$$dS^2 = dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - dr^2, \quad \varphi = (1 - r^2);$$

соответствующая этой метрике тетрада может быть выбрана такой:

$$e_{(0)\alpha} = (1,0,0,0), \quad e_{(3)\alpha} = (0,0,0,1), \quad e_{(1)\alpha} = (0,\frac{1}{r},0,0), \quad e_{(2)\alpha} = (0,0,\frac{1}{r\sin\theta},0),$$

тогда спинорное уравнение Максвелла примет вид

$$\{\frac{\partial}{\partial t} + \sigma^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}(-\sigma^1 \frac{\sigma^2 \otimes I + I \otimes \sigma^2}{2} + \sigma^2 \frac{\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1}{2}) +$$
$$+ \frac{1}{r}[\sigma^1 \partial_\theta F - i\sigma^2 \frac{i\partial_\phi + \cos\theta(\sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3)/2}{\sin\theta}]\}\xi = 0.$$

Следует специально отметить, что в обычной схеме уравнения Максвелла содержат 8 дифференциальных уравнений для 6-ти вещественных функций; спинорная форма заменяет их на 4 уравнения для трех комплексно-значных функций; фактически они строятся как комбинация из двух 3-векторов $(E + icB)$ (при этом, как показывает анализ конкретных примеров, из 4-х уравнения только три являются независимыми).

Список использованных источников

1. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. − Минск : Белорусская наука, 2009. − 486 с.

2. Спинорные методы в квантовой механике частиц с высшими спинами / А.В. Ивашкевич, Я.А. Войнова, Н.Г. Крылова [и др.]. – Минск : Белорусская наука, 2024. – 433 с.

УДК 537.8

Е.М. Овсиюк[1], А.В. Ивашкевич[2], В.М. Редьков[2]

[1]Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

[2]Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА, СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Развит метод построения решений спинорных уравнений Максвелла в пространствах с псевдоримановой геометрической структурой. Метод основан на использовании тетрадного формализма, при этом для определенности использована геометрия пространства де Ситтера. В качестве простого примера рассмотрено основное радиальное уравнение для электромагнитного поля в случае пространства Минковского.

Ключевые слова: спинорные уравнения Максвелла, тетрадный формализм, сферическая симметрия, разделение переменных, точные решения.

Будем рассматривать спинорное уравнение Максвелла в сферической системе координат (для определенности выберем случай пространства де Ситтера; меняя функцию φ можно перейти к другим геометрическим моделям: например, к метрике Шварцшильда):

$$dS^2 = \varphi dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{\varphi}, \quad \varphi = (1 - r^2).$$

Выбираем диагональную сферическую тетраду:

$$x^\alpha = (t, \theta, \phi, r), \varphi = 1 - r^2, \varphi' = \frac{d\varphi}{dr}, \quad e_{(0)\alpha} = (\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, 0,0,0),$$

$$e_{(3)\alpha} = (0,0,0,\sqrt{\varphi}), \quad e_{(1)\alpha} = (0, \frac{1}{r}, 0,0), \quad e_{(2)\alpha} = (0,0,\frac{1}{r\sin\theta}, 0),$$

тогда спинорное уравнение Максвелла примет вид

$$\{\frac{\partial}{\partial t} + \varphi[\sigma^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}(-\sigma^1 \frac{\sigma^2 \otimes I + I \otimes \sigma^2}{2} + \sigma^2 \frac{\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1}{2}) + \frac{\varphi'}{2\varphi}\sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 2] +$$

$$+ \frac{\sqrt{\varphi}}{r}[\sigma^1 \partial_\theta F - i\sigma^2 \frac{i\partial_\phi + \cos\theta(\sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3)/2}{\sin\theta}]\}\xi = 0.$$

Будем строить решения со сферической симметрией, диагонализируя операторы квадрата и третьей проекции полного углового момента. В выбранном базисе компоненты полного углового момента имеют шредингеровский вид:

$$J_1 = l_1 + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} S_3, \quad J_2 = l_2 + \frac{\sin\phi}{\sin\theta} S_3, \quad J_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi},$$

где матрица третьей проекции спина для спинора 2-го ранга равна

$$S_3 = ij^{12} = \frac{1}{2}(\sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3), \quad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

При этом угловая зависимость в решениях будет выделяться с помощью D-функций Вигнера. Следовательно, подстановка для спинора $\xi(x)$, являющегося собственной функцией для двух операторов $(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)\xi = j(j+1)\xi, \ J_3\xi = m\xi,$ должна быть такой:

$$\xi(x) = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} f(r)D_{-1} & h(r)D_0 \\ h(r)D_0 & g(r)D_{+1} \end{vmatrix}, \quad D_\sigma = D^j_{-m,-\sigma}(\phi, \theta, 0); \qquad (1)$$

введены три зависящие от переменной r неизвестные функции f, g, h; в обозначении функций Вигнера индексы $\{^j,_{-m}\}$ для краткости опускаются.

