

- математические диктанты;
- письменные самостоятельные работы;
- итоговые письменные работы по темам;
- расчетно-графическая работа;
- контрольная работа;
- письменные отчеты по лабораторным занятиям.

В случае неудовлетворительного для курсанта написания математического диктанта или выполнения той или иной письменной работы или в случае отсутствия курсанта при проведении контроля курсант по желанию пересдавал данный промежуточный вид контроля в часы, отводимые для самоподготовки.

Среднее арифметическое взвешенное набора отметок, полученных курсантом при прохождении каждого из видов контроля по темам раздела, с применением весов, информация о значениях которых была доведена до курсантов в начале семестра, являлось отметкой уровня освоения курсантом содержания раздела.

К моменту итогового контроля – к экзамену – курсант подходил с набором полученных отметок по каждому из изученных разделов программы учебной дисциплины. Среднее арифметическое значение этих отметок и определяло предварительный уровень освоения курсантом всего содержания учебной дисциплины. Предварительный уровень освоения, так называемый курсантами «автомат», являлся нижней границей для отметки получаемой курсантом на экзамене.

Использование элементов модульного метода обучения позволило:

- преподавателю:**
 - мотивировать курсантов на систематическую работу по освоению дисциплины;
 - организовать и активизировать учебную работу курсантов в течение семестра;
 - осуществлять текущий контроль работы каждого курсанта в течение семестра;
 - учитывать индивидуальные особенности курсантов;
 - подвести предварительный итог по освоению курса каждым курсантом;
- курсанту:**
 - организовать пошаговую качественную подготовку к экзамену в течение семестра;
 - влиять на уровень отметки по каждому из разделов и в целом на предварительный уровень освоения;
 - уверенное чувствовать себя на экзамене.

Применение описанной системы организации и осуществления процесса обучения способствовало созданию у курсанта фундаментальных знаний, умений и навыков, необходимой базы, определяющей уровень овладения им спектром учебных дисциплин, связанных непосредственно с его будущей военной специальностью, а также развитию у курсанта навыка самостоятельно двигаться к знанию, закреплению желания, потребности учиться, познавать.

В заключении отметим, что описанный выше педагогический опыт может быть полезен не только при преподавании учебных дисциплин модуля «Высшая математика», но и при преподавании в вузе других фундаментальных дисциплин.

Список использованных источников

1. Шамукова, Н.В. Применение технологии «бесконспектная лекция» как средство повышения результативности лекции / Н.В. Шамукова, Н.Г. Лопухова // Вестник военной академии Республики Беларусь. – 2023. – №2(79). – С. 99–103.
2. Лопухова, Н.Г. К вопросу об организации и проведении учебных занятий по высшей математике // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам = Innovative teaching techniques in physics, mathematics, vocational and mechanical training : материалы XVI Междунар. науч.-практ. конф., Мозырь, 29 марта 2024 г. / УО МГПУ им. И.П. Шамякина ; редкол.: И.Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь : МГПУ им. И.П. Шамякина, 2024. – С. 66–67.

УДК 004.94

А.В. Макаревич, Е.Ю. Цырулик
Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ ПРУЖИННЫХ МАЯТНИКОВ

Представлен вывод системы дифференциальных уравнений для математического описания свободных колебаний связанных между собой горизонтально расположенных пружинных маятников. С использованием полученных уравнений представлены результаты компьютерного моделирования колебаний рассматриваемых объектов с построением фазовых траекторий их движения.

Ключевые слова: пружинный маятник, колебательная система, компьютерное моделирование, численный анализ, фазовая диаграмма.

Введение. В литературе при рассмотрении колебательных систем, как правило, внимание уделяется обособленным математическому, пружинному и физическому маятникам (см., например, [1; 2]). Колебания указанных маятников являются достаточно простыми и глубоко изученными как с точки зрения физической интерпретации, так и математического описания. Однако при рассмотрении колебаний связанных между собой тел, траектории их движения становятся уже далеко неочевидными и значительно усложняются при увеличении числа участвующих в колебательном процессе объектов. В этом случае для анализа колебаний рациональным является использование инструментов компьютерного моделирования, поскольку при этом рассматриваемый процесс может быть реализован в динамике, что позволит наблюдателю глубже понять физику происходящих явлений и выявить основные факторы, влияющие на колебательную систему.

