

отметить, что аналогичные особенности АО взаимодействия могут наблюдаться в кристаллах теллура в инфракрасном диапазоне спектра [6].

#### Список использованных источников

1. Linfoot, E.H. Diffraction Images in Systems with an Annular Aperture / E.H. Linfoot, E. Wolf // Proceedings of the Physical Society. Section B. – 1953. – V. 66, № 2. – P. 145.
2. Wolford, W.T. Use of Annular Aperture to Increase Focal Depth / W.T. Wolford // Journal of the Optical Society of America. – 1960. – V. 50, № 8. – PP. 749–753.
3. Формирование бесселевых световых пучков на больших расстояниях из кольцевых полей / Н.А. Хило, П.И. Ропот, П.К. Петров, В.Н. Белый // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 90–100.
4. Grunwaild, R. Needle beams: a review / R. Grunwaild, M. Bock // Advances in Physics: X. – 2020. – Vol. 8, № 1. 1736950 <https://doi.org/10.1080/23746149.2020.1736950>.
5. Белый, В.Н. Дифракция световых пучков на затухающих ультразвуковых волнах в оптически изотропных средах / В.Н. Белый, И.Г. Войтенко, Г.В. Кулак // Журнал прикладной спектроскопии. – 1992. – Т. 56, № 5–6. – С. 831–836.
6. Исследование акустооптических характеристик кристаллов теллура в режиме анизотропной дифракции / В.И. Балакший., В.Б. Волошинов, Г.А. Князев, Л.А. Кулакова // ЖТФ. – 2008. – Т. 78, В. 10. – С. 87–95.
7. Блистанов, А.А. Кристаллы квантовой и нелинейной оптики / А.А. Блистанов. – М. : МИСИС, 2000. – 431 с.
8. Балакший, В.И. Физические основы акустооптики / В.И. Балакший, В.И. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М. : Радио и связь, 1985. – 279 с.

УДК 535.326

**Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко, Л.А. Тозик**

*Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина*

#### **РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН В ТРЕХМЕРНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ $S_i/S_iO_2$**

Развита теория распространения световых волн в трехмерных фотонных кристаллах методом преобразования Фурье в аналитической форме. Установлены дисперсионные зависимости и комплексные векторные амплитуды блоховских волн трехмерного фотонного кристалла. Показано, что в кристаллической структуре кристалла  $S_i/S_iO_2$  плотность потока световой мощности для s-поляризованной волны в 2,5 раза больше, чем для p-поляризованной волны.

**Ключевые слова:** трехмерный фотонный кристалл, дисперсионная зависимость, функция Блоха, плотность потока мощности.

**Введение.** Наличие в веществе периодической структуры (фотонный кристалл (ФК)), имеющей период, близкий к длине электромагнитной волны, приводит к формированию в системе разрешенных для распространения волн зон и запрещенных фотонных зон [1].

На основе одномерных фотонных кристаллов (см. [2]) были созданы новые оптические устройства: высокودобротные резонаторы, спектральные фильтры, селективные зеркала, нелинейные оптические элементы.

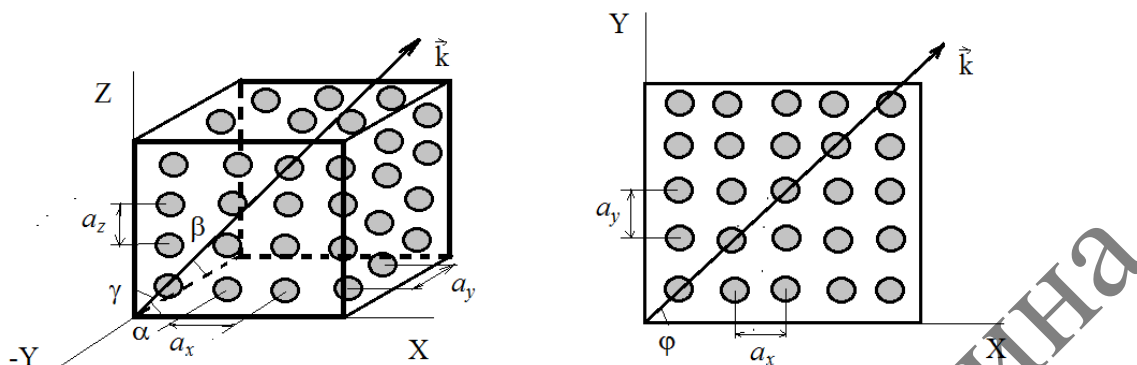


Рисунок 1 – Схема распространения света в трехмерном (а) и двумерном (б) ФК (ФК – кристалл,  $\alpha, \beta, \gamma$  – направляющие углы волнового вектора световой волны относительно осей  $X, Y, Z$ ;  $\varphi$  – угол распространения волны в плоскости  $XY$ ;  $a_x, a_y, a_z$  – постоянные решетки вдоль осей  $X, Y, Z$  соответственно)

В настоящее время особый интерес представляют трехмерные ФК, построенные из глобул одинакового диаметра. В работе [3] установлено, что картина дифракции света на искусственных опалах представляет собой ряд интенсивных максимумов, число и угловое положение которых зависит от длины волны и взаимной ориентации падающего светового пучка и кристаллографических плоскостей образца.

