

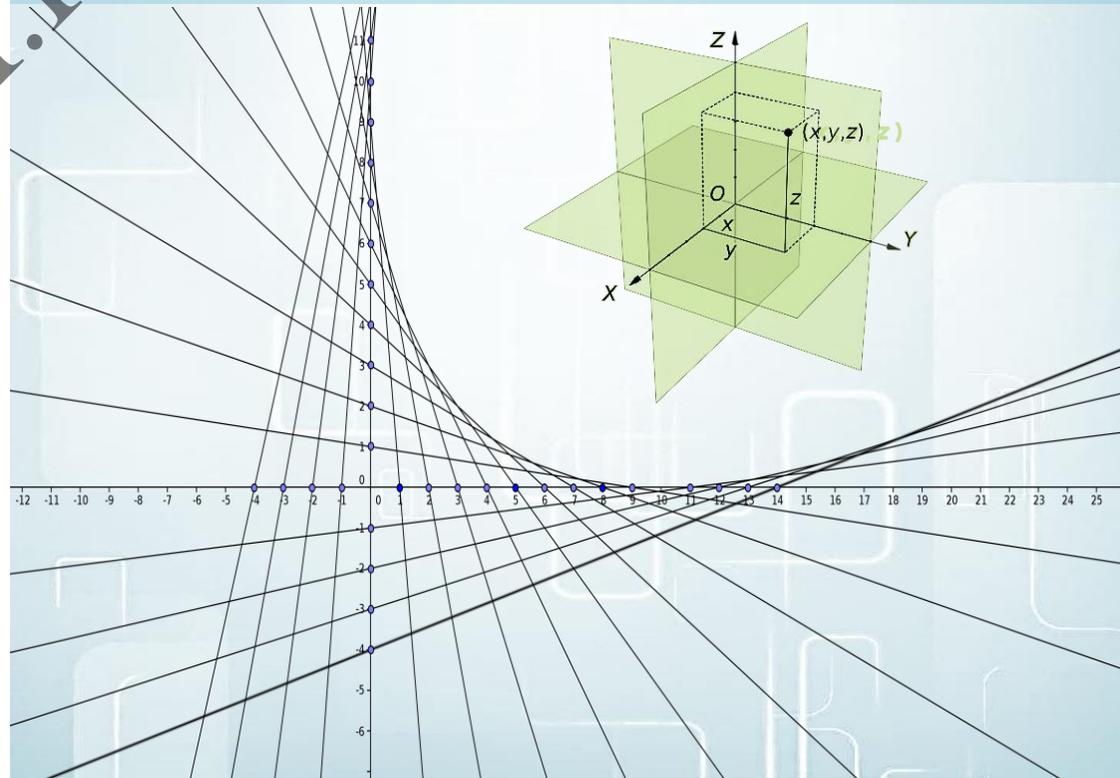
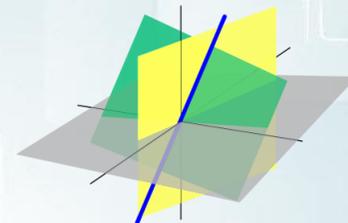
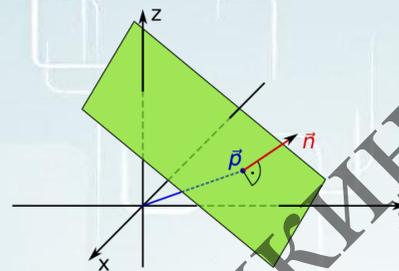
ISBN 978-985-477-897-6



9 789854 778976

МГПУ им. И.П. Шамякина

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА



Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Справочник

МГПУ им. И. П. Шамякина

Мозырь
МГПУ им. И. П. Шамякина
2024

УДК 514.12+512.64(078)

ББК 22.151.5я73

А64

Составители:

М. И. Ефремова, кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры физики и математики УО МГПУ им. И. П. Шамякина;

С. В. Игнатович, старший преподаватель кафедры физики
и математики УО МГПУ им. И. П. Шамякина

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры
информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-
экономического университета потребительской кооперации

Л. А. Воробей;

кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора
по учебно-воспитательной и идеологической работе филиала
Российского государственного социального университета в г. Минске

В. В. Пакутайте

Печатается по решению редакционно-издательского совета учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина»

Аналитическая геометрия и векторная алгебра : справ. /
А64 сост. М. И. Ефремова, С. В. Игнатович. – Мозырь : МГПУ
им. И. П. Шамякина, 2024. – 55 с.
ISBN 978-985-477-897-6.

Справочник содержит определения основных понятий, формулы, свойства,
а также формулировки лемм и теорем из следующих разделов высшей мате-
матики: линейная и векторная алгебра; аналитическая геометрия на плоскости
и в пространстве.

Предназначен для самостоятельной работы студентов математических, физи-
ческих и технических специальностей вузов, учебные планы которых включают
изучение высшей математики.

УДК 514.12+512.64(078)

ББК 22.151.5я73

ISBN 978-985-477-897-6

© Ефремова М. И., Игнатович С. В.,
составление, 2024

© УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
1. ВЕКТОР. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ	5
2. АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	7
3. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ	11
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА	15
5. БАЗИС И КООРДИНАТЫ	19
6. МАТРИЦЫ.....	21
7. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ЕГО СВОЙСТВА ...	24
8. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА	29
9. РАНГ МАТРИЦЫ	30
10. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ	32
11. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ (МЕТОД ГАУССА).....	34
12. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМОЙ.....	37
13. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ.....	39
14. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА	43
15. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	48
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	51
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	52

ПРЕДИСЛОВИЕ

В издание включены материалы по дисциплине «Аналитическая геометрия и векторная алгебра» из разделов «Векторная алгебра», «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве».

В качестве справочного материала предложены основные определения, свойства, формулы, а также формулировки лемм и теорем по основным вопросам аналитической геометрии и векторной алгебры. Поясняющие рисунки способствуют доступности и наглядности предлагаемого материала. Для удобства использования издание снабжено предметным указателем.

Справочник по курсу «Аналитическая геометрия и векторная алгебра» предназначен для организации учебного процесса дневного отделения по специальности 6-05-0113-05 «Технологическое образование (технический труд и информатика)», а также может быть использован в качестве учебно-методического обеспечения специальностей 6-05-0533-04 «Компьютерная физика», 6-05-0113-04 «Физико-математическое образование (математика и информатика)».

Данный справочник будет полезен при самостоятельной подготовке к практическим занятиям по дисциплине, а также поможет студентам систематизировать теоретические знания при подготовке к сдаче зачета и экзамена. Кроме того, изложенные вопросы позволят студентам использовать аппарат векторной алгебры и аналитической геометрии в решении задач из различных областей математики.

1. ВЕКТОР. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Понятие вектора

Связанным вектором называется отрезок AB , о котором однозначно известно, какая точка является его началом, а какая – концом. Если A является началом, а B концом, то пишут \overrightarrow{AB} . **Длиной** или **модулем связанного вектора** \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB . Обозначается длина связанного вектора через $|\overrightarrow{AB}|$. Связанный вектор \overrightarrow{AB} называется **нулевым**, если его начало и конец совпадают. Связанный вектор, не являющийся нулевым, называется **ненулевым**. Два ненулевых связанных вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются **эквивалентными** (пишут $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$), если они сонаправлены и их длины равны.

Множество всех связанных векторов разбивается на непересекающиеся множества эквивалентных друг другу связанных векторов. Поэтому возможно следующее определение.

Свободным вектором или просто **вектором** называется множество всех эквивалентных друг другу связанных векторов. Для задания такого множества достаточно взять один из связанных векторов, который называют представителем вектора. Для обозначения свободных векторов используют малые буквы латинского алфавита, например, \vec{a} .

Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются **равными**, если множества их представителей совпадают. При этом пишут $\vec{a} = \vec{b}$. **Длиной** или **модулем** вектора \vec{a} называется длина его любого представителя. Обозначается $|\vec{a}|$. Вектор называется **нулевым**, если его представителем является нулевой связанный вектор. Вектор, который не является нулевым, называется **ненулевым**. Обозначается нулевой вектор $\vec{0}$.

Углом φ между векторами \vec{a} и \vec{b} называется наименьший угол между их любыми двумя представителями, взятыми таким образом, что их началами является одна и та же точка (рисунок 1).

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются **коллинеарными**, если их представители параллельны одной и той же прямой.

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются **ортогональными**, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются **компланарными**, если их представители параллельны одной и той же плоскости.

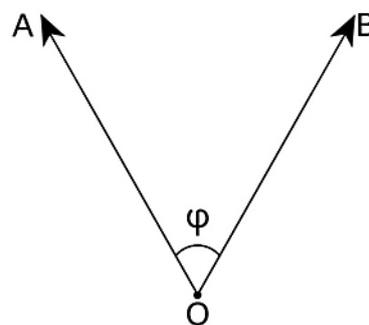
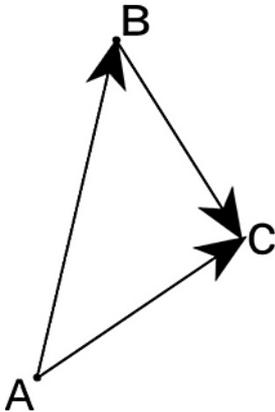


Рисунок 1 – Угол между векторами

Сумма векторов



Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор \vec{c} , если \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} – представители соответственно векторов \vec{a} и \vec{b} , то \overrightarrow{AC} – представитель вектора \vec{c} (рисунок 2).

Приведённое определение сложения векторов даёт так называемое *правило параллелограмма*, так как сумма векторов \vec{a} и \vec{b} представляет собой вектор, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на этих век-

Рисунок 2 – Сумма векторов

торах (рисунок 3). Вектор, равный вектору \vec{a} по длине и противоположный ему по направлению, называется *противоположным вектором к вектору \vec{a}* и обозначается $-\vec{a}$.

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным вектором*.

Теорема 1.1. Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых векторов \vec{a} и \vec{b} (коммутативность);

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (ассоциативность).