Подстановка (1) верна только для следующих значений квантовых чисел: $j = 1, 2, 3, ...; \ m = -j, -j+1, ..., j-1, j;$ для функций с $j = 0$ исходная подстановка должна быть более простой (в ней нет зависимости от угловых переменных):

$$j = 0, \quad \xi(x) = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 & h(r) \\ h(r) & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь нужно найти уравнения для радиальных функций, исходя из основного уравнения (3). Используя известные формулы для функций Вигнера:

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{1}{2}(bD_{-2} - aD_0), \quad (-m+\cos\theta)\sin^{-1}\theta D_{-1} = \frac{1}{2}(-bD_{-2} - aD_0),$$

$$\partial_\theta D_{+1} = \frac{1}{2}(aD_0 - bD_{+2}), \quad (m+\cos\theta)\sin^{-1}\theta D_{+1} = \frac{1}{2}(aD_0 + bD_{+2}),$$

$$\partial_\theta D_0 = \frac{1}{2}(aD_{-1} - aD_{+1}), \quad m\sin^{-1}\theta D_0 = \frac{1}{2}(aD_{-1} + aD_{+1}),$$

$$a = \sqrt{j(j+1)}, \quad b = \sqrt{(j-1)(j+1)},$$

получаем

$$\Sigma_{\theta,\phi}\xi = a\begin{vmatrix} hD_{-1} & gD_0 \\ -fD_0 & -hD_{+1} \end{vmatrix}.$$

Приводим основное уравнение к виду

$$\begin{vmatrix} -i\epsilon f D_{-1} & -i\epsilon hD_0 \\ -i\epsilon hD_0 & -i\epsilon gD_{+1} \end{vmatrix} + \varphi\left\{ \begin{vmatrix} f'D_{-1} & h'D_0 \\ -h'D_0 & -g'D_{+1} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\begin{vmatrix} fD_{-1} & 2hD_0 \\ -2hD_0 & -gD_{+1} \end{vmatrix} + \frac{\varphi'}{2\varphi}\begin{vmatrix} fD_{-1} & 0 \\ 0 & -gD_{+1} \end{vmatrix} \right\} + \frac{\sqrt{\varphi}}{r}a\begin{vmatrix} hD_{-1} & gD_0 \\ -fD_0 & -hD_{+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следуют четыре радиальных уравнения:

$$-i\epsilon f + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi}\right)f + a\frac{\sqrt{\varphi}}{r}h = 0, \quad +i\epsilon g + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi}\right)g + a\frac{\sqrt{\varphi}}{r}h = 0,$$

$$-i\epsilon h + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h + a\frac{\sqrt{\varphi}}{r}g = 0, \quad +i\epsilon h + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h + a\frac{\sqrt{\varphi}}{r}f = 0; \qquad (2)$$

напоминаем, что $a = \sqrt{j(j+1)}$. Уравнения для случая $j = 0$ можно найти из (2), если учесть $f = 0, g = 0$ и формально положить $a = 0$ (фактически это следует из равенства $\Sigma_{\theta,\phi}\Psi_{j=0} = 0$). Так, получаем

$$0 = 0, \quad 0 = 0, \quad -i\epsilon h + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h = 0, \quad +i\epsilon h + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h = 0.$$

Очевидно, что для этой системы существует только одно решение: $h(r) = 0$. Следовательно, уравнения Максвелла не допускают существования сферически-симметричных решений с $j = 0$.