На рисунке 1 представлен трехмерный фотонный кристалл с квадратной решеткой [3].

**Теоретические результаты и обсуждение.** Из уравнений Максвелла и материальных уравнений для ФК следует волновое уравнение для напряженности магнитного поля  $\vec{H} \sim \exp(-i\omega t)$  [2, 3]:

$$\text{rot}(\hat{\epsilon}^{-1}(\vec{r}, t) \text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где

$$\hat{\epsilon}^{-1}(\vec{r}, t) = \hat{\epsilon}^{-1}(\vec{r}), \quad (2)$$

причем  $\hat{\epsilon}^{-1}(\vec{r})$  – обратный тензор диэлектрической проницаемости ФК. Решение уравнения (1) ищем в виде суммы волн Блоха с различными векторами обратной решетки

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{G}} \vec{M}(\vec{G}) e^{i(\vec{k} + \vec{G}) \cdot \vec{r}}, \quad (3)$$

где  $\vec{M}(\vec{G})$  – амплитуды спектральных составляющих блоховских волн ФК.

Полагалось, что вектор обратной решетки ФК имеет вид:  $\vec{G} = m_x \vec{b}_x + m_y \vec{b}_y + m_z \vec{b}_z$  ( $m_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), где  $\vec{b}_x = (2\pi/a_x) \vec{e}_x$ ,  $\vec{b}_y = (2\pi/a_y) \vec{e}_y$ ,  $\vec{b}_z = (2\pi/a_z) \vec{e}_z$ , причем  $a_{x,y,z}$  – период решетки вдоль осей  $X, Y, Z$ , соответственно,  $\vec{e}_{x,y,z}$  – единичные векторы вдоль осей  $X, Y, Z$ .

Тензор диэлектрической непроницаемости ФК разложим по векторам обратной решетки  $\vec{G}$  следующим образом:

$$\varepsilon_{kl}^{-1}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \zeta_{kl}(\vec{G}) e^{i\vec{G}\vec{r}}, \quad (4)$$

где

$$\zeta_{kl}(\vec{G}) = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{kl}^{-1} e^{i\vec{G}\vec{r}} d^3\vec{r}, \quad (5)$$

причем  $V$  – объем элементарной ячейки ФК;  $\kappa, l = 1 \div 3$ . Полагаем в дальнейшем, что для трехмерного ФК тензор  $\zeta_{\kappa l}$  является  $3 \times 3$ -матрицей.

Подставив выражения (3)-(5) в (1), получим следующее векторно-тензорное равенство:

$$\sum_{\vec{G}'} \left[ (\vec{k} + \vec{G}'), \hat{\zeta}(\vec{G}') \right] (\vec{k} + \vec{G}), \vec{M} \Big] e^{i(\vec{k} + \vec{G})\vec{r}} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{M}(\vec{G}) e^{i(\vec{k} + \vec{G})\vec{r}}. \quad (6)$$

Уравнение (8) является основным для расчета дисперсионного уравнения  $\omega = \omega(k)$  и компонент вектора  $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ , где  $\tau$  – операция транспонирования.

Выполнив алгебраические преобразования на основании выражения (6) с учетом соотношения для  $3 \times 3$ -матрицы  $\zeta_{kl}$  получим систему линейных однородных уравнений вида:

$$\begin{aligned} b_{11}M_x + b_{12}M_y + b_{13}M_z &= 0, \\ b_{21}M_x + b_{22}M_y + b_{23}M_z &= 0, \\ b_{31}M_x + b_{32}M_y + b_{33}M_z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sum_{\vec{G}} \zeta_{12}(k_z + b_z m_z)(k_y + b_y m_y) - \sum_{\vec{G}} \zeta_{13}(k_y + b_y m_y)(k_y + b_y m_y) - \\ &- \sum_{\vec{G}} \zeta_{21}(k_z + b_z m_z)(k_z + b_z m_z) + \sum_{\vec{G}} \zeta_{23}(k_y + b_y m_y)(k_z + b_z m_z) - \frac{\omega^2}{c^2}, \\ b_{12} &= -\sum_{\vec{G}} \zeta_{11}(k_z + b_z m_z)(k_y + b_y m_y) + \sum_{\vec{G}} \zeta_{13}(k_x + b_x m_x)(k_y + b_y m_y) + \\ &+ \sum_{\vec{G}} \zeta_{21}(k_z + b_z m_z)(k_z + b_z m_z) - \sum_{\vec{G}} \zeta_{23}(k_x + b_x m_x)(k_z + b_z m_z), \\ b_{13} &= \sum_{\vec{G}} \zeta_{11}(k_y + b_y m_y)(k_y + b_y m_y) - \sum_{\vec{G}} \zeta_{12}(k_x + b_x m_x)(k_y + b_y m_y) - \\ &- \sum_{\vec{G}} \zeta_{21}(k_y + b_y m_y)(k_z + b_z m_z) + \sum_{\vec{G}} \zeta_{22}(k_x + b_x m_x)(k_z + b_z m_z), \\ b_{21} &= \sum_{\vec{G}} \zeta_{12}(k_z + b_z m_z)(k_z + b_z m_z) + \sum_{\vec{G}} \zeta_{13}(k_y + b_y m_y)(k_z + b_z m_z) - \\ &- \sum_{\vec{G}} \zeta_{32}(k_z + b_z m_z)(k_x + b_x m_x) - \sum_{\vec{G}} \zeta_{33}(k_y + b_y m_y)(k_x + b_x m_x), \\ b_{22} &= -\sum_{\vec{G}} \zeta_{11}(k_z + b_z m_z)(k_z + b_z m_z) + \sum_{\vec{G}} \zeta_{13}(k_x + b_x m_x)(k_z + b_z m_z) + \\ &+ \sum_{\vec{G}} \zeta_{31}(k_z + b_z m_z)(k_x + b_x m_x) - \sum_{\vec{G}} \zeta_{33}(k_x + b_x m_x)(k_x + b_x m_x) - \frac{\omega^2}{c^2}, \\ b_{23} &= \sum_{\vec{G}} \zeta_{11}(k_z + b_z m_z)(k_y + b_y m_y) - \sum_{\vec{G}} \zeta_{12}(k_x + b_x m_x)(k_z + b_z m_z) - \\ &- \sum_{\vec{G}} \zeta_{31}(k_y + b_y m_y)(k_x + b_x m_x) + \sum_{\vec{G}} \zeta_{32}(k_x + b_x m_x)(k_x + b_x m_x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{31} &= \sum_G \zeta_{22}(k_z + b_z m_z)(k_x + b_x m_x) - \sum_G \zeta_{23}(k_x + b_x m_x)(k_y + b_y m_y) - \\
&- \sum_G \zeta_{12}(k_y + b_y m_y)(k_z + b_z m_z) + \sum_G \zeta_{13}(k_y + b_y m_y)(k_x + b_x m_x), \\
b_{32} &= -\sum_G \zeta_{21}(k_z + b_z m_z)(k_x + b_x m_x) + \sum_G \zeta_{23}(k_x + b_x m_x)(k_x + b_x m_x) + \\
&+ \sum_G \zeta_{11}(k_z + b_z m_z)(k_y + b_y m_y) - \sum_G \zeta_{13}(k_x + b_x m_x)(k_y + b_y m_y), \\
b_{33} &= \sum_G \zeta_{21}(k_y + b_y m_y)(k_x + b_x m_x) - \sum_G \zeta_{22}(k_x + b_x m_x)(k_x + b_x m_x) - \\
&- \sum_G \zeta_{11}(k_y + b_y m_y)(k_y + b_y m_y) + \sum_G \zeta_{12}(k_x + b_x m_x)(k_y + b_y m_y) - \frac{\omega^2}{c^2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь следует полагать, что  $k_x = k \cos \alpha, k_y = k \cos \beta, k_z = k \cos \gamma$ , причем  $\alpha, \beta, \gamma$  – направляющие углы волнового вектора волны Блоха относительно соответственно осей  $X, Y, Z$ . Суммирование по  $G$  в выражениях (8) означает в соответствии с определением вектора обратной решетки ФК суммирование по  $m_x, m_y, m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Для первой зоны Бриллюэна следует полагать  $m_x, m_y, m_z = 0, \pm 1$  и для второй зоны  $m_x, m_y, m_z = 0, \pm 1, \pm 2$ .