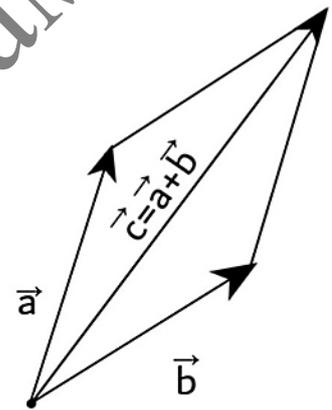


Рисунок 3 – Правило параллелограмма

Произведение вектора на действительное число и его свойства

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на действительное ненулевое число α называется такой вектор \vec{b} , что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$;

2) \vec{a} и \vec{b} коллинеарны;

3) если $\alpha > 0$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Будем также считать, что для любого вектора \vec{a} $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ и для любого действительного числа α $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Теорема 1.2. Пусть дан ненулевой вектор \vec{a} . Для любого коллинеарного ему вектора \vec{b} существует единственное действительное число λ такое, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Теорема 1.3. Для любого вектора \vec{a} и любых двух чисел α и β справедливо равенство $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Теорема 1.4. Для любых действительных чисел α и β и любых двух векторов \vec{a} и \vec{b} справедливо утверждение:

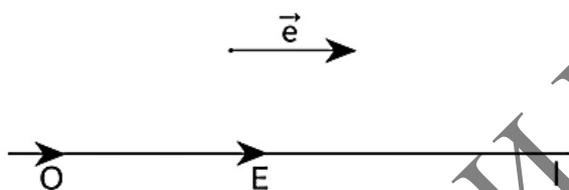
1) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

2) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

2. АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве дана некоторая прямая l и некоторый единичный вектор $\vec{e} \parallel l$. В качестве представителя вектора \vec{e} возьмём связанный вектор \overrightarrow{OE} , где O – некоторая точка прямой l . Очевидно, что \overrightarrow{OE} является



единичным связанным вектором.

Прямая l с единичным связанным вектором \overrightarrow{OE} представляет собой ось с заданным направлением (рисунки 4).

Рисунок 4 – Ось с заданным направлением

Определение 2.1. Пусть дана некоторая ось l и некоторый вектор \vec{a} , заданный представителем AB (рисунок 5). Через точки A и B проведём соответственно плоскости π_1 и π_2 , перпендикулярные оси l . Ось l пересечёт плоскости π_1 и π_2 соответственно в точках A_1 и B_1 . Связанный вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ является представителем некоторого вектора \vec{b} . Вектор \vec{b} называется **векторной проекцией вектора \vec{a} на ось l** .

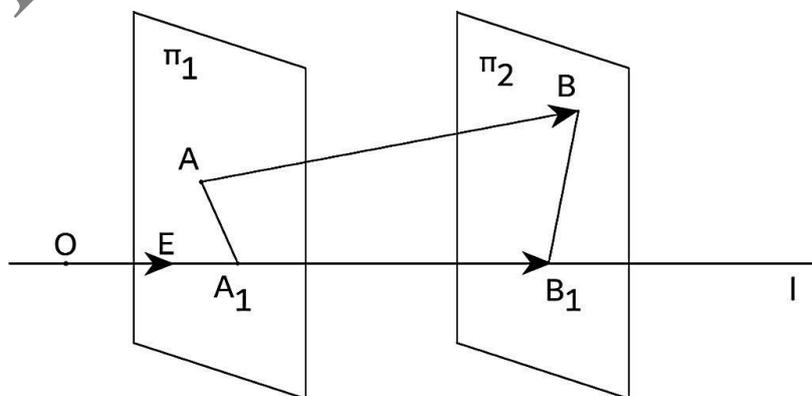


Рисунок 5 – Векторная проекция

Определение 2.2. Пусть длина векторной проекции некоторого вектора \vec{a} на ось l равна m . Число p такое, что $p = m$, если эта проекция сонаправлена с осью l и $p = -m$, если проекция с осью противоположно направлена, называется *скалярной проекцией вектора \vec{a} на ось l* . В случае, когда $\vec{a} \perp l$, точки A_1, B_1 совпадают, и векторной проекцией вектора \vec{a} на ось l будет нулевой вектор. Векторная проекция вектора на ось не зависит от выбора представителя этого вектора.

Теорема 2.1. Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

- 1) $Pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, l})$;
- 2) $Pr_l(\lambda \vec{a}) = \lambda Pr_l \vec{a}$ для любого действительного числа λ ;
- 3) $Pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = Pr_l \vec{a} + Pr_l \vec{b}$.

Разложение векторов

Определение 2.3. Пусть дано некоторое множество векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Любой вектор

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа, называется *линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$* . Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются *коэффициентами линейной комбинации*. Про вектор \vec{a} говорят еще, что он разложен по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются *коэффициентами разложения \vec{a}* .

Теорема 2.2. Пусть на некоторой плоскости даны два ненулевых неколлинеарных вектора \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Любой вектор \vec{a} этой плоскости может быть разложен по векторам \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , и причём такое разложение единственно.

Теорема 2.3. Пусть даны три ненулевых некопланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Любой вектор \vec{a} может быть разложен по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, и причём такое разложение единственно.

Определение 2.4. *Базисом на плоскости* называются два произвольных ненулевых неколлинеарных вектора, взятых в определённом порядке.

Определение 2.5. *Базисом в пространстве* называются три произвольных ненулевых некопланарных вектора, взятых в определённом порядке.

Аффинная система координат

Определение 2.6. *Аффинной системой координат на плоскости* называется система, которая состоит из двух пересекающихся в некоторой точке O осей X и Y , на которых соответственно выбраны представители \vec{OE}_1 и \vec{OE}_2 единичных векторов базиса \vec{i} и \vec{j} соответственно. Точка O на-

зывается *началом координат*, ось OX называется *осью абсцисс*, а ось OY – *осью ординат*. Угол φ между координатными осями должен удовлетворять условию $0 < \varphi < \pi$ (рисунок 6).

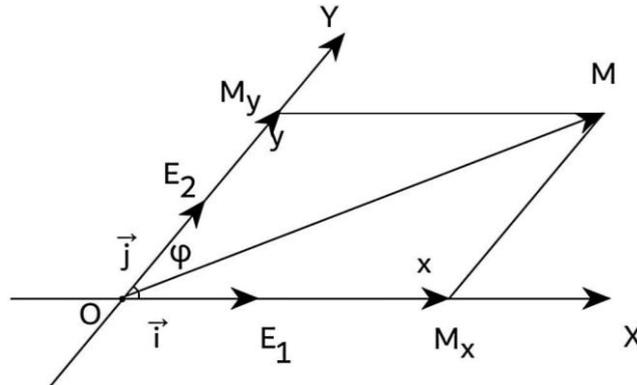


Рисунок 6 – Аффинная система координат

Обычно аффинная система координат на плоскости обозначается OXY , если речь идёт о конкретном начале координат и конкретных координатных осях. Пусть на некоторой плоскости дана некоторая аффинная система координат (рисунок 6). Пусть M – некоторая точка этой плоскости. Разложим вектор \overrightarrow{OM} по векторам $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ (точки M_x и M_y лежат соответственно на осях OX и OY) следующим образом:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}.$$

Тогда очевидно, что существуют единственные действительные числа x, y такие, что

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Определение 2.7. *Аффинной системой координат в пространстве* называется система, которая состоит из трёх пересекающихся в некоторой одной точке O осей X, Y и Z , на которых соответственно выбраны представители единичных векторов базиса \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} соответственно. Точка O называется *началом координат*, ось OX называется *осью абсцисс*, ось OY – *осью ординат*, а ось OZ – *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через координатные оси, называются координатными плоскостями и обозначаются OXY, OYZ, OXZ . Значения углов между координатными осями должны принадлежать интервалу $(0, \pi)$.

Обычно аффинная система координат обозначается $OXYZ$, если речь идёт о конкретном начале координат и конкретных координатных осях.

Пусть в некотором пространстве дана некоторая аффинная система координат. Пусть M – некоторая точка этого пространства. Разложим вектор \overrightarrow{OM} по векторам $\overrightarrow{OM_x}, \overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$ (где точки M_x, M_y, M_z лежат на координатных осях OX, OY, OZ соответственно) следующим образом:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}.$$

Тогда очевидно, что существуют единственные действительные числа x, y, z такие, что

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Координаты вектора в аффинной системе координат

Определение 2.8. *Радиус-вектором точки M* в некоторой аффинной системе координат на плоскости называется вектор \overrightarrow{OM} , векторы $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ называются *векторными проекциями радиус-вектора \overrightarrow{OM}* , а точки M_x и M_y – *проекциями точки M на координатные оси OX и OY* соответственно.

Определение 2.9. *Координатами точки* в некоторой аффинной системе координат на плоскости называются коэффициенты разложения радиус-вектора этой точки по векторам базиса.

Определение 2.10. *Радиус-вектором точки M* в некоторой аффинной системе координат в пространстве называется вектор \overrightarrow{OM} , векторы $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$, $\overrightarrow{OM_z}$ называются векторными проекциями радиус-вектора \overrightarrow{OM} , а точки M_x, M_y, M_z – проекциями точки M на координатные оси OX, OY, OZ соответственно.

Определение 2.11. *Координатами точки* в некоторой аффинной системе координат в пространстве называются коэффициенты разложения радиус-вектора этой точки по векторам базиса.

Определение 2.12. *Координатами вектора* в некоторой аффинной системе координат на плоскости называются координаты конца того его представителя, начало которого находится в начале координат.

Определение 2.13. *Координатами вектора* в некоторой аффинной системе координат в пространстве называются координаты конца того его представителя, начало которого находится в начале координат.

Декартова прямоугольная система координат

Определение 2.14. *Прямоугольной декартовой системой координат на плоскости* называется такая аффинная система координат на плоскости, координатные оси которой перпендикулярны.

Если x, y – координаты точки M (вектора \vec{a}), то пишут $M(x, y)$ ($\vec{a}(x, y)$) или $M = (x, y)$ ($\vec{a} = (x, y)$).

Определение 2.15. *Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве* называется такая аффинная система координат в пространстве, координатные оси которой попарно перпендикулярны.

Если x, y, z – координаты точки M (вектора \vec{a}), то пишут $M(x, y, z)$ ($\vec{a}(x, y, z)$) или $M = (x, y, z)$ ($\vec{a} = (x, y, z)$).

Деление отрезка в данном отношении

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – две различные точки, данные в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Поскольку *расстояние между точками A и B* равно модулю связанного вектора \overrightarrow{AB} , то получим

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Пусть нужно найти такую точку C, которая лежит на отрезке AB и делит его в заданном соотношении. Пусть $C(x, y, z)$. Тогда *формулы деления отрезка* в данном соотношении имеют вид:

$$x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{1 + \lambda}; y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{1 + \lambda}; z = \frac{\lambda z_2 + z_1}{1 + \lambda}.$$

Если точка C – середина отрезка AB, то $\lambda = 1$, и тогда получаем *формулы середины отрезка*

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}; y = \frac{y_2 + y_1}{2}; z = \frac{z_2 + z_1}{2}.$$

3. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение

Определение 3.1. Пусть \vec{a} и \vec{b} – ненулевые векторы, φ – угол между ними. Поставим в соответствие указанной паре векторов некоторое число, которое называется *скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b}* , обозначается $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi.$$

Скалярное произведение можно вычислить и через скалярную проекцию одного из векторов-сомножителей на другой: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|Pr_{\vec{a}}\vec{b}$.

Используя понятие скалярного произведения, легко получить следующую формулу:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}.$$

Определение 3.2. Выражение $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a}$ называется *скалярным квадратом вектора*.