В качестве конкретного примера рассмотрим моделирование свободных колебаний связанных между собой пружинных маятников с приведением методики получения необходимых математических уравнений. При этом отметим, что свободными называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе, после того, как она была выведена из положения равновесия. Колебания в этом случае происходят только под действием внутренних сил системы [3; 4].

Рассмотрим горизонтально расположенную систему, состоящую из пяти тел массами m_1, m_2, \dots, m_5 , соединенных между собой шестью невесомыми пружинами с жесткостями k_1, k_2, \dots, k_6 (рисунок 1). Будем считать, что для предотвращения провисания системы через грузы и пружины просажен жесткий стержень, закрепленный между двумя неподвижными опорами, по которому перечисленные тела могут скользить без трения.

Предположим, что в начальный момент времени грузы сдвинуты относительно своих положений устойчивого равновесия O_1, O_2, \dots, O_5 в положения O'_1, O'_2, \dots, O'_5 . Векторы перемещений тел на данном рисунке показаны как $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_5$, а абсолютные удлинения и сжатия пружин отмечены как $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_5$. На тела со стороны каждой из деформированных пружин будут действовать силы упругости $\vec{F}_{11}, \vec{F}_{12}, \dots, \vec{F}_{56}$. При этом первый индекс при векторе \vec{F} показывает, на какой груз действует эта сила, а второй – со стороны какой пружины она приложена (например, \vec{F}_{12} – сила упругости, действующая на груз массой m_1 со стороны пружины жесткостью k_2 и т.д.). Во избежание нагромождений на этом рисунке силы упругости, приложенные к телам, показаны сверху них.

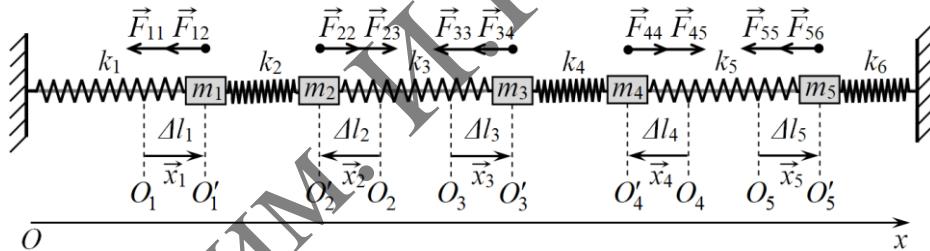


Рисунок 1 – Колебательная система, состоящая из связанных пружинных маятников

Запишем второй закон Ньютона для каждого груза:

- 1: $\vec{F}_{11} + \vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1,$
- 2: $\vec{F}_{22} + \vec{F}_{23} = m_2 \vec{a}_2,$
- 3: $\vec{F}_{33} + \vec{F}_{34} = m_3 \vec{a}_3,$
- 4: $\vec{F}_{44} + \vec{F}_{45} = m_4 \vec{a}_4,$
- 5: $\vec{F}_{55} + \vec{F}_{56} = m_5 \vec{a}_5,$

где $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_5$ – векторы ускорений грузов.

Спроектировав полученные векторные уравнения на ось Ox (рисунок 1), получим:

$$\begin{aligned} -F_{11} - F_{12} &= m_1 a_{1x}, \\ F_{22} + F_{23} &= m_2 a_{2x}, \\ -F_{33} - F_{34} &= m_3 a_{3x}, \\ F_{44} + F_{45} &= m_4 a_{4x}, \\ -F_{55} - F_{56} &= m_5 a_{5x}. \end{aligned}$$

Поскольку согласно закону Гука сила упругости, возникающая при деформации пружины, прямо пропорциональна величине ее абсолютного удлинения или сжатия, то есть $F_{upr.} = k\Delta l$, то из последних уравнений будем иметь:

$$\begin{aligned}-k_1\Delta l_1 - k_2(\Delta l_1 + \Delta l_2) &= m_1 a_{1x}, \\ k_2(\Delta l_1 + \Delta l_2) + k_3(\Delta l_2 + \Delta l_3) &= m_2 a_{2x}, \\ -k_3(\Delta l_2 + \Delta l_3) - k_4(\Delta l_3 + \Delta l_4) &= m_3 a_{3x}, \\ k_4(\Delta l_3 + \Delta l_4) + k_5(\Delta l_4 + \Delta l_5) &= m_4 a_{4x}, \\ -k_5(\Delta l_4 + \Delta l_5) - k_6\Delta l_5 &= m_5 a_{5x}.\end{aligned}$$

