Список использованных источников

1. Движение серебряных наночастиц в жидкости с различной вязкостью под действием сил светового давления / А.А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Е.В. Матук, А.Ч. Свистун // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 7–12.
2. Nonlinear Self-Action of Light through Biological Suspensions / A. Bezryadina, T. Hansson, R. Gautam [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2017. – Vol. 119. – P. 58101.
3. Исимару, А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / А. Исимару. – М. : Мир, 1981. –Т. 1.
4. Soliton dynamics and self-induced transparency in nonlinear nanosuspensions / R. El-Ganainy, D.N. Christodoulides, C. Rotschild, M. Segev // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, iss. 16. – P. 10207–10218.
5. Шен, И.Р. Принципы нелинейной оптики / И.Р. Шен. – М. : Наука, 1989. – 560 с.

УДК 004.942

Е.Ю. Цырулик, А.В. Макаревич
Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ПО СКОРОСТИ ХАРАКТЕРЕ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Выполнено компьютерное моделирование падения тела сферической формы в жидкости при его ламинарном режиме обтекания средой. Представлен вывод уравнений для математического описания рассматриваемого процесса, установлен характер движения тела с приведением физического объяснения моделируемого процесса.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, численный анализ, вязкая среда, число Рейнольдса, ламинарный режим.

Введение. При движении тела в вязкой среде (жидкости или газе) на него действует сила сопротивления, которая в отличие от силы сухого трения скольжения существенно зависит от его скорости, определяющей характер обтекания тела потоком набегающей на него среды [1, 2].

В случае ламинарного (слоистого) обтекания (рисунок 1, *а*) величина силы сопротивления $\vec{F}_c$ оказывается прямо пропорциональна модулю скорости $\vec{\upsilon}$ движения объекта относительно среды ($F_c \sim \upsilon$).

Физика возникновения силы сопротивления в этом случае заключается в том, что между движущимся телом и средой всегда существует взаимодействие, поэтому слои среды, находящиеся вблизи поверхности объекта, условно говоря «прилипают» к нему. Эти «прилипшие» слои трутся с соседними слоями, что и приводит возникновению силы сопротивления. Одним из ключевых факторов, определяющим величину силы сопротивления в данном случае, является вязкость среды.

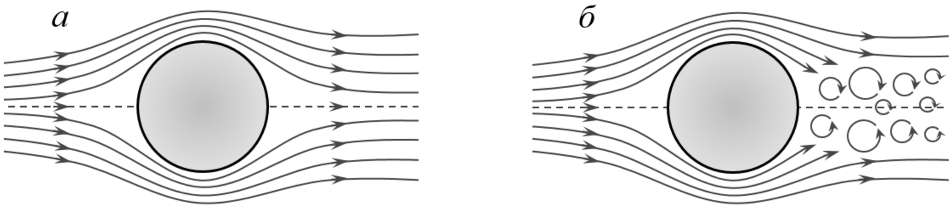


Рисунок 1 – Условное изображение потока набегающей среды при ламинарном (фрагмент *а*) и турбулентном (фрагмент *б*) режимах обтекания тела

При турбулентном (вихревом) режиме обтекания тела (рисунок 1,*б*) частицы набегающей среды позади него начинают двигаться более или менее случайным образом. За телом происходит разрыв линий тока с образованием вихревой зоны. Вязкость среды при этом перестает играть существенную роль, а определяющей становится ее плотность. В этом случае сила сопротивления оказывается пропорциональна квадрату скорости тела ($F_c \sim \upsilon^2$) [1].

Критерием перехода от ламинарного к турбулентному режиму обтекания является значение так называемого безразмерного числа Рейнольдса, вычисляемого как

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 \upsilon l}{\mu},$$

где ρ_0 – плотность среды, μ – ее динамическая вязкость, υ – скорость тела относительно среды, l – характерный поперечный размер тела (например, для шара – его радиус).

В случае тела сферической формы иногда условно считают, что при $\mathrm{Re} \leq 10^2$ имеет место ламинарный режим обтекания, а при $\mathrm{Re} > 10^2$ – турбулентный [2]. Хотя очевидно, что на практике участок $\mathrm{Re} \leq 10^2$ включает переход от ламинарного режима обтекания к турбулентному. Подтверждением этому служит приведенное на рисунке 2 фото реальных иллюстраций течений воды за шаром при двух различных значениях чисел Рейнольдса [3].