Теорема 3.1 (критерий ортогональности). Для того чтобы ненулевые векторы были перпендикулярны (ортогональны), необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Теорема 3.2. Скалярное произведение двух векторов обладает следующими свойствами:

- 1) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
- 2) $\forall \lambda \in R, \forall \vec{a}, \forall \vec{b}, (\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
- 3) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Из определения скалярного произведения легко получить следующую формулу:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Векторное произведение

Определение 3.3. Пусть дана упорядоченная тройка ненулевых некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Выберем их представителями связанные векторы соответственно $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$. Говорят, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют **правую тройку**, если из конца связанного вектора \vec{OC} кратчайший поворот от первого связанного вектора \vec{OA} ко второму связанному вектору \vec{OB} виден в направлении против часовой стрелки (рисунок 7). Если же указанный поворот виден в направлении по часовой стрелке, то говорят, что эти векторы образуют **левую тройку** (рисунок 8).

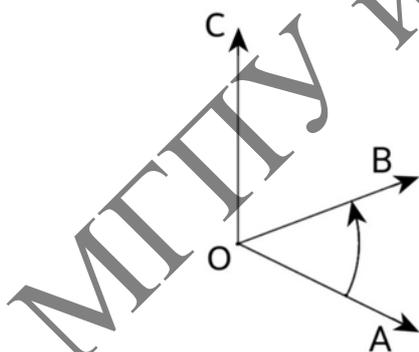


Рисунок 7 – Правая тройка векторов

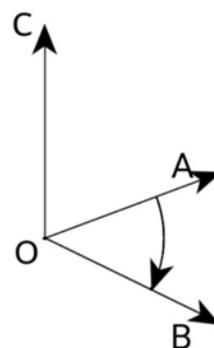


Рисунок 8 – Левая тройка векторов

Определение 3.4. Пусть даны два ненулевых вектора \vec{a} и \vec{b} . **Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b}** называется такой вектор \vec{c} , что выполняются следующие условия:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} через $\vec{a} \times \vec{b}$.

Теорема 3.3. Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на представителях этих векторов (рисунок 9).

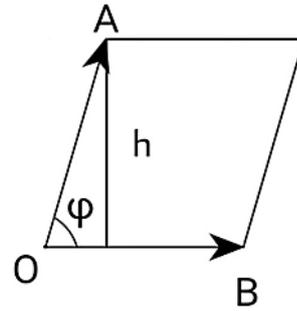


Рисунок 9 – Геометрический смысл векторного произведения

Теорема 3.4 (критерий коллинеарности). Для того чтобы ненулевые векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Теорема 3.5. Векторное произведение обладает следующими свойствами:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность);
- 2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (линейность);
- 3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивность).

Смешанное произведение

Определение 3.5. Смешанным произведением трёх ненулевых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор.

Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Из определения смешанного произведения следует, что это число.

Теорема 3.6. Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на представителях векторов-сомножителей.

Теорема 3.7. Если смешанное произведение положительно, то векторы образуют правую тройку, если смешанное произведение отрицательно, то тройка левая.

Теорема 3.8 (критерий компланарности). Для того чтобы три ненулевые вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

Теорема 3.9. Смешанное произведение трёх ненулевых векторов обладает следующими свойствами:

- 1) $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$;
- 2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;
- 3) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$;
- 4) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Линейные операции над векторами, заданными прямоугольными координатами

Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул линейных операций над векторами, заданными прямоугольными координатами:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1);$$

$$-\vec{a} = (-x_1, -y_1, -z_1).$$

1. $\vec{a} + \vec{b} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} + x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k}.$
2. $\lambda \vec{a} = \lambda(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) = \lambda x_1 \vec{i} + \lambda y_1 \vec{j} + \lambda z_1 \vec{k}.$
3. $-\vec{a} = -x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j} - z_1 \vec{k}.$

Найдем сначала скалярные произведения векторов базиса:

$$\vec{i} \vec{i} = \vec{j} \vec{j} = \vec{k} \vec{k} = 1; \vec{i} \vec{j} = \vec{i} \vec{k} = \vec{j} \vec{i} = \vec{j} \vec{k} = \vec{k} \vec{j} = 0.$$

Теперь легко получить следующие формулы:

- **скалярного произведения для векторов, заданных прямоугольными координатами** $\vec{a} \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$
- **модуля вектора, заданного прямоугольными координатами**

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

- **угла между векторами, заданными прямоугольными координатами**

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Поскольку векторные произведения базисных векторов имеют следующие значения:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0; \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i};$$

$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$ то **векторное произведение векторов, заданных прямоугольными координатами** \vec{a} и \vec{b} , находится по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Из этой формулы легко получается **формула площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b}** , заданных прямоугольными координатами

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

и **формула смешанного произведения**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть V – непустое множество, элементы которого будем обозначать малыми буквами латинского алфавита $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$, и пусть P – числовое поле, элементы которого будем обозначать малыми буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Будем говорить, что на множестве V определена операция умножения на числа из поля P , если задано отображение $(P \times V) \rightarrow V$, т. е. всякому числу $\alpha \in P$ и всякому элементу $\vec{a} \in V$ ставится в соответствие, причем однозначно, некоторый элемент из множества V . Этот элемент будем называть произведением элемента \vec{a} на число α и обозначать символом $\alpha\vec{a}$.

Определение 4.1. Непустое множество V называется **линейным (векторным) пространством над полем P** , а элементы из V векторами, если на V определена бинарная алгебраическая операция сложения и операция умножения на числа из поля P , причем выполняются следующие условия (аксиомы векторного пространства):

1. Множество V относительно операции сложения образует абелеву группу, т. е.

(а) операция сложения на множестве V ассоциативна:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}));$$

(б) операция сложения на множестве V коммутативна:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V (\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a});$$

(в) во множестве V существует нулевой элемент:

$$\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{a} \in V (\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}).$$

Нулевой элемент $\vec{0}$ называют нулевым вектором;

(г) для каждого элемента из множества V в этом множестве существует ему противоположный: $\forall \vec{a} \in V, \exists \vec{b} \in V (\vec{a} + \vec{b} = \vec{0})$.

Элемент, противоположный \vec{a} , обозначают через $-\vec{a}$.

2. Операция умножения элементов из V на числа из P ассоциативна, т. е. $\forall \alpha, \beta \in P, \forall \vec{a} \in V ((\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}))$.

3. Операция умножения элементов из V на числа из P дистрибутивна относительно операции сложения, определенной на V , т. е.

$$\forall \alpha \in P, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V (\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}).$$

4. Операция умножения элементов из V на числа из P дистрибутивна относительно операции сложения чисел, т. е.

$$\forall \alpha, \beta \in P, \vec{a} \in V ((\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}).$$

5. $\forall \vec{a} \in V (1 \cdot \vec{a} = \vec{a})$.

Приведем *основные свойства векторных пространств*, вытекающие из определения.

Свойство 4.1. В пространстве V существует единственный нулевой вектор $\vec{0}$.

Свойство 4.2. Для всякого вектора $\vec{a} \in V$ в V существует единственный ему противоположный вектор.

Свойство 4.3. Для любых векторов \vec{a} и \vec{b} в пространстве V разрешимо уравнение вида $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$. Решение этого уравнения записывается $\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$ и называется *разностью векторов \vec{b} и \vec{a}* . Говорят также, что в V *операция сложения обратима*, т. е. определена операция, обратная сложению, – вычитание.

Свойство 4.4. Сумма произвольного конечного числа векторов пространства V не зависит от того, в каком порядке выполняется сложение.

Приведенные выше свойства следуют из того, что V образует группу относительно сложения.

Свойство 4.5. $\forall \vec{a} \in V (0 \cdot \vec{a} = \vec{0})$.

Свойство 4.6. $\forall \alpha \in P (\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0})$.

Свойство 4.7. $\forall \alpha \in P, \forall \vec{a} \in V (\alpha\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ либо } \vec{a} = \vec{0})$.

Свойство 4.8. $\forall \alpha \in P, \forall \vec{a} \in V ((-\alpha)\vec{a} = -\alpha\vec{a})$.

Свойство 4.9. $\forall \alpha \in P, \forall \vec{a} \in V (\alpha(-\vec{a}) = -\alpha\vec{a})$.

Свойство 4.10. $\forall \alpha \in P, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V (\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b})$ (дистрибутивность операции умножения векторов на числа относительно операции вычитания векторов).

Свойство 4.11. $\forall \alpha, \beta \in P, \forall \vec{a} \in V ((\alpha - \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{a})$.

Если поле P является полем действительных чисел, то пространство V называется действительным векторным пространством. Если же P есть поле C комплексных чисел, то V называют комплексным векторным пространством.

Примеры векторных пространств

- Множество всех комплексных чисел относительно операций сложения чисел и умножения комплексных чисел на действительные числа образует действительное векторное пространство.
- Множество всех свободных векторов W_3 обычного геометрического пространства образует действительное пространство относительно операций сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.
- Множество $R[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами образует действительное векторное пространство относительно операций сложения многочленов и умножения многочленов на действительные числа. Здесь операция сложения многочленов рассматривается как сложение векторов, а операция умножения многочленов на числа – как умножение векторов на числа.

Важным примером векторных пространств является арифметическое векторное пространство.

Определение 4.2. Совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ поля P , расположенных в определенном порядке, называется **n -мерным числовым вектором над полем P** .

Для обозначения n -мерных числовых векторов используют записи

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \text{либо} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \quad \text{Числа } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ называют}$$

координатами или **компонентами вектора \vec{a}** .

Определение 4.3. Два числовых вектора $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ называются **равными**, если равны их соответствующие координаты, т. е. если $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Множество всех n -мерных числовых векторов над полем P будем обозначать через P^n . Введем на этом множестве операции сложения векторов и умножения векторов на числа из поля P .

Определение 4.4. **Суммой числовых векторов $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ называется вектор**

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

Определение 4.5. **Произведением вектора $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ на число $\lambda \in P$ называется вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$.**

Теорема 4.1. Множество P^n образует векторное пространство над полем P относительно операций сложения числовых векторов и умножения векторов на числа из поля P .

Определение 4.6. Пространство P^n n -мерных числовых векторов называется *арифметическим n -мерным векторным пространством над полем P* .

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Пусть V – векторное пространство над числовым полем P . Будем полагать, что все векторы, о которых идет речь ниже, принадлежат V .

Определение 4.7. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из поля P , среди которых есть отличные от нуля, что будет выполняться равенство:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}. \quad (4.1)$$

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно независимой*, если равенство (4.1) выполняется только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Теорема 4.2. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ тогда и только тогда линейно зависима, когда хотя бы один из векторов системы линейно выражается через остальные.

Приведенная теорема дает возможность иначе определить понятие линейной зависимости векторов.

Определение 4.8. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через остальные. Если же ни один из векторов системы линейно не выражается через остальные векторы, то система называется линейно независимой.

