha\beta(\vec{a}, \vec{b})$.

Свойство 17.2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E \ \middle|\ \left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + (\vec{a}, \vec{c})$.

Свойство 17.3. $\forall \vec{a} \in E \ \middle|\ (0, \vec{a}) = 0$. В частности $(0, 0) = 0$.

Пример 17.1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства W_3 свободных векторов, определенное как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними, очевидно, удовлетворяет условиям 1–4 приведенного выше определения. Поэтому пространство W_3 является евклидовым пространством в смысле этого определения.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Пример 17.2. В арифметическом n-мерном векторном пространстве R^nскалярное произведение векторов

$$\vec{a} = \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots, \overrightarrow{\alpha_n} \text{ и } \vec{b} = \overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \dots, \overrightarrow{\beta_n}$$

определим как сумму произведений соответствующих координат этих векторов, т. е. $(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$. Можно убедиться, что введенное таким образом понятие скалярного произведения в пространстве R^n удовлетворяет условиям 1–4 определения, приведенного выше. Поэтому при введении этого понятия пространство R^n становится евклидовым пространством размерности n.

Используя понятие скалярного произведения векторов, введем далее в евклидовом пространстве E понятия длины вектора и угла между векторами.

Определение 17.2. ***Длиной вектора*** $\vec{a}$ пространства E называется неотрицательное значение квадратного корня из числа $(\vec{a}, \vec{a})$.

Длина вектора $\vec{a}$обозначается символом $|\vec{a}|$.Таким образом, согласно определению, $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

Так как согласно аксиоме 4 и свойству 17.3 для всякого вектора $\vec{a}$ из E выполняется условие $(\vec{a}, \vec{a}) \leq 0$, то приведенное определение длины вектора является корректным.

Приведем ***свойства длины вектора***.

Свойство 17.4. $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Свойство 17.5. $\forall \vec{a} \in E, \forall \alpha \in R \,\Big|\, |\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

Теорема 17.1 (неравенство Коши-Буняковского).

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in E \,\Big|\, \left|(\vec{a}, \vec{b})\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|.$$

Определение 17.3. Углом между векторами $\vec{a} \neq 0$ и $\overrightarrow{b} \neq 0$ евклидова пространства E называется число φ такое, что $\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Так как из теоремы 17.1 следуют неравенства $-1 \leq \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1$ для любых ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ b, то угол между ними всегда определен.

Ортогональные векторы. Процесс ортогонализации

Определение 17.4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства E, называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$.

Очевидно, что ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тогда и только тогда ортогональны, когда угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Нулевой вектор $\vec{0}$ всегда ортогонален к любому вектору пространства E.

МГПУ им. И. П. Шамякина

Теорема 17.2. Пусть вектор $\vec{a}$ ортогонален к каждому из векторов $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}$. Тогда $\vec{a}$ ортогонален к любой линейной комбинации этих векторов.

Определение 17.5. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ пространства E называется ***ортогональной***, если любые два вектора этой системы ортогональны.

Теорема 17.3. Всякая ортогональная система $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ ненулевых векторов линейно независима.

Следствие. Всякая ортогональная система из n ненулевых векторов пространства E_n образует базис этого пространства.

Определение 17.6. Ортогональная система векторов образующая базис пространства E_n называется ***ортогональным базисом этого пространства***.

Предварительно опишем способ построения исходя из заданной системы векторов

$$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k} \tag{17.3}$$

соответствующей ей ортогональной системе ненулевых векторов

$$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}. \tag{17.4}$$

Этот способ называют процессом ортогонализации.

Примем $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$. Вектор $\overrightarrow{b_2}$ будем искать в виде $\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} - \lambda\overrightarrow{a_1}$, где число λ определим исходя из условия ортогональности векторов $\overrightarrow{b_1}$ и $\overrightarrow{b_2}$.

$$\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right) = \left(\overrightarrow{a_2} - \lambda\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{a_1}\right) = (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}) - \lambda(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1}) = 0.$$

Откуда

$$\lambda = \frac{(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1})}{(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_1})}.$$

Построенный вектор $\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} - \lambda\overrightarrow{a_1}$ ненулевой, в противном случае векторы $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ были бы линейно зависимы, а следовательно, была линейно зависима и система (17.3), что противоречит выбору.

Пусть уже построена ортогональная система из m $(m < k)$ ненулевых векторов

$$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}.$$

Следующий вектор b_{m+1} ищем в виде

$$\overrightarrow{b_{m+1}} = \overrightarrow{a_{m+1}} - \lambda_1\overrightarrow{b_1} - \lambda_2\overrightarrow{b_2} - \dots - \lambda_m\overrightarrow{b_m} \tag{17.5}$$

МГПУ им. И.П. Шамякина

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ находим из условия ортогональности вектора $\overrightarrow{b_{m+1}}$ к векторам $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}$

$$\lambda_1 = \frac{(\overrightarrow{a_{m+1}}, \overrightarrow{b_1})}{(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1})}; \qquad \lambda_2 = \frac{(\overrightarrow{a_{m+1}}, \overrightarrow{b_2})}{(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_2})}; \qquad \dots; \qquad \lambda_m = \frac{(\overrightarrow{a_{m+1}}, \overrightarrow{b_m})}{(\overrightarrow{b_m}, \overrightarrow{b_m})}.$$