Если в системе (2) сложить и вычесть уравнения 3 и 4, то получим

$$2\varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h + a\frac{\sqrt{\varphi}}{r}(f+g) = 0, \quad h = \frac{ia}{2\epsilon}\frac{\sqrt{\varphi}}{r}(f-g). \qquad (3)$$

Легко убедиться, что первое уравнение в (3) превратится в тождество $0 = 0$, если из третьего и четвертого уравнений из (2) выразить функции f и g через функцию h. Это означает, что независимыми являются только три уравнения:

$$h = \frac{ia}{2\epsilon}\frac{\sqrt{\varphi}}{r}(f - g),$$

$$-i\epsilon f + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi}\right) f + a\frac{\sqrt{\varphi}}{r} h = 0, \quad +i\epsilon g + \varphi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi}\right) g + a\frac{\sqrt{\varphi}}{r} h = 0. \quad (4)$$

С помощью первого уравнения в (4) из двух оставшихся уравнений можно исключить переменную h:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi} - \frac{i\epsilon}{\varphi}\right) f + \frac{ia^2}{2\epsilon r^2}(f - g) = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{i\epsilon}{\varphi}\right) g + \frac{ia^2}{2\epsilon r^2}(f - g) = 0. \quad (5)$$

Сложим и вычтем уравнения в системе (5), попутно перейдем к новым комбинациям функций: $f + g = F, f - g = G$; тогда получим

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi}\right) F - \frac{i\epsilon}{\varphi} G + \frac{ia^2}{\epsilon r^2} G = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\varphi'}{2\varphi}\right) G - \frac{i\epsilon}{\varphi} F = 0, h = \frac{ia}{2\epsilon}\frac{\sqrt{\varphi}}{r} G. \quad (6)$$

Система (6) упрощается подстановками

$$F = \frac{1}{r\sqrt{\varphi}}\bar{F}, \quad G = \frac{1}{r\sqrt{\varphi}}\bar{G};$$

в результате приходим к

$$i\epsilon\frac{d}{dr}\bar{F} + \left(\frac{\epsilon^2}{\varphi} - \frac{a^2}{r^2}\right)\bar{G} = 0, \quad \varphi\frac{d}{dr}\bar{G} = i\epsilon\bar{F}.$$

Отсюда, исключая функцию $\bar{F}$, находим уравнение 2-го порядка для основной переменной $\bar{G}$:

$$\left(\frac{d}{dr}\varphi\frac{d}{dr} + \frac{\epsilon^2}{\varphi} - \frac{a^2}{r^2}\right)\bar{G} = 0,$$

или (учтем, что $a^2 = j(j+1)$)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{d}{dr} + \frac{\epsilon^2}{\varphi^2} - \frac{j(j+1)}{r^2\varphi}\right)\bar{G} = 0, \quad \bar{F}(r) = \frac{\varphi(r)}{i\epsilon}\frac{d}{dr}\bar{G}(r). \quad (7)$$

В качестве простого примера рассмотрим основное радиальное уравнение для электромагнитного поля в случае пространства Минковского. Вычисления по разделению переменных повторять нет необходимости, достаточно положить $\varphi = 1$, тогда вместо (7) получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)\bar{G} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет две особые точки: точка $r = 0$ – регулярная, точка $r = \infty$ – нерегулярная ранга 2; оно принадлежит классу вырожденного гипергеометрического уравнения. В окрестности точки $r = 0$ возможны две асимптотики: $\bar{G} \sim r^{j+1}, r^{-j}$.

Чтобы найти асимптотики в окрестности точки $r=\infty$, преобразуем уравнение к обратной переменной $R=1/r$:

$$\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{d}{dR}+\frac{\epsilon^2}{R^4}-\frac{j(j+1)}{R^2}\right)\bar{G}=0.$$

В соответствии с рангом сингулярной точки $R=0$ асимптотику следует искать в виде $\bar{G}=R^A e^{B/R}$, далее получаем

$$\frac{A(A-1)}{R^2}-\frac{BA}{R^3}-\frac{(A-2)B}{R^3}+\frac{B^2}{R^4}+\frac{2A}{R^2}-\frac{2B}{R^3}+\frac{\epsilon^2}{R^4}-\frac{j(j+1)}{R^2}=0.$$

Оставляем только главные сингулярные члены:

$$-\frac{BA}{R^3}-\frac{(A-2)B}{R^3}+\frac{B^2}{R^4}-\frac{2B}{R^3}+\frac{\epsilon^2}{R^4}=0,$$