Приведем *свойства линейной зависимости векторов*.

1. Всякая система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
2. Если система векторов линейно независима, то линейно независима и любая подсистема этой системы векторов. Данное свойство равносильно следующему.
3. Если линейно зависима некоторая подсистема системы векторов, то линейно зависима и сама система.
4. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно независима, а система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}$ линейно зависима, то вектор \vec{b} линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.
5. Система n -мерных числовых векторов

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ \vec{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \vec{a}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

в которой число векторов больше их размерности ($m > n$), линейно зависима.

Определение 4.9. Говорят, что система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ (4.3) *линейно выражается через систему векторов* $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ (4.4), если всякий вектор системы (4.3) линейно выражается через векторы системы (4.4).

Отношение линейной выражаемости на множестве систем векторов пространства V рефлексивно и транзитивно.

Определение 4.10. Две системы векторов называются *эквивалентными*, если каждая из них линейно выражается через другую.

Теорема 4.3 (основная теорема о линейной зависимости векторов). Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ линейно независима и линейно выражается через систему $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$, тогда число векторов в первой системе не больше, чем во второй, т. е. $m \leq n$.

Следствие 1. Если система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ линейно выражается через систему $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ и $m \leq n$, то система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ линейно зависима.

Следствие 2. В n -мерном арифметическом пространстве P^n линейно зависима любая система, состоящая из более чем n векторов.

5. БАЗИС И КООРДИНАТЫ

Базис и ранг системы векторов

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство линейной зависимости числовых векторов.

Определение 5.1. *Базисом системы векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется линейно независимая подсистема данной системы, через которую линейно выражается любой вектор системы.

Теорема 5.1. Любые два базиса системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

Определение 5.2. *Рангом системы векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется число векторов в базисе этой системы.

Заметим, что базис системы векторов можно рассматривать как максимальную линейно независимую подсистему этой системы, т. е. такую линейно независимую подсистему, при добавлении к которой произвольного вектора системы она становится линейно зависимой. Действительно, согласно свойству линейной зависимости векторов, любой вектор системы линейно выражается через максимальную линейно независимую систему, и, следовательно, она образует базис системы. Соответственно ранг системы векторов можно рассматривать как максимальное число линейно независимых векторов в этой системе.

Теорема 5.2. Ранги эквивалентных систем векторов равны.

Связь между размерностью и базисом пространства

Под V мы будем понимать векторное пространство над числовым полем P .

Определение 5.3. Векторное пространство V называется *n -мерным*, если в нём существует линейно независимая система, состоящая из n векторов, а всякая система из $n + 1$ векторов пространства уже линейно зависима. Число n в этом случае называют размерностью пространства V .

Пример 5.1. Арифметическое n -мерное векторное пространство P^n является n -мерным в смысле приведенного определения. Действительно, оно содержит в себе линейно независимую систему, состоящую из n векторов. Таковой, например, является система единичных векторов

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned} \quad (5.1)$$

В то же время всякая система из $n + 1$ векторов пространства P^n уже линейно зависима, так как число векторов в ней больше их размерности.

В дальнейшем n -мерное векторное пространство над полем P будем обозначать через V_n .

Определение 5.4. *Базисом векторного пространства V* называется линейно независимая система векторов этого пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства.

Например, базис пространства P^n образует система единичных векторов (5.1). Действительно, она линейно независима, и всякий вектор $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ пространства P^n линейно выражается через неё, а именно:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

Теорема 5.3. Всякий базис пространства V_n состоит из n векторов.

Теорема 5.4. Если базис пространства V состоит из n векторов, то его размерность равна n .

На основании приведенных теорем можно дать другое определение размерности пространства.

Определение 5.5. *Размерностью пространства V* называется число векторов в базисе этого пространства.

Координаты вектора в данном базисе

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – базис пространства V_n и \vec{a} – произвольный вектор этого пространства. Тогда существуют такие числа x_1, x_2, \dots, x_n из поля P , что $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$.

Такое представление вектора \vec{a} называется *разложением этого вектора по векторам базиса*. Коэффициенты x_1, x_2, \dots, x_n этого разложения называют *координатами вектора \vec{a} в базисе*.

Теорема 5.5. Координаты всякого вектора \vec{a} пространства V_n в заданном базисе пространства определяются однозначно.

6. МАТРИЦЫ

Определение 6.1. Матрицей размера $m \times n$ над полем P называется прямоугольная таблица, составленная из чисел поля P и содержащая в себе m строк и n столбцов.

Матрицы в дальнейшем будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C, \dots . Матрица A размера $m \times n$ записывается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Числа, из которых составлена матрица, называют *элементами этой матрицы*. Первый индекс элемента матрицы указывает номер строки, а второй – номер столбца, в котором он стоит.

Матрицу (6.1) размера $m \times n$ будем также записывать в более компактной форме: $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Определение 6.2. Две матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ одинакового размера называются *равными*, если равны их соответствующие элементы, т. е. $a_{ij} = b_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.

Согласно этому определению равенство матриц размера $m \times n$ равносильно системе mn числовых равенств

$$a_{ij} = b_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Определение 6.3. Матрица A называется *квадратной матрицей порядка n* , если число строк в ней равно числу столбцов и равно n .

Определение 6.4. Квадратная матрица порядка n называется *матрицей треугольного вида*, если все ее элементы, расположенные ниже или выше главной диагонали (диагональ от a_{11} к a_{nn}), равны 0.

Определение 6.5. Квадратная матрица называется *матрицей диагонального вида*, если все ее элементы, расположенные не на главной диагонали, равны 0.

Строки (столбцы) матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ будем рассматривать в дальнейшем как n -мерные (m -мерные) числовые векторы.

Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинакового размера.

Определение 6.6. Суммой матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Согласно определению, элементы суммы $A + B$ равны суммам соответствующих элементов слагаемых матриц. Очевидно, что операция сложения является алгебраической операцией на множестве матриц одинаковой размерности $m \times n$. Приведем далее свойства операции сложения на этом множестве.

Свойство 6.1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность).

Свойство 6.2. $A + B = B + A$ (коммутативность).

Свойство 6.3. $A + O = A$, где O – нулевая матрица размерности $m \times n$, т. е. матрица, все элементы которой равны нулю.

Свойство 6.4. Для всякой матрицы A существует противоположная ей матрица $-A$, такая, что $A + (-A) = O$. Очевидно, что противоположной матрице A является матрица, все элементы которой противоположны соответствующим элементам матрицы A .

Согласно приведенным свойствам, множество матриц одного и того же размера $m \times n$ образует абелеву группу относительно операции сложения. В частности, отсюда следует, что на этом множестве определена операция, обратная сложению, – вычитание.

Произведение матрицы на число

Определение 6.7. Произведением матрицу $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число $\alpha \in P$ называется матрица $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$.

Согласно определению, при умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

Приведем некоторые свойства операции умножения матриц на числа.

Свойство 6.5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (ассоциативность).

Свойство 6.6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Свойство 6.7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).

Свойство 6.8. $1 \cdot A = A$ и $-1 \cdot A = -A$.

Из приведенных выше свойств операции сложения матриц и операции умножения матриц на числа из поля P вытекает, что множество матриц одного и того же размера $m \times n$ образует векторное пространство над полем P .

Произведение матриц

Произведение матрицы A на матрицу B определяется только для случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Определение 6.8. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на матрицу $B = (b_{lk})_{n \times s}$ называется матрица $AB = (c_{pq})_{m \times s}$, элементы которой определяются равенствами

$$c_{pq} = a_{p1} \times b_{1q} + a_{p2} \times b_{2q} + \dots + a_{pn} \times b_{nq}. \quad (6.2)$$

Согласно этой формуле, элемент c_{pq} , стоящий в p -ой строке и q -ом столбце матрицы AB , равен сумме произведений элементов p -й строки матрицы A на соответствующие элементы q -го столбца матрицы B . Элемент c_{pq} можно рассматривать как скалярное произведение p -ой строки матрицы A на q -ый столбец матрицы B .

В произведении AB матрицу A называют *левым множителем*, а матрицу B – *правым*. Говорят также, что произведено умножение матрицы B на матрицу A слева.

Очевидно, что $AB \neq BA$.

Продолжим перечисление свойств операций над матрицами. Будем полагать при этом, что выражение в одной из частей равенства имеет смысл. Тогда выражение в другой части равенства также будет иметь смысл.

Свойство 6.9. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность).

Свойство 6.10. $AB \neq BA$ (некоммутативность в общем случае).

Свойство 6.11. $A(B + C) = AB + AC$ и $(B + C)A = BA + CA$ (дистрибутивность относительно операции сложения).

Свойство 6.12. $AE = EA = A$, где E – единичная матрица.

Свойство 6.13. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$, где $\alpha \in P$.

Обозначим через M_n множество всех квадратных матриц порядка n . Из приведенных свойств операций сложения и умножения матриц следует, что это множество образует кольцо с единицей относительно указанных операций. Это кольцо содержит делители нуля. Это значит, что существуют матрицы A и B , отличные от нулевой, произведение которых равно нулевой матрице. Например, делителями нуля в кольце M_2 являются матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Действительно, } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Определение 6.9. Матрицы $A, B \in M_n$ называют *перестановочными*, если $AB = BA$.

Легко убедиться, что скалярная матрица перестановочна с любой матрицей.

Определение 6.10. Диагональная матрица порядка n , все элементы главной диагонали которой равны между собой, называется *скалярной матрицей порядка n* .

Частными случаями скалярных матриц являются:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица};$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \text{нулевая матрица}.$$

Транспонирование матриц

Определение 6.11. Матрица $A_{n \times m}^T = (a'_{ji})$ называется *транспонированной к матрице $A_{m \times n} = (a_{ij})$* , если

$$\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; a'_{ji} = a_{ij}.$$

Таким образом, из определения видим, что при транспонировании матрицы строки становятся столбцами и наоборот.

Свойства операции транспонирования

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

7. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ЕГО СВОЙСТВА

Перестановки. Инверсии. Четность перестановки

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – произвольное множество, состоящее из n элементов.

Определение 7.1. Всякая последовательность из n различных элементов множества A , расположенных в определенном порядке, называется *перестановкой из n элементов*.

В перестановке элементы можно заменить их номерами. В таком случае получим перестановки множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ первых n натуральных чисел. В дальнейшем будем рассматривать только такие перестановки. Т.е. под перестановкой из n элементов будем понимать всякое расположение первых n натуральных чисел в определенном порядке.

Перестановку из n элементов будем записывать в виде выражения

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

где α_i – числа из множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Множество всех перестановок из n элементов обозначим через P_n .

Множество P_n состоит из $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n$ элементов.

Определение 7.2. Говорят, что два числа образуют *инверсию* в перестановке, если большее из них опережает меньшее.

