Н. В. ГУЦКО
УО МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПРИ УСЛОВИИ С-КВАЗИНОРМАЛЬНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. Впервые это было замечено в работе

Хупперта [1], где, в частности, было доказано, что разрешимая группа G является сверхразрешимой, если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы G. Несколько позднее Сринивазан доказал [2], что группа G является сверхразрешимой при условии, что в G имеется такая нормальная подгруппа N со сверхразрешимой факторгруппой G/N, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из N нормальны в G. Эти два результата получили развитие в исследованиях многих авторов [см., в частности, 3–7].

Напомним, что подгруппа A группы G перестановочна с подгруппой B, если $AB = BA$. Подгруппа H группы G называется перестановочной [8] или квазинормальной [9] в G, если она перестановочна со всеми подгруппами из G.

Подгруппа H группы G называется c-нормальной в G, если существует нормальная подгруппа T из G такая, что $G = HT$ и $T \cap H$ – нормальная подгруппа в G. Понятие c-нормальности было введено в работе [3], где была построена содержательная теория c-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации непростых подгрупп.

Следующее понятие одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие c-нормальности для подгрупп.

Определение. Пусть H – подгруппа группы G. Тогда будем говорить, что H c-квазинормальна в G, если в G имеется такая квазинормальная подгруппа T, что $G = HT$ и $T \cap H$ квазинормальна в G.

Многими авторами изучалось строение групп, у которых максимальные подгруппы силовских подгрупп некоторых подгрупп основной группы c-квазинормальны. Нами было изучено строение группы при условии, что некоторые максимальные или минимальные подгруппы силовских подгрупп этой группы c-квазинормальны. Были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть p – простое число, G – p-разрешимая группа и H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathsf{A}_p$. Если каждая максимальная подгруппа силовской подгруппы из H c-квазинормальна в G, то $G \in \mathsf{A}_p$.*

Теорема 2. *Пусть $\Im$ – насыщенная формация, содержащая A класс всех сверхразрешимых групп, и G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $G \in \Im$.

(b) существует максимальная подгруппа H в G такая, что $G/H \in \Im$ и максимальные подгруппы силовских подгрупп из H c-квазинормальны в G.

Следствие 3. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G такая, что G/H сверхразрешима. Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из H c-квазинормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.*

Следствие 4 (*Wang*). *Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из G c-нормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – XII. – P. 161–169.

2. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35, № 3. – P. 210–214.

3. Wang, Y. C-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.

4. Wei, H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 5. – P. 2193–2200.

5. Wei, H. On c-Normal Maximal and Minimal Subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei, W. Yanming, Li. Yangming // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 10. – P. 4807–4816.

6. Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A. A. Heliel // Arch. Math. – 2002. – Vol. 80. – P. 113–118.

7. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo // Arch.Math. – 1999. – № 72. – P. 161–166.

8. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

9. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.