Построенный таким образом вектор $\overrightarrow{b_{m+1}}$ является ненулевым, в противном случае, из равенства (17.5) следовало бы, что вектор $\overrightarrow{a_{m+1}}$ линейно выражается через векторы $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}$, а следовательно, и через векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$, что невозможно.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не найдем последний ненулевой вектор

$$\overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{a_k} - \gamma_1 \overrightarrow{b_1} - \gamma_2 \overrightarrow{b_2} - \dots - \gamma_{k-1} \overrightarrow{b_{k-1}},$$

где $\gamma_1 = \frac{(\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1})}{(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1})}$, $\gamma_2 = \frac{(\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_2})}{(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_2})}$, ..., $\gamma_{k-1} = \frac{(\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_{k-1}})}{(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_{k-1}})}$.

В результате получим ортогональную систему ненулевых векторов

$$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}.$$

Теорема 17.4. Всякое евклидово пространство E_n обладает ортогональным базисом.

Определение 17.7. Вектор $\vec{a}$ пространства E_n называется ***нормированным*** или ***ортом***, если его длина равна единице.

Для всякого ненулевого вектора $\vec{a}$ пространства E_n существует коллинеарный ему нормированный вектор, и именно вектор $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Определение 17.8. ***Ортонормированным базисом пространства*** E_n называется ортогональный базис этого пространства, состоящий из нормированных векторов.

Очевидно, что всякое евклидово пространство E_n обладает ортонормированным базисом.

Теорема 17.5. Базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ пространства E_n тогда и только тогда является ортонормированным, когда скалярное произведение любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in E_n$ равно сумме произведений соответствующих координат векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в этом базисе.

МГПУ им. И. П. Шамякина

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аниськов, В.В. Аналитическая геометрия: практическое пособие для студентов 1 курса специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». В 3 частях. Ч. 1. Векторы. Линии и поверхности первого порядка / В.В. Аниськов. – Мин-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. 2007. – Ч. 1. – 87 с.

2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

3. Березкина, Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Л.Л. Березкина. – Минск : РИВШ, 2012. – 354 с.

4. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 223 с.

5. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

6. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры / А.И. Кострикин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. – Ч. 1. – 272 с.

7. Куликов, Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, А.А. Фомин. – М. : Просвещение, 1993. – 228 с.

8. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М. : Лань, 2021. – 432 с.

9. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Минск : Амалфея, 2001. – Ч. 1. – 400 с., Ч. 2. – 352 с.

10. Подоксенов, М.Н. Аналитическая геометрия : курс лекций с примерами решения задач / М.Н. Подоксенов. – Витебск : Издательство ВГУ, 2006. – 140 с.

11. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М. : Наука, 1978. – 384 с.

12. Размыслович, Г.П. Сборник задач по геометрии и алгебре / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. – Минск : Изд-во “Універсітэцкае”, 1999. – 393 с.

13. Умнов, А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / А.Е. Умнов. – М. : МФТИ, 2011. – 570 с.

14. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – СПб. : Лань, 2001. – 288 с.

15. Шмигирев, Э.Ф. Линейные операторы векторных пространств / Э.Ф. Шмигирев, В.А. Сорочик. – Мозырь : МозГПИ им. Н.К. Крупской, 1999. – 60 с.

16. Шмигирев, Э.Ф. Линейная алгебра. Краткий курс лекций / Э.Ф. Шмигирев, А.Э. Шмигирев. – Мозырь : УО МГПУ, 2004. – 97 с.

17. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел : учеб. пособие для физико-математических специальностей вузов / Л.Б. Шнеперман. – Минск : Дизайн ПРО, 2000. – 239 с.

МГПУ им. И.П. Шамякина

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

МГПУ им. И. П. Шамякина

МГПУ им. И. П. Шамякина

МГПУ им. И. П. Шамякина

МГПУ им. И. П. Шамякина

МГПУ им. И. П. Шамякина

Справочное издание

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Справочник
для студентов специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика»
специализации 1-31 04 08 03 «Компьютерное моделирование
физических процессов»

Составитель
Ефремова Марина Ивановна

Корректор *Т. И. Татаринова*
Оригинал-макет *Е. В. Северин*
Дизайн обложки *Л. В. Клочкова*

Иллюстративный материал на первой странице обложки заимствован
из общедоступных Интернет-ресурсов, не содержащих ссылок на авторов
этих материалов и ограничения на их заимствование.

Подписано в печать 01.12.2022. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 3,84. Уч.-изд. л. 4,1. Тираж 74 экз. Заказ 36.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Мозырский государственный
педагогический университет имени И. П. Шамякина».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий N 1/306 от 22 апреля 2014 г.
Ул. Студенческая, 28, 247777, Мозырь, Гомельская обл.
Тел. (0236) 24-61-29.

МГПУ им. И. П. Шамякина