С учетом того, что (также см. рисунок 1)

$$\Delta l_1 = x_1, \Delta l_2 = -x_2, \Delta l_3 = x_3, \Delta l_4 = -x_4 \text{ и } \Delta l_5 = x_5,$$

перепишем полученные уравнения следующим образом

$$\begin{aligned}-k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) &= m_1 a_{1x}, \\ k_2(x_1 - x_2) + k_3(x_3 - x_2) &= m_2 a_{2x}, \\ -k_3(x_3 - x_2) - k_4(x_3 - x_4) &= m_3 a_{3x}, \\ k_4(x_3 - x_4) + k_5(x_5 - x_4) &= m_4 a_{4x}, \\ -k_5(x_5 - x_4) - k_6 x_5 &= m_5 a_{5x}.\end{aligned}$$

Тогда рабочая система дифференциальных уравнений может быть представлена следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} [-k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2)], \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} [k_2(x_1 - x_2) + k_3(x_3 - x_2)], \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} = \frac{1}{m_3} [-k_3(x_3 - x_2) - k_4(x_3 - x_4)], \\ \frac{d^2 x_4}{dt^2} = \frac{1}{m_4} [k_4(x_3 - x_4) + k_5(x_5 - x_4)], \\ \frac{d^2 x_5}{dt^2} = \frac{1}{m_5} [-k_5(x_5 - x_4) - k_6 x_5]. \end{array} \right.$$

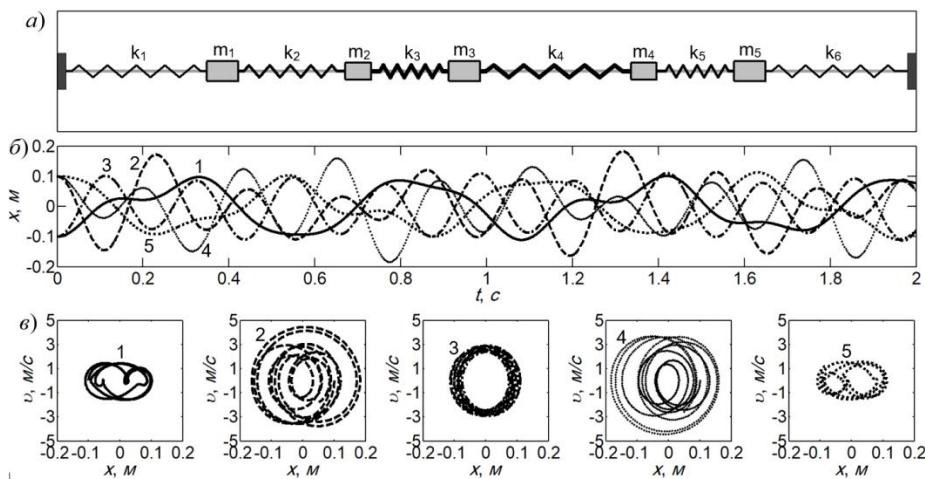
Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned}v_{1x}(0) &= v_{01x}, \quad v_{2x}(0) = v_{02x}, \dots, \quad v_{5x}(0) = v_{05x}, \\ x_1(0) &= x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \dots, \quad x_5(0) = x_{05}.\end{aligned}$$

Здесь v_{0ix} и x_{0i} – соответственно начальные значения проекций скоростей тел на ось Ox и их координат, где $i = 1, 2, \dots, 5$.

В результате использования полученной системы дифференциальных уравнений была разработана компьютерная программа, позволяющая в динамике визуализировать колебания рассматриваемой системы. Результаты работы программы для колебания грузов в течение промежутка времени $\Delta t = 2$ с представлены на рисунке 2. Здесь на фрагменте 2,а показано положение самой колебательной системы в конечный момент времени, на фрагменте 2,б приведены зависимости изменения координаты x каждого груза относительно положения его устойчивого равновесия от времени t , а на фрагменте 2,в изображены фазовые траектории движения грузов (зависимости $x(v)$). На фрагментах 2,б и 2,в указанные зависимости для грузов массами m_1, m_2, \dots, m_5 отмечены соответственно цифрами 1, 2, ..., 5.