Для нетривиального решения системы (7) необходимо чтобы ее определитель равнялся нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

или

$$\begin{aligned}
&(b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{21}b_{13}b_{32}) - \\
&-(b_{13}b_{22}b_{31} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{32}b_{23}b_{11}) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Выражение (10) является дисперсионным уравнением для волн Блоха трехмерного фотонного кристалла.

Положив  $M_z = 1$ , из системы уравнений (7) получаем следующие выражения для  $M_x$  и  $M_y$ :

$$M_x = \frac{(b_{23}b_{12} - b_{13}b_{22})}{(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{22})}, \quad M_y = \frac{(b_{13}b_{21} - b_{11}b_{23})}{(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{22})}. \tag{11}$$

Из выражения (3) получаем следующее выражение для напряженности магнитного поля  $\vec{H}(x, y, z) = \vec{U}(x, y, z) \exp(i\vec{k}\vec{r})$ , где вектор-функция Блоха трехмерного ФК имеет вид:

для первой зоны Бриллюэна

$$\vec{U}(x, y, z) = \left\{ \vec{e}_z + \vec{e}_x M_x \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} \right) \right] + \vec{e}_y M_y \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} \right) \right] \right\}, \tag{12a}$$

для второй зоны Бриллюэна

$$\begin{aligned}
\vec{U}(x, y, z) &= \left\{ \vec{e}_z + \vec{e}_x M_x \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} \right) \right] + \vec{e}_y M_y \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} \right) \right] \right\} + \\
&+ \left\{ \vec{e}_x M_x \cos \left[ 4\pi \left( \frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} \right) \right] + \vec{e}_y M_y \cos \left[ 4\pi \left( \frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{12b}$$

Вектор Пойтинга волны Блоха находим из соотношения:  $\vec{S} = \hat{k} |\vec{U}|^2 / 2\bar{n}c$ , где  $\hat{k}$  – единичный вектор в направлении распространения световой волны,  $\bar{n}$  – средний показатель преломления ФК. При расчетах полагалось, что компоненты тензора диэлектрической непроницаемости ФК даются соотношениями:

$$\zeta_{kl} = \frac{f}{\varepsilon_{kl}^1} + \frac{1-f}{\varepsilon_{kl}^2}, \quad (13)$$

где  $\varepsilon_{kl}^1$  – компонента тензора диэлектрической проницаемости включения,  $\varepsilon_{kl}^2$  – компонента тензора диэлектрической проницаемости матрицы. Коэффициент заполнения ФК  $f = V_1/V$ , где  $V$  – объем элементарной ячейки ФК,  $V_1$  – объем занимаемый включением в элементарной ячейке.

При распространении света в плоскости ХУ в выражениях (12) следует положить  $z=0$ . В этом случае имеют место равные нулю компоненты тензора диэлектрической непроницаемости ФК:  $\zeta_{31}=\zeta_{32}=\zeta_{13}=\zeta_{23}=0$ . При этом дисперсионное уравнение (9) для s-поляризованных волн принимает следующий вид:

$$\sum_G \left[ (k_x + b_x m_x)(k_y + b_y m_y) \zeta_{12} - (k_x + b_x m_x)(k_x + b_x m_x) \zeta_{22} - (k_y + b_y m_y)(k_y + b_y m_y) \zeta_{11} + (k_y + b_y m_y)(k_x + b_x m_x) \zeta_{12} \right]^2 = k_0^4, \quad (14a)$$

и для р- поляризованных волн

$$\sum_G \left[ (k_x + b_x m_x)(k_y + b_y m_y)(k_y + b_y m_y)(k_x + b_x m_x) \zeta_{33} \right] + \sum_G \left[ k_0^2 - (k_x + b_x m_x)(k_x + b_x m_x) \zeta_{33} \right] \cdot \left[ (k_y + b_y m_y)(k_y + b_y m_y) \zeta_{33} - k_0^2 \right] = 0, \quad (14б)$$

где  $k_x = k \cos \varphi, k_y = k \sin \varphi$ .

На рисунке 2 представлена зависимость квадрата функции Блоха  $|\vec{U}_n(x_n, y_n)|^2$  для s-поляризованной волны, распространяющейся в плоскости ХУ от нормированной координаты  $x_n = x/a_x$  и  $y_n = y/a_y$ .

