Л. И. СОЙКИНА
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

О ДВИЖЕНИИ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если внешние поля не зависят от времени, то основной задачей квантовой механики является задача нахождения стационарных состояний системы. В этом случае произвольное состояние $\psi(x,t)$ может быть представлено как суперпозиция стационарных состояний с амплитудами c_n :

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x,t), \psi_n(x,t) = e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x),$$

где $\psi_n(x)$ – волновые функции стационарных состояний, а E_n – соответствующие значения энергии. Волновые функции $\psi_n(x)$ – это собственные функции оператора энергии $\hat{H}$. Они определяются из стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

Задача о нахождении стационарных состояний есть вместе с тем задача о нахождении спектра энергии системы. Особое значение этой задачи для квантовой механики заключается в том, что в противоположность классической механике квантовая механика приводит во многих случаях к квантованию энергии, т. е. к дискретному спектру ее значений $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ Эти значения называют квантовыми уровнями энергии.

В работе будет рассмотрено движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Удобно использовать цилиндрическую систему координат

$$dS^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 \, d\phi^2 + dz^2) . \tag{1}$$

Воспользуемся известным представлением для векторного потенциала постоянного магнитного поля [1] в плоском пространстве:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}, \mathbf{B} = (0, 0, B), \, A^a = \frac{Br}{2} (0; -\sin\phi, \cos\phi, 0); \tag{2a}$$

после пересчета к цилиндрическим координатам получаем

$$A_t = 0, \qquad A_r = \frac{\partial x^1}{\partial r} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial r} A_2 = 0, \qquad A_z = 0,$$

$$A_\phi = \frac{\partial x^1}{\partial \phi} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \phi} A_2 = -r \sin\phi A_1 + r\cos\phi A_2 = -\frac{Br^2}{2}. \tag{2b}$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора

$$A_\phi = -Br^2 / 2 \qquad \Rightarrow \qquad F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = Br , \tag{3}$$

Уравнение Шредингера в пространстве с метрикой

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{kl}(x) dx^k dx^l , \qquad g = \det(g_{kl}(x))$$

имеет вид:

$$(i\hbar \, \partial_t + e \, A_0) \, \Psi = H \Psi ,$$

$$H = \frac{1}{2M} \left[(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k)(-g^{kl}(x))(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c} A_l) \right] \Psi . \tag{4}$$

В цилиндрических координатах оно выглядит так:

$$H = \frac{\hbar^2}{2M} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e}{\hbar c} A_\phi)^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \tag{5}$$

Переменные в уравнении Шредингера делятся подстановкой

$$\Psi = e^{-iEt/\hbar} e^{im\phi} \, Z(z) \, R(r), \qquad \varepsilon = EM / \hbar^2 , \tag{6}$$

тогда

$$\frac{1}{Z} \left(2\varepsilon \, Z + \frac{d^2 Z}{dz^2} \right) = \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} (m + \frac{e}{\hbar c} A_\phi)^2 R \right).$$

Вводим постоянную разделения Λ, в результате получаем систему из двух уравнений:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2EM}{\hbar^2} Z = \Lambda \, Z, \; Z = e^{\pm iPz/\hbar} , \Lambda = \frac{2M}{\hbar^2} (E - \frac{P^2}{2M}), \tag{7a}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} (m + \frac{eB}{\hbar c} \frac{r^2}{2})^2 R = \frac{2M}{\hbar^2} (E - \frac{P^2}{2M}) \, R . \tag{7b}$$

Рассмотрим радиальное дифференциальное уравнение (7*b*). Далее будем использовать безразмерный параметр

$$\frac{eB}{\hbar c} \Rightarrow B ; \tag{8a}$$

уравнение представим в виде

$$\frac{d^2}{dr^2}R + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + mB + \frac{B^2 r^2}{4} - \Lambda\right) R = 0\,. \qquad (8b)$$

Перейдем к новой переменной y:

$$\frac{Br^2}{2} = y,$$

$$y\frac{d^2 R}{dy^2} + \frac{dR}{dy} - \left(\frac{m^2}{4y} + \frac{y}{4} + \frac{m}{2} - \frac{\Lambda}{2B}\right) R = 0\,. \qquad (9)$$

Для функции R будем использовать подстановку $R = y^a e^{by} F$:

$$y\frac{d^2 F}{dy^2} + [1 + 2a + 2by]\frac{dF}{dy} +$$

$$+\left[\, 2ab + b - \frac{m}{2} + \frac{\Lambda}{2B} + \left(b^2 - \frac{1}{4}\right) y + \left(a^2 - \frac{m^2}{4}\right)\frac{1}{y} \,\right] F = 0\,. \qquad (10)$$

При a, b, выбранных согласно

$$a = \pm\frac{|\,m\,|}{2}, \qquad b = -\frac{1}{2}, \qquad (11)$$

уравнение (10) упрощается

$$y\frac{d^2 F}{dy^2} + [1 + 2a - y]\frac{dF}{dy} - \left[\, a + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{\Lambda}{2B} \,\right] F = 0 \qquad (12)$$

и представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции $F(\alpha, \gamma, x)$

$$x\frac{d^2 F}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{dF}{dx} - \alpha F = 0$$

с параметрами

$$\alpha = a + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{\Lambda}{2B}, \qquad \gamma = \frac{1}{2} + 2a. \qquad (13)$$

Связанным состояниям отвечает выбор значения $A = -|\,m\,|/2$. Условие обрыва гипергеометрического ряда до полинома имеет вид:

$$\alpha = -n, \qquad \frac{|\,m\,| + m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\Lambda}{2B} = -n,$$

что приводит к правилу квантования параметра Λ

$$\frac{\Lambda}{2B} = \frac{|\,m\,| + m}{2} + n + \frac{1}{2}$$

или, учитывая $(7a)$ и $(8a)$:

$$E - \frac{P^2}{2M} = E_n = \hbar\omega\left(\frac{|\,m\,| + m}{2} + n + \frac{1}{2}\right), \ \omega = \frac{eB}{Mc}\,. \qquad (14)$$

Формула для E_n дает дискретные значения энергии, отвечающие движению в плоскости, перпендикулярной магнитному полю; их называют уровнями Ландау.

ЛИТЕРАТУРА
1. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1973. – 504 с.
2. Ландау, Л.Д. Квантовая механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – Москва: Наука, 1974. – 752 с.