При численном анализе использованы следующие параметры и начальные условия колебательной системы: $k_1 = k_6 = 20 \text{ H/m}$, $k_2 = k_5 = 40 \text{ H/m}$, $k_3 = k_4 = 60 \text{ H/m}$; $m_1 = m_3 = m_5 = 0,3 \text{ кг}$, $m_2 = m_4 = 0,2 \text{ кг}$; $v_{01} = v_{02} = v_{03} = v_{04} = v_{05} = 0 \text{ м/с}$; $x_{01} = x_{03} = -0,1 \text{ м}$, $x_{02} = x_{04} = x_{05} = 0,1 \text{ м}$.



a – вид колебательной системы в конечный момент времени $t = 2 \text{ с}$;
б – зависимости $x(t)$ для каждого из грузов, в – фазовые траектории движения грузов

Рисунок 2 – Результаты выполнения разработанной компьютерной программы

Как видно из фрагментов 2,б и 2,в, более легкие тела массами m_2 и m_4 , обладающие меньшей инертностью по сравнению с грузами m_1 , m_3 , m_5 и заключенные соответственно между более жесткими пружинами k_2 и k_3 , а также k_4 и k_5 имеют очевидно больший размах колебаний в процессе движения рассматриваемой системы. Это обусловлено тем, что из-за их меньшей массы и больших сил упругости, действующих на них, эти тела согласно II закону Ньютона приобретают большие ускорения в некоторые моменты времени, чем объекты m_1 , m_3 и m_5 , обладающие большей массой. При этом инертность более тяжелых грузов массами m_1 , m_3 и m_5 также хорошо просматривается в процессе их движения и, как показал анализ рассматриваемой системы, для увеличения быстроты изменения их координат и скорости с течением времени эти грузы нужно соединять более жесткими пружинами, что также следует из II закона Ньютона.

Таким образом, построение и компьютерная реализация подобных математических моделей дает возможность проанализировать движение исследуемых объектов, входящих в связанную колебательную систему, а также определить основные факторы, определяющие характер движения тел. Кроме того, использование подобных моделей в качестве демонстрационных является целесообразным на занятиях со студентами, специализирующимися на компьютерном моделировании физических процессов и явлений, и может способствовать развитию у студентов представлений о роли компьютерного моделирования в современной физике и его практическом применении.

Список использованных источников

1. Кузнецов, С.И. Физические основы механики : учеб. пособие / С.И. Кузнецов. – Томск : Изд-во ТПУ, 2006. – 118 с.
2. Ландсберг, Г.С. Элементарный учебник физики. Механика. Теплота. Молекулярная физика : учеб. пособие : в 3 т. / С.Г. Ландсберг. – 14-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – Т. 1. – 612 с.
3. Савельев, И.В. Курс общей физики. Механика, колебания и волны, молекулярная физика : учебник для вузов : в 3 т. / И.В. Савельев. – 20-е изд. – СПб. : Лань, 2025. – Т. 1. – 436 с.
4. Аксенович, Л.А. Физика в средней школе. Теория. Задания. Тесты : учебное пособие для учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования / Л.А. Аксенович, Н.Н. Ракина, К.С. Фарино. – Минск : Аверсэв, 2010. – 1104 с.

УДК 519.2

Т.А. Макаревич
Военная академия Республики Беларусь

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПРИ НАХОЖДЕНИИ КОМПОЗИЦИИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В статье рассматривается нестандартный подход к нахождению закона распределения суммы двух независимых непрерывных случайных величин, связанный с применением характеристических функций, что позволяет использовать привычный для инженеров аппарат преобразования Фурье.

Ключевые слова: композиция законов распределения, свертка плотностей вероятности, характеристическая функция, преобразование Фурье.

Для решения ряда практических задач необходимо знать закон распределения суммы двух независимых непрерывных случайных величин. Как известно, плотность вероятности $f_\zeta(z)$ суммы