Общее число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ определяется равенством $k = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$, где k_i ($i = 1, n-1$) – количество чисел, стоящих перед i и больших i .

Определение 7.3. Перестановка из n элементов называется *четной*, если общее число инверсий в ней является четным числом, и *нечетной* – в противном случае.

Определение 7.4. Перемена местами двух чисел в перестановке называется *транспозицией*.

Теорема 7.1. В результате всякой транспозиции из нечетной перестановки получается четная и наоборот.

Определитель квадратной матрицы

Пусть дана квадратная матрица порядка n : $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Определение 7.5. *Определителем квадратной матрицы* A n -го порядка называется алгебраическая сумма $n!$ членов, каждый из которых представляет собой произведение n элементов матрицы A , взятых по одному от каждой строки и каждого столбца этой матрицы, причем произведение входит в определитель со знаком $+$, если соответствующая ему подстановка индексов четная и со знаком $-$ в противном случае.

Определитель квадратной матрицы A порядка n будем называть определителем n -го порядка и обозначать

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы, строки и столбцы матрицы A будем называть при этом соответственно элементами, строками и столбцами определителя $|A|$.

Таким образом, согласно определению

$$|A| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

где t – число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и сумма состоит из всех слагаемых, для которых перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ различны.

Определители второго и третьего порядков

Определитель второго порядка имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Выпишем все возможные произведения элементов, взятых по одному от каждой строки и каждого столбца, и определим их знаки, с которыми они войдут в определитель:

1) $a_{11}a_{22}$. Этому произведению соответствует тождественная подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

которая является четной. Следовательно, данное произведение войдет в определитель со знаком "+";

2) $a_{12}a_{21}$. Этому произведению соответствует тождественная подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

которая является нечетной. Значит, данное произведение войдет в определитель со знаком «-».

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т. е. определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Определитель третьего порядка имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Найдем все произведения элементов, которые войдут в определитель третьего порядка и определим их знаки:

$$1) a_{11}a_{22}a_{33} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \text{четная} \rightarrow \langle + \rangle;$$

$$2) a_{11}a_{23}a_{32} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \text{нечетная} \rightarrow \langle\langle - \rangle\rangle;$$

$$3) a_{12}a_{21}a_{33} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \text{нечетная} \rightarrow \langle\langle - \rangle\rangle;$$

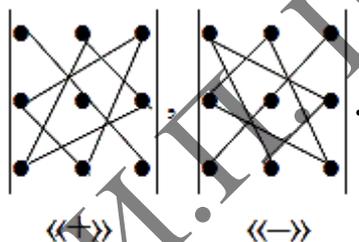
$$4) a_{12}a_{23}a_{31} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \text{четная} \rightarrow \langle\langle + \rangle\rangle;$$

$$5) a_{13}a_{21}a_{32} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \text{четная} \rightarrow \langle\langle + \rangle\rangle;$$

$$6) a_{13}a_{22}a_{31} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \text{нечетная} \rightarrow \langle\langle - \rangle\rangle.$$

$$\text{Итак, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Определитель третьего порядка удобно вычислять по следующей схеме:



На схеме элементы, произведения которых входят в определитель, соединены отрезками прямых. Знак «+» означает, что указанные произведения берутся со своими знаками, а знак «-» — с противоположными.

Свойства определителей

Свойство 7.1. Определитель квадратной матрицы A равен определителю транспонированной к ней матрицы, т. е. $|A| = |A^T|$.

Данное свойство устанавливает равноправие строк и столбцов определителя. Это значит, что все свойства, касающиеся строк определителя, справедливы и для его столбцов.

Свойство 7.2. Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю.

Свойство 7.3. Если все элементы строки определителя Δ умножить на число k , то на число k умножится определитель Δ .

Свойство 7.4. При перемене местами двух строк определителя Δ меняется его знак, абсолютная величина определителя не меняется.

Перемену местами двух строк (столбцов) определителя будем также называть транспозицией строк (столбцов).

Свойство 7.5. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

Свойство 7.6. Определитель, имеющий две пропорциональные строки, равен нулю.

Свойство 7.7. Определитель, у которого все элементы одной из строк, например, i -ой строки, представимы в виде суммы двух слагаемых, равен сумме двух определителей, все строки которых, кроме отмеченной i -ой строки, совпадают с соответствующими строками исходного определителя; i -я же строка первого определителя составлена из первых слагаемых, а i -я строка второго определителя составлена из вторых слагаемых элементов i -ой строки исходного определителя, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Это свойство распространяется и на случай, когда все элементы одной из строк представимы в виде суммы m элементов ($m > 2$). Такой определитель равен сумме m соответствующих определителей.

Свойство 7.8. Определитель не изменится, если к одной из его строк прибавить другую строку, умноженную на произвольное число.

Свойство 7.9. Если одна из строк определителя является линейной комбинацией других его строк, то он равен нулю.

Определение 7.5. *Определителем треугольного вида* называется определитель, все элементы которого, расположенные ниже или выше главной диагонали (диагональ от верхнего левого к нижнему правому углу), равны нулю.

Свойство 7.10. Определитель треугольного вида равен произведению диагональных элементов.

Миноры и алгебраические дополнения

Пусть дан определитель n -го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 7.6. *Минором элемента a_{ij} определителя Δ* называется определитель порядка $n - 1$, полученный из определителя Δ вычеркиванием в нем i -ой строки и j -го столбца.

Минор элемента a_{ij} определителя Δ обозначается через M_{ij} .

Определение 7.7. *Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя Δ* называется минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Обозначается через A_{ij} .

Согласно определению, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 7.2. Определитель равен сумме произведений элементов одной из его строк (одного из столбцов) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (7.1)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (7.2)$$

Равенство (7.1) называется *разложением определителя Δ по i -ой строке*, а равенство (7.2) называется *разложением определителя Δ по j -ому столбцу*.

Теорема 7.3. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

8. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение 8.1. Матрица A называется *обратимой*, если существует обратная ей матрица, т. е. такая матрица A^{-1} , что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

Определение 8.2. Квадратная матрица A называется *невырожденной (неособенной)*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной (особенной)*, если определитель матрицы равен нулю.

Приведем достаточное условие обратимости матрицы.

Теорема 8.1. Всякая невырожденная матрица обратима.

При вычислении обратной матрицы A^{-1} способом, основанном на элементарных преобразованиях строк, справа к матрице A приписывается единичная матрица E . Получают так называемую комбинированную матрицу $A|E$. Затем над строками комбинированной матрицы проводятся элементарные преобразования с тем, чтобы на месте матрицы A получить единичную матрицу E . Тогда на месте матрицы E будет расположена матрица A^{-1} .

Пусть $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица

порядка n .

Определение 8.3. *Присоединенной для матрицы* A называется матрица $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы.

Отметим, что алгебраические дополнения элементов строк матрицы A в матрице A^* располагаются в столбцах.

Теорема 8.2. Пусть A – обратимая матрица, тогда $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

9. РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть дана матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Строки и столбцы этой матрицы рассматриваются как соответственно n -мерные и m -мерные числовые векторы. Поэтому можно говорить о системе строк (столбцов) матрицы как о системе n -мерных (m -мерных) числовых векторов.

Определение 9.1. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются:

- 1) умножение строк и столбцов на число, отличное от 0;
- 2) прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число;
- 3) перестановка строк или столбцов.

Определение 9.2. *Строчечным (столбцовым) рангом* матрицы A называется ранг системы ее строк (столбцов).

Теорема 9.1 (о ранге матрицы). Строчечный ранг матрицы равен ее столбцовому рангу.

Согласно этой теореме, имеет смысл говорить просто о ранге матрицы, не употребляя слова «строчечный» и «столбцовый». Таким образом, *ранг матрицы* – это максимальное число линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

Теорема 9.2. Всякое элементарное преобразование матрицы не меняет ранга матрицы.

Теорема 9.3. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк в ней.

Последние теоремы дают один из способов вычисления ранга матрицы, который заключается в приведении матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, а затем подсчете ненулевых строк полученной матрицы. Существует и второе определение ранга матрицы.

Определение 9.3. *Рангом матрицы* называется наивысший порядок отличных от нуля ее миноров. *Ранг нулевой матрицы* по определению равен нулю. Ранг матрицы будем обозначать так: $\text{rang } A$.

Следствия

1. Для того чтобы строки (столбцы) матрицы были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы ее ранг был меньше количества строк (столбцов).

2. Для того чтобы строки (столбцы) определителя были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы он был отличен от 0.

3. Для того чтобы строки (столбцы) определителя были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы он был равен 0.

Матричные уравнения

Матричными уравнениями называются уравнения вида $AX = B$, $XA = B$, $AXB = C$, где A, B, C – известные матрицы; X – искомая.

Матрица X_0 называется *решением матричного уравнения*, если при подстановке в это уравнение она обращает его в верное равенство.

11. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Теорема 11.1. Всякая последовательность элементарных преобразований системы линейных уравнений приводит к системе, равносильной исходной.

Одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, называемый также методом Гаусса. Он состоит в том, что данная система линейных уравнений с помощью элементарных преобразований преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пусть дана система линейных уравнений (11.1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (11.1)$$

В ходе элементарных преобразований системы могут встретиться уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b. \quad (11.2)$$

При этом возможны два случая:

а) в уравнении (11.2) свободный член отличен от нуля, т. е. $b \neq 0$.
Такому уравнению не удовлетворяют никакие значения неизвестных;

Очевидно, что всякому элементарному преобразованию матрицы B соответствует некоторое элементарное преобразование системы. Поэтому полученная ступенчатая матрица определяет систему, равносильную исходной. Записав эту систему, находим ее решения, как это описано для системы (11.5).

12. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМОЙ

Вектор $\vec{a} \parallel l$ называется *направляющим вектором прямой* (рисунок 11), а вектор $\vec{n} \perp l$ называется *вектором нормали к прямой* (рисунок 10).