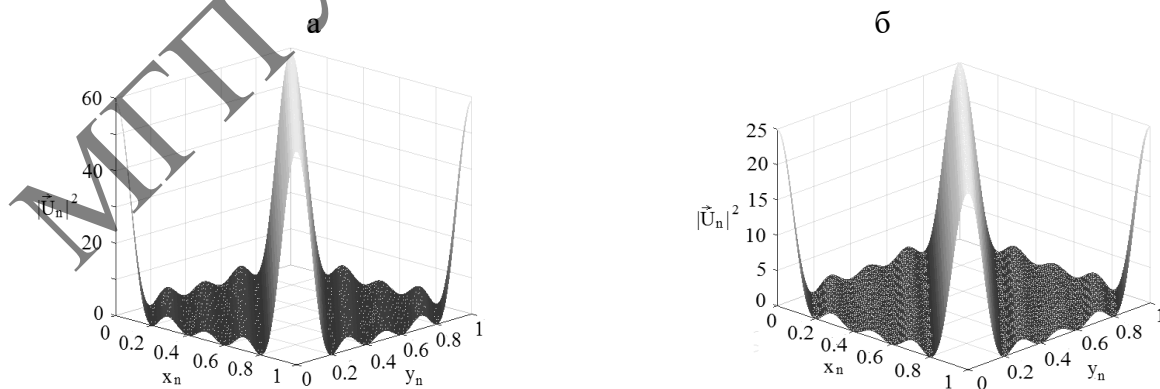


Рисунок 2 – Зависимость квадрата нормированной функции Блоха  $|\vec{U}_n(x_n, y_n)|^2$  от нормированной координаты  $x_n$  и  $y_n$  (фотонный кристалл Si/SiO<sub>2</sub>,  $a_x=a_y=120$  нм,  $\lambda=1,5$  мкм,  $\varphi=1^\circ$ ,  $k_n=2$ ; s-поляризация (а), р-поляризация (б))

Из рисунка 2 следует, что функция Блоха имеет осциллирующий характер, достигая максимального значения на границах зоны Бриллюэна. При этом максимум квадрата амплитуды функции Блоха для р-поляризованной волны в 2,5 раза меньше, чем для s-поляризованной волны.

**Заключение.** Рассмотрена теоретическая модель распространения световых волн в трехмерных фотонно-кристаллических структурах типа  $\text{Si}/\text{SiO}_2$ . Получены аналитические выражения для дисперсионных зависимостей и блоховских s- и р-поляризованных волн кристалла. Показано, что плотность потока световой мощности для s-поляризованной волны в 2,5 раза больше, чем для р-поляризованной волны.

#### Список использованных источников

1. Горелик, В.С. Оптика глобулярных фотонных кристаллов / В.С. Горелик // Квант. электрон. – 2007. – Т. 37, № 5. – С. 409–432.
2. Нурлигареев, Д.Х. Распространение света в одномерном фотонном кристалле: анализ методом функций Флоке-Блоха / Д.Х. Нурлигареев, В.А. Сычугов // Квант. электрон. – 2008. – Т. 38, № 5. – С. 452–461.
3. Брэгговская дифракция света в искусственных опалах / А.В. Барышев, В.А. Каплянский, В.А. Кособукин [и др.] // ФТТ. – 2003. – Т. 45, В. 3. – С. 434–445.

УДК 535.317; 534.535

С.Н. Курилкина, В.Н. Белый, Н.А. Хило

*Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси*

## ОПТИЧЕСКИЕ И АКУСТИЧЕСКИЕ СОВЕРШЕННЫЕ ВИХРЕВЫЕ ПУЧКИ

Показана невозможность формирования с помощью линзы оптических и акустических совершенных вихревых пучков, фурье-образ которых не зависит от топологического заряда, на основе бессель-гауссовых (БГП), практически реализуемых пучков. Найдена зависимость положения максимума интенсивности фурье-образа БГП от его параметров (угла конусности и размера перетяжки). Установлено, что смещение максимума интенсивности фурье-образа бессель-гауссова пучка от положения кольца, соответствующего фурье-образу бесселева пучка, возрастает с уменьшением угла конусности.

**Ключевые слова:** вихревой пучок, совершенный вихревой пучок, бессель-гауссов пучок, линза, фокальная плоскость линзы.

**Введение.** В настоящее время внимание многих исследователей привлекают вихревые пучки – световые и акустические поля, обладающие орбитальным угловым моментом, описываемым фазовым множителем  $\exp(im\phi)$ , где  $m$  – топологический заряд. К ним, в частности, относятся нашедшие широкое применение бесселевы световые (БСП) и акустические (БАП) вихревые пучки [1–3]. Известно, что их поперечное распределение интенсивности характеризуется осевым минимумом, ширина которого оказывается зависящей от величины  $m$ .

Предложены совершенные оптические вихревые пучки (СОВП), для которых ширина осевого минимума не зависит от топологического заряда [4]. СОВП