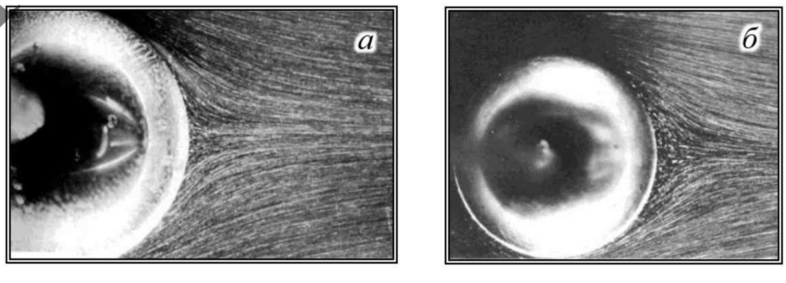


Рисунок 2 – Течение воды за шаром: *а* – при Re = 17,9, *б* – при Re = 26,8 (визуализация потока получена с помощью взвешенного в воде алюминиевого порошка)

Из этого рисунка видно, что при Re = 17,9 (фрагмент *а*) еще наблюдается ламинарное обтекание шара, однако уже при Re = 26,8 (фрагмент *б*) поток в кормовой области становится явно отрывным, обуславливая возникновение турбулентного режима обтекания. Дальнейшее увеличение значения числа Рейнольдса за счет роста скорости шара относительно среды приводит к более выраженному отрыву потока и нарастанию турбулентности. Ниже рассмотрим особенности моделирования движения тел, когда $F_c \sim \upsilon$.

В случае ламинарного обтекания значение действующей на рассматриваемый объект силы сопротивления вычисляется согласно выражению

$$F_c = k\upsilon, \tag{1}$$

где k – коэффициент, зависящий от геометрии тела и свойств среды, υ – скорость набегающего потока среды.

Для тела сферической формы известно значение $k = 6\pi\mu r$, где r – его радиус. Тогда выражение (1) приобретает вид

$$F_c = 6\pi\mu r\upsilon. \tag{2}$$

Формула (2) носит название закона Стокса [1].

С учетом этого построим математическую модель падения без начальной скорости объекта сферической формы в жидкости.

При погружении тела массой m в жидкость на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_A$ (рисунок 3).

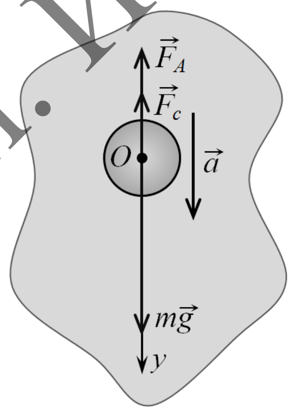


Рисунок 3 – Падение тела сферической формы в жидкости

Если $mg > F_A$, то рассматриваемый объект приобретает ускорение $\vec{a}$, направленное в сторону силы тяжести. По мере увеличения скорости тела на него также начинает действовать сила сопротивления $\vec{F}_c$, противоположная направлению движения и возрастающая в соответствии с (2) пропорционально модулю скорости $\vec{\upsilon}$ набегания среды.

При построении математической модели будем пренебрегать изменением плотности и вязкости жидкости с глубиной, а также считать тело однородным и падающим без вращения.

Второй закон Ньютона для рассматриваемого случая имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_A = m\vec{a}. \qquad (3)$$

Проецируя векторное уравнение (3) на ось *Oy*, получим

$$Oy\colon\ mg - F_c - F_A = ma. \qquad (4)$$

Учитывая (2) и то, что $m = \rho V = \dfrac{4\pi r^3 \rho}{3}$, где ρ – плотность тела, V – его объем, а также что $F_A = \rho_0 g V = \dfrac{4\pi r^3 \rho_0 g}{3}$, выражение (4) можно преобразовать к виду

$$g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{9\mu\upsilon}{2r^2\rho} = a. \qquad (5)$$

Принимая во внимание, что ускорение тела есть первая производная скорости по времени $\left(a = \dfrac{d\upsilon}{dt}\right)$, а скорость тела – первая производная координаты по времени $\left(\upsilon = \dfrac{dy}{dt}\right)$, на основании (5) получим рабочую систему дифференциальных уравнений для рассматриваемого случая