Теорема 12.1. Прямая l , проходящая через точку $A_0(x_0, y_0)$ и имеющая направляющий вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$, задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}, \quad (12.1)$$

которое называется *каноническим уравнением прямой* или *параметрическими уравнениями*:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases} t \in R. \quad (12.2)$$

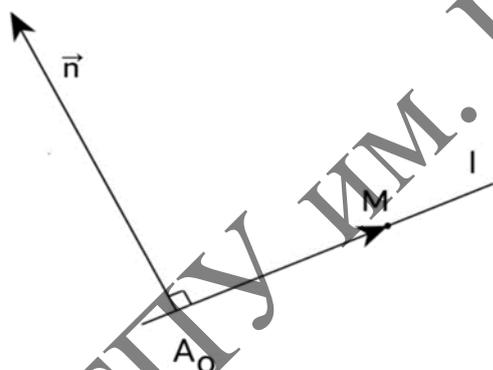


Рисунок 10 – Вектор нормали прямой

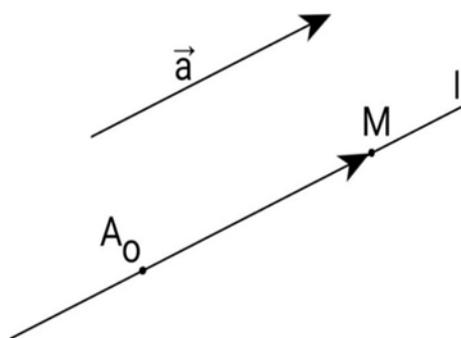


Рисунок 11 – Направляющий вектор прямой

Теорема 12.2. Прямая, проходящая через две точки $A_0(x_0, y_0)$ и $A_1(x_1, y_1)$, задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \quad (12.3)$$

Теорема 12.3. Прямая, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0)$ и имеющая вектор нормали $\vec{n}(A, B)$, задается в декартовой системе координат уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (12.4)$$

Теорема 12.4. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \quad (12.5)$$

которое называется *общим уравнением прямой*. И обратно, любое уравнение вида (12.5) на плоскости задает прямую.

Геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении прямой: это координаты вектора нормали к прямой: $\vec{n}(A, B)$.

Рассмотрим различные *частные случаи общего уравнения прямой*.

1. $C = 0 \Leftrightarrow l: Ax + By = 0$. Тогда уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0, 0)$, т.е. прямая проходит через начало координат.

2. $A = 0 \Leftrightarrow By + C = 0 \Leftrightarrow y = -C/B$. Прямая $l \parallel Ox$.

3. $B = 0 \Leftrightarrow Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -C/A$. Прямая $l \parallel Oy$.

4. $B \neq 0$, тогда (12.5) можно переписать так: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Обозначим $k = -A/B$, $q = -C/B$ и получим уравнение

$$y = kx + q, \quad (12.6)$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. *Угловым* называется коэффициент k .

Теорема 12.5. Прямая, отсекающая на координатных осях отрезки длины $a \neq 0$, $b \neq 0$, задается уравнением (*уравнение прямой в отрезках*)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (12.7)$$

Основные виды уравнений прямой в пространстве

Теорема 12.6.

1. Прямая l , проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}, \quad (12.9)$$

(*каноническое уравнение*), или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases} \quad (12.10)$$

которые можно записать в векторном виде: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, где $\vec{r}_0 = \vec{OA}_0$ – радиус-вектор точки A_0 .

2. Прямая, проходящая через две точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и $A_1(x_1, y_1, z_1)$, задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \quad (12.11)$$

3. Прямая, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно двум векторам нормали $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ (рисунок 12), задается в декартовой системе координат уравнений

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0. \end{cases} \quad (12.12)$$

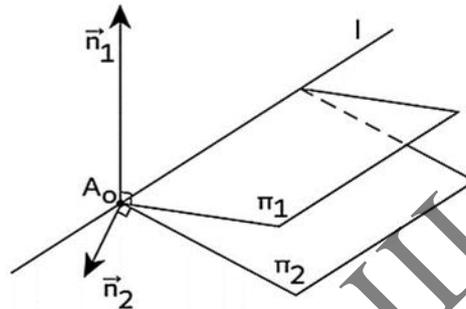


Рисунок 12 – Прямая, проходящая перпендикулярно двум векторам нормали

13. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Теорема 13.1.

1. Плоскость π , проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$, задается в декартовой системе координат уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (13.1)$$

2. Плоскость π , проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно двум неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.2)$$

3. Плоскость π , проходящая через три точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой (рисунок 13), задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.3)$$

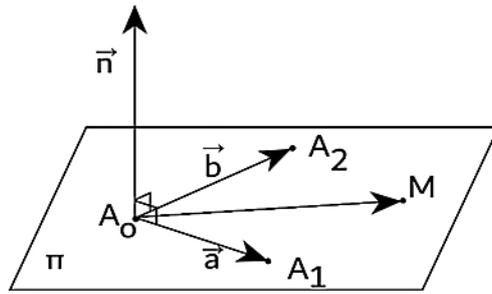


Рисунок 13 – Прямая, проходящая через три точки

4. Плоскость π , отсекающая на координатных осях ненулевые отрезки a, b, c , задается уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (13.4)$$

(предполагается, что a, b, c могут быть отрицательными).

Следствие. Любая плоскость определяется уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D \neq 0, \quad (13.5)$$

которое называется **общим уравнением плоскости**. И обратно, всякое уравнение вида (13.5) определяет плоскость.

Рассмотрим различные **частные случаи плоскостей**, задаваемых уравнениями вида (13.5).

1. $D = 0$. Тогда уравнению

$$Ax + By + Cz = 0$$

удовлетворяют координаты точки $O(0, 0, 0)$. Плоскость проходит через начало координат (рисунок 14).

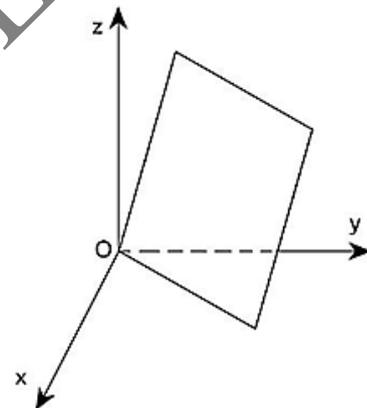


Рисунок 14 – Плоскость проходит через начало координат

2. $C = 0$. Имеем уравнение

$$Ax + By + D = 0.$$

Тогда вектор нормали к плоскости $\vec{n}(A, B, 0)$ и $\vec{n} \perp Oz$, а значит, $\pi \parallel Oz$, (рисунок 15).

Аналогично при $B = 0$ получим Oy , а при $A = 0$ – $\pi \parallel Ox$.

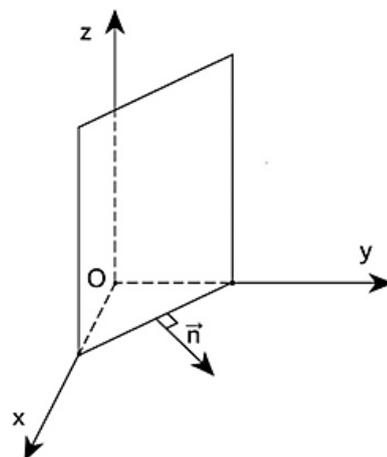


Рисунок 15 – Плоскость параллельна одной из осей координат

3. $A = B = 0$. Имеем уравнение

$$Cz + D = 0,$$

которое равносильно $z = -\frac{D}{C}$. Тогда $\pi \perp Oz$ (рисунок 16).

Аналогично при $A = C = 0$ будет $\pi \perp Oy$, а при $B = C = 0$ – $\pi \perp Ox$.

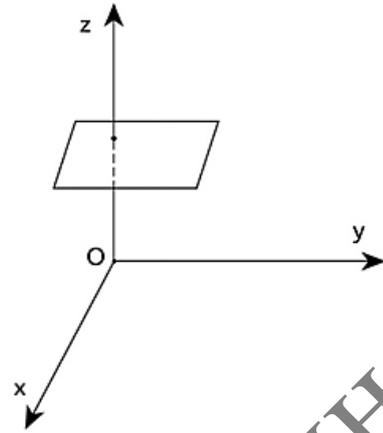


Рисунок 16 – Плоскость перпендикулярна одной из осей

Расстояние от точки до прямой на плоскости и плоскостей в пространстве

Определение 13.1. Говорим, что общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (13.7)$$

имеет нормальную форму, если $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Это равносильно тому, что вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – единичный.

Если уравнение (13.7) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\mu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Тогда будет выполнено $(A/\mu)^2 + (B/\mu)^2 + (C/\mu)^2 = 1$.

Теорема 13.2. Пусть плоскость π определяется уравнением (13.7) в нормальной форме. Тогда расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости вычисляется по формуле

$$h = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|. \quad (13.8)$$

Следствие. Если плоскость определяется произвольным уравнением вида (13.7), то

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (13.9)$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости в пространстве заданы общими уравнениями:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – это векторы нормали к π_1 и π_2 .

Теорема 13.3.

$$1. \pi_1 \parallel \pi_2 \text{ и } \pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$2. \pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

$$3. \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

4. Угол между π_1 и π_2 вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть плоскость π задана общим уравнением, а прямая l – каноническим уравнением:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad l: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}.$$

Тогда сразу можем отметить, что $\vec{n}(A, B, C)$ – это вектор нормали к плоскости π , $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой l и точка $A_0(x_0, y_0, z_0) \in l$.

Для удобства изложения в этом параграфе будем считать, что $l \in \pi$ – это частный случай $l \parallel \pi$.

Теорема 13.4.

$$1. l \in \pi \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

$$2. l \parallel \pi \text{ и } l \notin \pi \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$$

$$3. l \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}.$$

4. Угол между плоскостями l и π вычисляется по формуле

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

14. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипс

Определение 14.1. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение эллипса, обозначим через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. Пусть F_1, F_2 – *фокусы эллипса*. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через точки F_1, F_2 , а начало координат находилось на середине отрезка F_1F_2 . Тогда очевидно, что $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Определение 14.2. *Фокальными радиусами точки $M(x, y)$ эллипса* называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Теорема 14.1. Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала эллипсу, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Теорема 14.2. Если координаты точки $M(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, то эта точка принадлежит некоторому эллипсу.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Определение 14.3. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (14.1)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$ называется *каноническим уравнением эллипса*.

Свойство 14.1. Координатные оси являются осями симметрии эллипса. Начало координат является центром симметрии эллипса.

Пусть $M(x_0, y_0)$ – некоторая точка эллипса. Поскольку в уравнении эллипса все неизвестные возведены в квадрат, то эллипсу принадлежат так же точка $M_1(-x_0, y_0)$, симметричная относительно оси ординат; точка $M_2(x_0, -y_0)$, симметричная относительно оси абсцисс; точка $M_3(-x_0, -y_0)$, симметричная относительно начала координат.

Свойство 14.2. Эллипс пересекает координатные оси в точках

$$A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b).$$

Поскольку точки A_1, A_2 принадлежат оси абсцисс, а точки B_1, B_2 – оси ординат, то достаточно просто подставить их координаты в уравнения эллипса.

Свойство 14.3. Для любой точки эллипса $M(x, y)$ выполняются соотношения: $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$.

Свойство 14.4. Для любых точек эллипса, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината убывает. Это следует из того, что

$$y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} \right).$$

Определение 14.4. Отрезок $A_1 A_2$ и его длина $2a$ называется *большой осью*, а отрезок OA_2 и его длина a называется *большой полуосью*.

Определение 14.5. Отрезок $B_1 B_2$ и его длина $2b$ называется *меньшей осью*, а отрезок OB_2 и его длина b называется *меньшей полуосью*.