откуда следуют возможные значения для параметров A и B:

$$A=0,\quad B=\pm i\epsilon,\quad \bar{G}(r\to\infty)\sim e^{\pm i\epsilon/R}=e^{\pm i\epsilon r}.$$

Установим связь уравнения (8) с вырожденным гипергеометрическим уравнением. Для этого сделаем подстановку, учитывающую поведение решений около особых точек: $\bar{G}=r^a r^{br} g(r)$; требуя $a=j+1,-j,\quad b=\pm i\epsilon,$ получаем

$$r\frac{d^2}{dr^2}+(2a+2br)\frac{d}{dr}g+2abg=0,$$

откуда после преобразования к переменной $x=-2br$ приходим к

$$x\frac{d^2}{dx^2}+(2a-x)\frac{d}{dx}g-ag=0$$

что отождествляется с вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$x\frac{d^2F}{dx^2}+(c-x)\frac{dF}{dx}-aF=0,\quad c=2a.$$

Удобно зафиксировать параметры a и b:

$$a=j+1,\quad b=i\epsilon,\quad x=-2br=-2i\epsilon r,$$

тогда регулярное в точке $x=0(r=0)$ решение может быть выбрано в виде

$$y_1(x)=\Phi(a,2a;x),\quad \bar{G}_1(x)=x^{j+1}e^{-x/2}\Phi(a,c;x),\quad a=j+1, c=2a.$$

Если воспользоваться тождеством Куммера $\Phi(a,c;x)=e^x\Phi(c-a,c;-x)$, то можно убедиться в вещественности полного решения (с точностью до множителя ±1):

$$\bar{G}_1(x)=x^{j+1}e^{-x/2}\Phi(j+1,2j+2;x)=$$
$$=(-1)^{j+1}(x^*)^{j+1}e^{-x^*/2}\Phi(j+1,2j+2;x^*),\quad x^*=(-x).$$

Поскольку параметр $c = 2(j+1)$ принимает целые значения, сингулярное в нуле решение может быть построено на основе другой функции:

$$g(x) = x^a e^{-x/2}\Psi(a,c;x), \quad a = -j, c = -2j;$$

поведение этого решения около нуля задается равенством

$$g(x \to 0) = x^{-j}\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} = x^{-j}\frac{\Gamma(1+2j)}{\Gamma(j+1)}.$$

Описание двух решений можно сделать более простым и симметричным, если преобразовать уравнение (8) к форме уравнения Бесселя. Для этого воспользуемся подстановкой

$$\bar{G}(r) = \sqrt{r}g(r), \quad \frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr} + \left(\epsilon^2 - \frac{(j+1/2)^2}{r^2}\right)g = 0,$$

отсюда после преобразования к переменной $z = \epsilon r$ приходим к уравнению Бесселя

$$\bar{G}(r) = \sqrt{r}g(r), \quad \frac{d^2g}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dg}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)g = 0, \quad p = (j+1/2). \tag{9}$$

Два независимых решения уравнения (9) – функции Бесселя $J_p(z)$ и $J_{-p}(z)$ – можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции:

$$J_p(z) = (\frac{z}{2})^{+p}\frac{e^{iz}}{\Gamma(1+p)}\Phi(p+1/2, 2p+1; -2iz),$$
$$J_{-p}(z) = (\frac{z}{2})^{-p}\frac{e^{iz}}{\Gamma(1-p)}\Psi(-p+1/2, -2p+1; -2iz);$$

очевидно, что это вещественные функции. Известны явные разложения функций Бесселя в степенные ряды

$$J_{+p}(z) = (\frac{z}{2})^{+p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n+1+p)}(\frac{iz}{2})^{2n}, J_{-p}(z) = (\frac{z}{2})^{-p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n+1-p)}(\frac{iz}{2})^{2n}.$$

Приведем главные члены асимптотик для функций Бесселя на бесконечности

$$J_{+p}(|z| \to \infty) = \sqrt{2\pi z}\cos[z-(12+p)\pi 2], J_{+p}(|z| \to \infty) = \sqrt{2\pi z}\cos[z-(12-p)\pi 2].$$

Список использованных источников

1. Спинорные методы в квантовой механике частиц с высшими спинами / А.В. Ивашкевич, Я. А. Войнова, Н. Г. Крылова [и др.]. – Минск : Белорусская наука, 2024. – 433 с.

2. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2011. – 339 с.