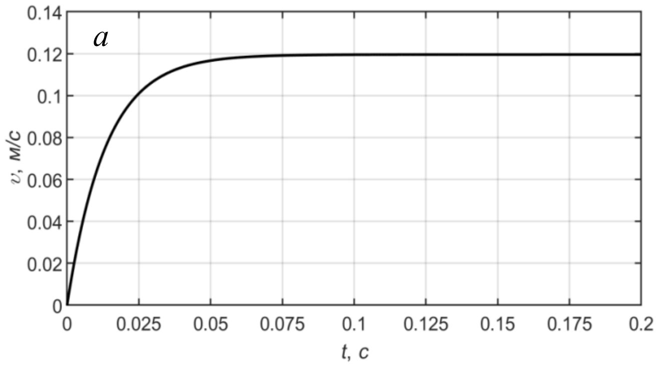
$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon}{dt} = g\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right) - \dfrac{9\mu\upsilon}{2r^2\rho}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \upsilon. \end{cases} \qquad (6)$$

Начальные условия будут иметь вид: $\upsilon(0) = 0,\ y(0) = 0$.

В качестве конкретного примера смоделируем падение ртутного шарика радиуса $r = 2{,}57\cdot10^{-3}$ *м* в глицерине при значении ускорения свободного падения $g = 9{,}81$ *м/с*^{2}. Будем считать, что вся система находится при температуре $t = 20°C$. В этом случае плотность ртути $\rho = 13{,}55\cdot10^3$ *кг/м*^{3}, плотность глицерина $\rho_0 = 13{,}55\cdot10^3$ *кг/м*^{3}, динамическая вязкость глицерина $\mu = 1{,}48$ *Па·с*.

Результаты численного решения системы уравнений (6) с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка представлены на рисунке 4. Шаг интегрирования по времени Δt выбирался равным 10^{-4} *с*.

Из фрагмента 4, *а* видно, что при данных условиях моделирования скорость рассматриваемого тела вначале возрастает, а затем к моменту времени около 0,1 *с* выходит на постоянное значение, равное приблизительно 0,12 *м/с*.



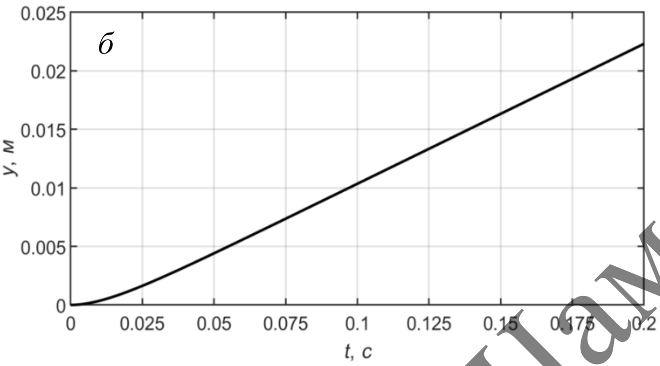


Рисунок 4 – Графики зависимости скорости (фрагмент *а*) и координаты (фрагмент *б*) ртутного шарика от времени

Равноускоренный характер движения шарика проявляется также и на рисунке 4, *б*, поскольку при малых значениях t в графической зависимости $y(t)$ просматривается фрагмент параболы. Далее движение переходит в равномерное, о чем свидетельствует линейный вид графика $y(t)$.

Таким образом, анализ представленных на рисунке 4 зависимостей $\upsilon(t)$ и $y(t)$ позволяет сделать вывод о том, что скорость моделируемого объекта вблизи момента времени 0,1 *с* возрастает до значения, при котором сила сопротивления $\vec{F}_c$ совместно с силой Архимеда $\vec{F}_A$ начинают компенсировать силу тяжести $m\vec{g}$.

В рассматриваемом случае максимальное значение числа Рейнольдса составило 0,054 при скорости тела равной 0,12 *м/с*, что явно не соответствует турбулентному режиму его обтекания.

Таким образом, построение и компьютерная реализация подобных математических моделей дает возможность проанализировать характер движения исследуемых объектов в вязких средах, определить основные факторы, влияющие на их движение, а также глубже понять физику рассматриваемых процессов и взаимодействий тел со средой.

Список использованных источников

1. Ландау, Л.Д. Физика для всех. Движение. Теплота / Л.Д. Ландау, А.И. Китайгородский. – М. : Наука, 1974. – 392 с.

2. Алешкевич, В.А. Механика сплошных сред. Лекции. / В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев ; под ред. В.А. Алешкевича. – М. : Изд-во Физического факультета МГУ, 1998. – 92 с.

3. Van Dyke, M. An Albom of Fluid Motion / M. Van Dyke. – Stanford : Parabolic Press, 1982. – 177 p.