Определение 14.6. Отрезок $F_1 F_2$ и его длина $2c$ называется *фокусным расстоянием*.

Определение 14.7. Точки $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$ называются *вершинами эллипса*.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим эллипс (рисунок 17).

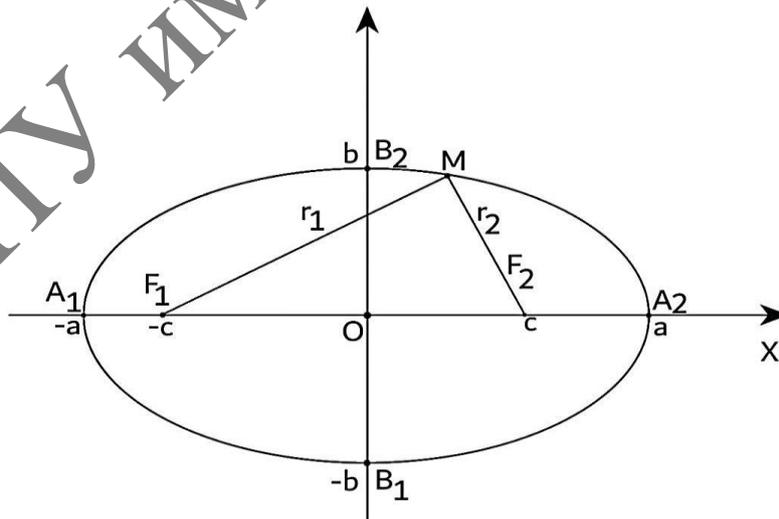


Рисунок 17 – Эллипс

Гипербола

Определение 14.8. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение гиперболы, обозначим через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. Пусть F_1, F_2 – **фокусы**. Систему координат выберем таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы, а начало координат находилось на середине отрезка F_1F_2 . Очевидно, что $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть M – произвольная точка гиперболы. Из определения следует, что $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Определение 14.9. *Фокальными радиусами точки $M(x, y)$ гиперболы* называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Теорема 14.3. Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала гиперболе, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (14.2)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Теорема 14.4. Если координаты точки $M(x_1, y_1)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, то эта точка принадлежит некоторой гиперболе.

Определение 14.10. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Свойство 14.5. Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Начало координат является центром симметрии гиперболы.

Свойство 14.6. Гипербола пересекает координатную ось OX в точках $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ и не пересекает ось OY .

Свойство 14.7. Для любой точки гиперболы $M(x, y)$ выполняется $|x| \geq a$. Из уравнения гиперболы:

$$x^2 = a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Отсюда $x^2 \geq a^2$ и поэтому $|x| \geq a$.

Свойство 14.8. Для любых точек гиперболы, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы их ордината возрастает. Из уравнения гиперболы получаем: $y^2 = -b^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2$. Поэтому, чем больше значение x , тем больше значение y .

Определение 14.11. Отрезок $A_1 A_2$ и его длина $2a$ называется *действительной осью*, а отрезок OA_2 и его длина a называется *действительной полуосью*.

Определение 14.12. Отрезок $B_1 B_2$ и его длина $2b$ называется *мнимой осью*, а отрезок OB_2 и его длина b называется *мнимой полуосью*.

Определение 14.13. Отрезок $F_1 F_2$ и его длина $2c$ называется *фокусным расстоянием*.

Определение 14.14. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ называются *вершинами гиперболы*.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим гиперболу (рисунок 18).

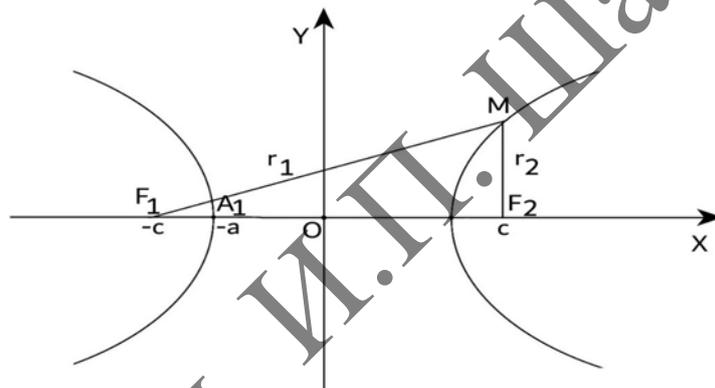


Рисунок 18 – Гипербола

Парабола

Определение 14.15. *Параболой* называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой *директрисой*.

Обозначим фокус параболы через F , а директрису – через d . Систему координат выберем таким образом, чтобы фокус лежал на положительном направлении оси абсцисс, директриса была параллельна оси ординат и начало координат находилось посередине между фокусом и директрисой. Расстояние между фокусом и директрисой обозначим через p . Тогда очевидно, что $F(\frac{p}{2}, 0)$ и директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Теорема 14.5. Для того чтобы точка M принадлежала параболе, необходимо, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$y^2 = 2px, \quad (14.3)$$

где p – некоторое действительное положительное число.

Теорема 14.6. Если координаты некоторой точки M удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где p – некоторое действительное положительное число, то эта точка принадлежит некоторой параболе.

Определение 14.16. Уравнение

$$y^2 = 2px,$$

где p – некоторое действительное положительное число, называется **каноническим уравнением параболы**.

Свойство 14.9. Абсцисса любой точки параболы неотрицательна.

Свойство 14.10. Парабола проходит через начало координат.

Свойство 14.11. Парабола симметрична относительно оси абсцисс.

Определение 14.17. Отрезок FM называется **фокальным радиусом**, а величина p – параметром параболы.

Определение 14.18. Ось абсцисс называется **осью симметрии параболы**, а точка пересечения параболы с осью абсцисс, которая совпадает с началом координат, – **вершиной параболы**.

Теперь, используя приведённые выше свойства, построим параболу (рисунок 19).

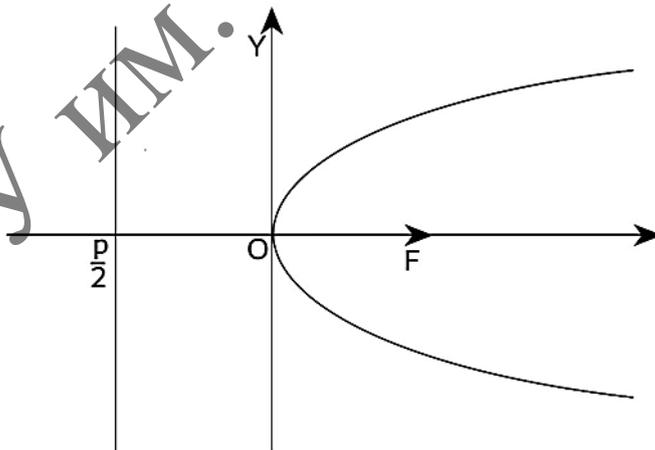


Рисунок 18 – Парабола

15. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цилиндры второго порядка

Определение 15.1. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), движущейся вдоль некоторой линии (направляющей) и остающейся параллельной исходному направлению.

Определение 15.2. Цилиндром второго порядка называется цилиндрическая поверхность, направляющей которой является эллипс (окружность), гипербола или парабола.

Рассмотрим цилиндры второго порядка, у которых образующая параллельна оси Oz (рисунки 20, 21, 22).

1) Эллиптический цилиндр

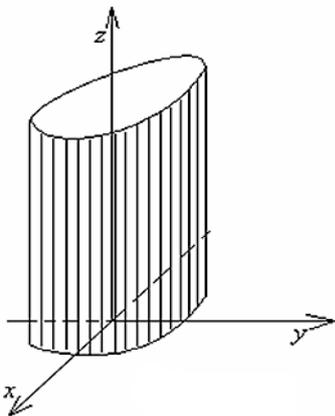


Рисунок 20 –

Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) Гиперболический цилиндр

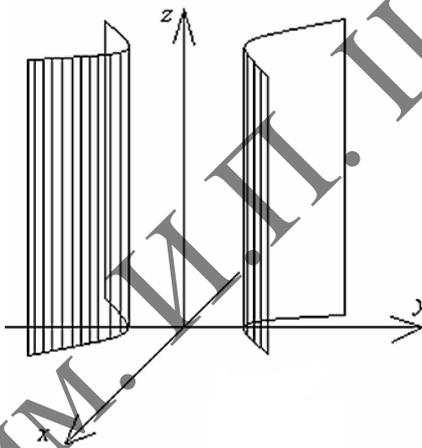


Рисунок 21 –

Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

3) Параболический цилиндр

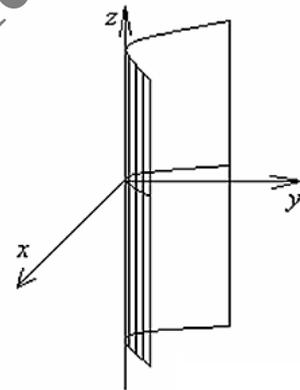


Рисунок 22 –

Параболический цилиндр

$$x^2 = 2py$$

В частности эллиптический цилиндр имеет в качестве направляющей окружность. Его уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ или $x^2 + y^2 = a^2$.

Поверхности вращения второго порядка

Определение 15.3. Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, образованная вращением линии второго порядка вокруг её оси (рисунки 23–27).

1) Эллипсоид вращения

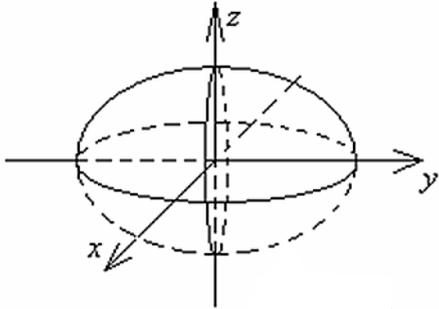


Рисунок 23 – Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

При вращении эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

$x = 0$ вокруг оси Oz получим эллипсоид вращения. При $a = c$ получаем сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2) Однополостный гиперболоид

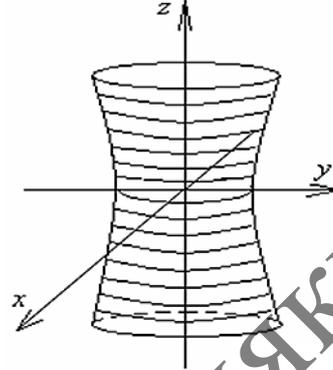


Рисунок 24 – Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Однополостный гиперболоид образуется при вращении гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$ вокруг оси Oz .

3) Двуполостный гиперболоид

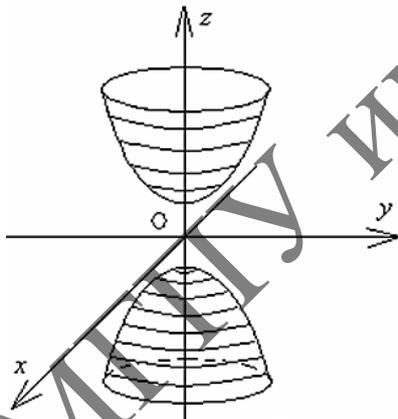


Рисунок 25 – Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Двуполостный гиперболоид образуется при вращении гиперболы $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$ вокруг оси Oz .

4) Конус вращения

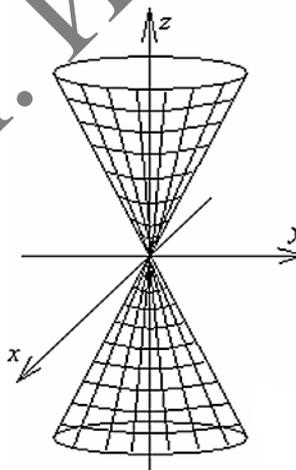


Рисунок 26 – Конус вращения

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Конус вращения образуется при вращении прямых $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $x = 0$ вокруг оси Oz .

5) Параболоид вращения

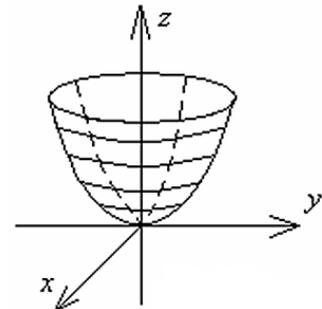


Рисунок 27 – Параболоид вращения

$$x^2 + y^2 = 2pz \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$$

Параболоид вращения получается вращением параболы $y^2 = 2pz$, $x = 0$ вокруг оси Oz .

Поверхности второго порядка

1. Трёхосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рисунок 28).

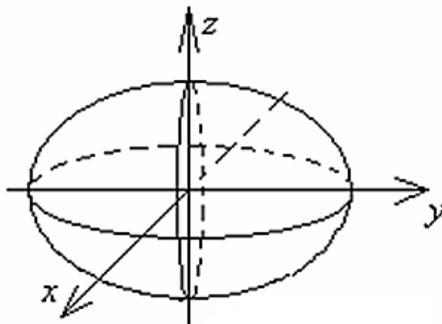


Рисунок 28 – Трёхосный эллипсоид

2. Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3. Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

4. Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

5. Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

6. Гиперболический параболоид $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ (рисунок 29).

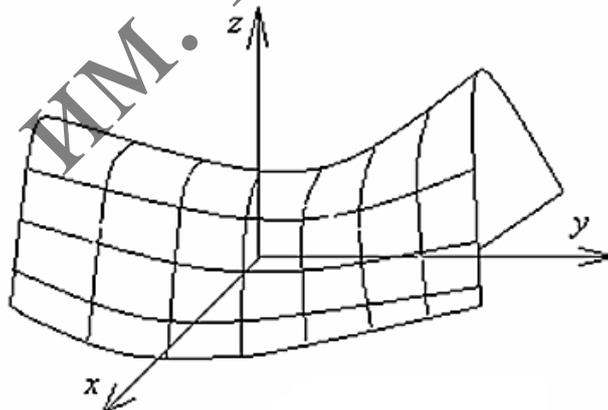


Рисунок 29 – Гиперболический параболоид

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
2. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Л. Л. Березкина. – Минск : РИВШ, 2012. – 354 с.
3. Ефремова, М. И. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : справ. для студентов специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика» специализации 1-31 04 08 03 «Компьютерное моделирование физических процессов» / М. И. Ефремова. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2022. – 66 с.
4. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 223 с.
5. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.
6. Коваленко, Н. С. Высшая математика: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия / Н. С. Коваленко, Т. И. Чепелева. – Минск : Юнипресс, 2006 – 207 с.
7. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры : в 3 ч. / А. И. Кострикин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. – Ч. 1. – 272 с.
8. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Лань, 2021. – 432 с.
9. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск : Амалфея, 2001. – Ч. 1. – 400 с. ; Ч. 2. – 352 с.
10. Плющ, О. Б. Высшая математика : курс лекций / О. Б. Плющ. – Минск : – Академия управления при президенте Респ. Беларусь, 2005. – Ч. 1 : Элементарная математика, аналитическая геометрия, линейная алгебра. – 167 с.
11. Подоксенов, М. Н. Аналитическая геометрия : курс лекций с примерами решения задач / М. Н. Подоксенов. – Витебск : ВГУ, 2006. – 140 с.
12. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : Наука, 1978. – 384 с.
13. Размыслович, Г. П. Сборник задач по геометрии и алгебре / Г. П. Размыслович, М. М. Феденя, В. М. Ширяев. – Минск : Універсітэцкае, 1999. – 393 с.
14. Умнов, А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. Е. Умнов. – М. : МФТИ, 2011. – 570 с.
15. Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – СПб. : Лань, 2001. – 288 с.
16. Шнеперман, Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел : учеб. пособие для физико-мат. специальностей вузов / Л. Б. Шнеперман. – Минск : Дизайн ПРО, 2000. – 239 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебраическое дополнение
элемента 29
- Аффинная система координат
на плоскости 8
в пространстве 9
- Базис
на плоскости 8
в пространстве 8
системы векторов 19
векторного пространства 20
- Базисный минор матрицы 33
- Вектор 5
вектор нормали 37
единичный 6
коллинеарные 5
компланарные 5
направляющий прямой 37
нулевой 5
нулевой связанный 5
ненулевой 5
ненулевой связанный 5
ортогональные 5
противоположный 6
равные 5
равные числовые 17
свободный 5
связанный 5
эквивалентные 5
n-мерный числовой 17
- Гипербола 45
вершины гиперболы 46
действительная ось гиперболы 46
действительная полуось
гиперболы 46
каноническое уравнение
гиперболы 45
мнимая ось гиперболы 46
мнимая полуось гиперболы 46
фокусы гиперболы 45
фокальные радиусы точки
гиперболы 45
фокусное расстояние гиперболы 45
- Гиперболоид
Однополостный 49
Двуполостный 49
- Длина или модуль
вектора 5
связанного вектора 5
- Инверсия 25
- Координаты
точки 10
вектора 10, 17, 21
- Конус второго порядка 50
- Коэффициенты
линейной комбинации
векторов 8, 21
разложения вектора 8
- Критерий
коллинеарности двух векторов 13
компланарности трех векторов 13
ортогональности двух векторов 12
ортогональности плоскостей 41
ортогональности прямой
плоскости 42
параллельности плоскостей 41
параллельности прямой
плоскости 42
принадлежности прямой
плоскости 42
равенства плоскостей 41
- Линейная комбинация векторов 8
- Линейное (векторное)
пространство 15
арифметическое 18
n-мерное 17, 20
- Матрица 21
вырожденная (особенная) 29
диагонального вида 22

- единичная 24
 квадратная 21
 линейно зависимые строки
 матрицы 33
 линейно независимые строки
 матрицы 33
 невырожденная (неособенная) 29
 нулевая 24
 обратимая 29
 перестановочные 24
 присоединенная 30
 равные 21
 скалярная 24
 транспонированная 24
 треугольного вида 22
 элементарные преобразования
 матрицы 30
 Матричные уравнения 34
 решение матричного уравнения 34
 Минор элемента 29
 Начало координат 8, 9
 Определитель
 матрицы 25
 треугольного вида 28
 разложение определителя
 по строке 29
 разложение определителя
 по столбцу 29
 Ось
 абсцисс 9
 ординат 9
 аппликат 9
 Парабола 46
 вершина параболы 47
 директриса параболы 46
 каноническое уравнение
 параболы 47
 ось симметрии параболы 47
 уравнение директрисы
 параболы 46
 Параболоид
 вращения 49
 гиперболический 50
 эллиптический 50
 Перестановка 24
 нечетная 25
 четная 25
 Поверхность вращения второго
 порядка 49
 Подпространство 21
 пересечение подпространств 21
 сумма подпространств 21
 Правило параллелограмма 6
 Правило Крамера 33
 Проекция вектора
 векторная 7
 радиус-вектора 10
 скалярная 8
 Проекция точки на координатные
 оси 10
 Произведение векторов
 векторное 12, 14
 скалярное 11, 14
 смешанное 13, 15
 Произведение
 вектора на число 6, 17
 матрицы на число 22
 матриц 23
 Прямоугольная декартова система
 координат 10
 Радиус-вектор точки 10
 Разложение вектора 21
 Размерность пространства 20
 Разность векторов 16
 Ранг
 матрицы 30
 ступенчатой матрицы 30
 системы векторов 19
 строчечный ранг матрицы 30
 столбцовый ранг матрицы 30
 Расстояние от точки до плоскости 41
 Скалярный квадрат вектора 11
 Система векторов
 линейно зависимая 18

- линейно независимая 18
 линейно выражается 19
 эквивалентные 19
 Система линейных уравнений 31
 базисные неизвестные системы 34
 матричный способ решения систем 32
 определённая 31
 неопределённая 31
 несовместная 31
 свободные неизвестные системы 36
 совместная 31
 решение системы 31
 элементарные преобразования системы 32
 Сумма
 векторов 6
 числовых векторов 17
 матриц 22
 Транспозиция 25
 Тройка векторов
 левая 12
 правая 12
 Угол
 между векторами 5, 14
 между плоскостями 41
 между прямой и плоскостью 42
 Уравнение плоскости 39
 общее 40
 нормальная форма общего уравнения 41
 Уравнение прямой
 в отрезках 38
 каноническое 37, 38
 общее 38
 проходящей через две точки 37
 с угловым коэффициентом 38
 Цилиндр
 второго порядка 48
 гиперболический 48
 параболический 48
 эллиптический 48
 Элементы матрицы 21
 Эллипс 43
 большая ось эллипса 44
 большая полуось эллипса 44
 вершины эллипса 44
 каноническое уравнение эллипса 43
 меньшая ось эллипса 44
 меньшая полуось эллипса 44
 фокальные радиусы точки эллипса 43
 фокусы эллипса 43
 фокусное расстояние 44
 Эллипсоид
 вращения 49
 трехосный 50

Справочное издание

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Справочник

Составители:

Ефремова Марина Ивановна,
Игнатович Снежана Владимировна

Корректор *Л. М. Мазуркевич*
Оригинал-макет *М. В. Бобкова*
Дизайн обложки *Л. В. Клочкова*

Иллюстративный материал на первой странице обложки заимствован из общедоступных Интернет-ресурсов, не содержащих ссылок на авторов этих материалов и ограничения на их заимствование.

Подписано в печать 05.04.2024. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 3,20. Уч.-изд. л. 2,54.
Тираж 99 экз. Заказ 5.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Мозырский государственный
педагогический университет имени И. П. Шамякина».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий N 1/306 от 22 апреля 2014 г.
Ул. Студенческая, 28, 247777, Мозырь, Гомельская обл.
Тел. (0236) 24-61-29.